

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Семинар № 5

**Линейные пространства и подпространства, их базисы и размерности.
Линейные оболочки. Матрица перехода от одного базиса к другому.**

ИЯФиТ

доцент Волков Н.П.

Занятие 5

$$1278 \quad \vec{e}_1 = \{2, 1, -3\}, \vec{e}_2 = \{3, 2, -5\}, \vec{e}_3 = \{1, -1, 1\}$$

$$\vec{x} = \{6, 2, -7\}$$

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$$

$$\hat{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -3 & -5 & 1 & -7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{Rg} \hat{A} = \operatorname{Rg} A = 3 = n \Rightarrow$$

1) $\Rightarrow \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - лин. независимая система

^{Th 5.4}
 $\Rightarrow [e] = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - базис \mathbb{R}^3

2) ^{Th 3.1} $\Rightarrow \exists!$ решение: $x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{x} = 1 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + 1 \cdot \vec{e}_3}$$

$$1280 \quad \vec{e}_1 = \{1, 2, 1\}, \vec{e}_2 = \{2, 3, 3\}, \vec{e}_3 = \{3, 7, 1\};$$

$$\vec{e}'_1 = \{3, 1, 4\}, \vec{e}'_2 = \{5, 2, 1\}, \vec{e}'_3 = \{1, 1, -6\}$$

$[e']$ - базис?

$$A' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & -2 & 22 \\ 0 & -3 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 22 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Rg} A' = 3 \Rightarrow [e'] = \{\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\} - \text{базис } \mathbb{R}^3$$

$$(11) \Rightarrow [e'] = [e]T \Rightarrow T = [e]^{-1}[e']$$

$$T: ([e] | [e']) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -7 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow$$

$$T = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \quad \text{и } \text{Rg}[e] = 3 \Rightarrow [e] \text{-базис}$$

Пусть $x = [e]\alpha$, $x = [e']\alpha'$, где

α и α' - векторы из координат элемента x в базисах $[e]$ и $[e']$ соответственно.

$$(13) \Rightarrow \alpha' = T^{-1}\alpha \quad \text{или} \quad \alpha = T\alpha'$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = -27\alpha'_1 - 71\alpha'_2 - 41\alpha'_3 \\ \alpha_2 = 9\alpha'_1 + 20\alpha'_2 + 9\alpha'_3 \\ \alpha_3 = 4\alpha'_1 + 12\alpha'_2 + 8\alpha'_3 \end{cases}$$

1282] а) $P_n(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_n t^n$
 в базисе $[e] = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$?

$$P_n(t) = \{\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$$

1283] $[e] = \{1, t, t^2, \dots, t^n\}$,

$$[e'] = \{1, t-d, (t-d)^2, \dots, (t-d)^n\}$$

Найти матрицу перехода от $[e]$ к $[e']$.

Решение:

$$1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^n$$

$$t-d = -d \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 + \dots + 0 \cdot t^n$$

$$(t-d)^2 = t^2 - 2dt + d^2 = d^2 \cdot 1 - 2d \cdot t + 1 \cdot t^2 + 0 \cdot t^3 + \dots + 0 \cdot t^n$$

$$\dots$$

$$(t-d)^n = t^n + n(-d) \cdot t^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} (-d)^2 t^{n-2} + \dots + n(-d)^{n-1} t + (-d)^n \cdot 1 = (-d)^n \cdot 1 + (-d)^{n-1} n t + \dots + 1 \cdot t^n$$

$$(\alpha + \beta)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \alpha^{n-k} \beta^k$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -d & d^2 & \dots & (-d)^n \\ 0 & 1 & -2d & \dots & n(-d)^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{n(n-1)}{2} (-d)^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1285 | Это множество не является линейным подпространством, т.к. $\lambda \in \mathbb{R}$.

1287 | 1) Это множество является линейным подпространством, если прямая проходит через начало координат.

2) В противном случае это множество не будет линейным подпространством.

1290 | Это множество не является линейным подпространством, т.к.
 $\forall x \in G \quad -1 \cdot x \notin G$.

1291 | Это множество будет линейным подпространством.

1297 | $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \{d_1, d_2, \dots, d_n\} : d_1 = d_n\}$
Это множество является линейным подпространством.

