ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Семинар № 5

Линейные пространства и подпространства, их базисы и размерности. Линейные оболочки. Матрица перехода от одного базиса к другому.

ИЯФиТ

доцент ***Волков Н.П.***

Занятие 5

1278 $\vec{e}_1=\{2,1,-3\}$, $\vec{e}_2=\{3,2,-5\}$, $\vec{e}_3=\{1,-1,1\}$

$\vec{x}=\{6,2,-7\}$

$$\underset{\downarrow}{x}=x_1\underset{\downarrow}{e_1}+x_2\underset{\downarrow}{e_2}+x_3\underset{\downarrow}{e_3}$$

$$\hat{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2&3&1&6\\1&2&-1&2\\-3&-5&1&-7\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&-1&3&2\\0&1&-2&-1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&-1&2\\0&1&-2&-1\\0&0&1&1\end{array}\right)$$

$\Rightarrow Rg\,\hat{A}=Rg\,A=3=n\Rightarrow$

1) $\Rightarrow \{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ – лин. независимая система

$\overset{Th 5.4}{\Rightarrow}$ $[e]=\{\underset{\downarrow}{e_1},\underset{\downarrow}{e_2},\underset{\downarrow}{e_3}\}$ – базис R^3

2) $\overset{Th 3.1}{\Rightarrow}$ $\exists!$ решение: $x_3=1$, $x_2=1$, $x_1=1$

$$\Rightarrow\ \boxed{\underset{\downarrow}{x}=1\cdot\underset{\downarrow}{e_1}+1\cdot\underset{\downarrow}{e_2}+1\cdot\underset{\downarrow}{e_3}}$$

1280 $\vec{e}_1=\{1,2,1\}$, $\vec{e}_2=\{2,3,3\}$, $\vec{e}_3=\{3,7,1\}$;

$\vec{e}\,'_1=\{3,1,4\}$, $\vec{e}\,'_2=\{5,2,1\}$, $\vec{e}\,'_3=\{1,1,-6\}$

$[e']$ – базис?

$$A'=\begin{pmatrix}3&1&4\\5&2&1\\1&1&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6\\0&-2&22\\0&-3&31\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6\\0&1&-9\\0&-2&22\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-6\\0&1&-9\\0&0&4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Rg\,A'=3\Rightarrow [e']=\{\underset{\downarrow}{e'_1},\underset{\downarrow}{e'_2},\underset{\downarrow}{e'_3}\}$ – базис R^3

$(11) \Rightarrow [e'] = [e]T \Rightarrow T = [e]^{-1}[e']$

$T:$ $$([e]\,|\,[e']) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 4 & 1 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -5 & -8 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -4 & -7 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & -7 & -11 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & -12 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 12 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{T = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}} \quad \text{и } Rg[e] = 3 \Rightarrow [e]\text{-базис}$$

Пусть $x = [e]\underset{\downarrow}{\alpha}$, $x = [e']\underset{\downarrow}{\alpha'}$, где $\underset{\downarrow}{\alpha}$ и $\underset{\downarrow}{\alpha'}$ - векторы из координат элемента x в базисах $[e]$ и $[e']$ соответственно.

$(13) \Rightarrow \underset{\downarrow}{\alpha'} = T^{-1}\underset{\downarrow}{\alpha}$ или $\underset{\downarrow}{\alpha} = T\underset{\downarrow}{\alpha'}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -71 & -41 \\ 9 & 20 & 9 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \\ \alpha'_3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha_1 = -27\alpha'_1 - 71\alpha'_2 - 41\alpha'_3 \\ \alpha_2 = 9\alpha'_1 + 20\alpha'_2 + 9\alpha'_3 \\ \alpha_3 = 4\alpha'_1 + 12\alpha'_2 + 8\alpha'_3 \end{cases}}$$

1282 а) $P_n(t)=a_0+a_1t+a_2t^2+\dots+a_nt^n$

в базисе $[e]=\{1,t,t^2,\dots,t^n\}$?

$$\boxed{P_n(t)=\{a_0,a_1,a_2,\dots,a_n\}}$$

1283 $[e]=\{1,t,t^2,\dots,t^n\}$,

$[e']=\{1,t-\alpha,(t-\alpha)^2,\dots,(t-\alpha)^n\}$

Найти матрицу перехода от $[e]$ к $[e']$.

Решение:

$$1=1\cdot1+0\cdot t+0\cdot t^2+\dots+0\cdot t^n$$

$$t-\alpha=-\alpha\cdot1+1\cdot t+0\cdot t^2+\dots+0\cdot t^n$$

$$(t-\alpha)^2=t^2-2\alpha t+\alpha^