Базис:	$e_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0, 1\}$	$\Rightarrow \dim L =$ $= n - 1$
	$e_2 = \{0, 1, 0, \dots, 0, 0\}$	
	$e_{n-1} = \{0, 0, 0, \dots, 1, 0\}$	

$$\underline{1299} \quad L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}, \alpha_n\} : \alpha_{2k} = \alpha_{2k+2}\}$$

Это множество - лин. подпространство $\forall k=1, 2, \dots$

Базис: 1) $n = 2k \Rightarrow$

$$e_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

$$e_2 = \{0, 0, 1, \dots, 0\}$$

$$\dots$$
$$e_k = \{0, 0, 0, \dots, 1, 0\}$$

$$e_{k+1} = \{0, 1, \dots, 0, 1\}$$

$$\Rightarrow \dim L = k+1$$

2) $n = 2k+1$

$$e_1 = \{1, 0, 0, \dots, 0\}$$

$$e_2 = \{0, 0, 1, \dots, 0\}$$

$$\dots$$
$$\Rightarrow \dim L = k+2$$

$$\dots$$
$$e_{k+1} = \{0, 0, 0, \dots, 0, 1\}$$

$$e_{k+2} = \{0, 1, 0, \dots, 1, 0\}$$

Окончательно, $\boxed{\dim L = \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1}$

$$\underline{1311} \quad \vec{\alpha}_1 = \{1, 1, 1, 1, 0\}, \quad \vec{\alpha}_2 = \{1, 1, -1, -1, -1\}$$

$$\vec{\alpha}_3 = \{2, 2, 0, 0, -1\}, \quad \vec{\alpha}_4 = \{1, 1, 5, 5, 2\}, \quad \vec{\alpha}_5 = \{1, -1, -1, 0, 0\}$$

$$L = L(\vec{\alpha}_1, \vec{\alpha}_2, \vec{\alpha}_3, \vec{\alpha}_4, \vec{\alpha}_5)$$

$$\dim L = ? \quad \text{Базис } L ?$$

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Rg} A = 3 \Rightarrow \text{Базис } L: [e] = \{\alpha_{\downarrow 1}, \alpha_{\downarrow 2}, \alpha_{\downarrow 5}\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim L = 3}$$

Def 1 Пересечением линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество $L_1 \cap L_2 = \{x \in V: x \in L_1 \text{ и } x \in L_2\}$

Def 2 Суммой L_1 и L_2 называется множество $L_1 + L_2 = \{x \in V: x = x_1 + x_2, \text{ где } x_1 \in L_1, x_2 \in L_2\}$

Формула: $\dim(L_1 + L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 \cap L_2)$ (*)

$$1317] \vec{a}_1 = \{1, 2, 0, 1\}, \vec{a}_2 = \{1, 1, 1, 0\};$$

$$\vec{b}_1 = \{1, 0, 1, 0\}, \vec{b}_2 = \{1, 3, 0, 1\}$$

$$L_1 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2), L_2 = L(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$$

$$\dim(L_1 + L_2) = ? \quad \dim(L_1 \cap L_2) = ?$$

Решение

Найдем $\dim L_1$ и $\dim L_2$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} A = 2 \Rightarrow \dim L_1 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Базис } L_1: \{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} B = 2 \Rightarrow \dim L_2 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Базис } L_2: \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim(L_1 + L_2) = 3} \Rightarrow \text{Базис } (L_1 + L_2): \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{b}_1\}$$

$$\boxed{\dim(L_1 \cap L_2) \stackrel{(*)}{=} \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 2 - 3 = 1}$$

$$1320 \quad \vec{a}_1 = \{1, 2, 1\}, \quad \vec{a}_2 = \{1, 1, -1\}, \quad \vec{a}_3 = \{1, 3, 3\}$$

$$\vec{b}_1 = \{2, 3, -1\}, \quad \vec{b}_2 = \{1, 2, 2\}, \quad \vec{b}_3 = \{1, 1, -3\}$$

$$L_1 = L(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3), \quad L_2 = L(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$$

Найти базисы $L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2$.

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim L_1 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Базис } L_1: \{ \underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2} \}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim L_2 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Базис } L_2: \{ \underset{\downarrow}{b_1}, \underset{\downarrow}{b_2} \}$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim(L_1 + L_2) = 3$$

$$\text{Базис } (L_1 + L_2): \{ \underset{\downarrow}{a_1}, \underset{\downarrow}{a_2}, \underset{\downarrow}{b_1} \}$$

$$\dim(L_1 \cap L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 - \dim(L_1 + L_2) = 2 + 2 - 3 = 1$$

Найдем базис $L_1 \cap L_2$

Из Def 1 $\Rightarrow \forall x \in L_1 \cap L_2$ $x \in L_1$ и $x \in L_2$
одновременно

$$\Rightarrow x_1 \underset{\downarrow}{a_1} + x_2 \underset{\downarrow}{a_2} = y_1 \underset{\downarrow}{b_1} + y_2 \underset{\downarrow}{b_2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3y_1 - 2y_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Положим $y_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 1, x_2 = 1, x_1 = 2$

$$c = 2 \underset{\downarrow}{a_1} + \underset{\downarrow}{a_2} = \underset{\downarrow}{b_1} + \underset{\downarrow}{b_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, базис $(L_1 \cap L_2)$: $\left\{ \underset{\downarrow}{c} \right\}$

Дома: 1277, 1279, 1281, 1282, 1286, 1288,
1292, 1293, 1298, 1300, 1310, 1318, 1321.

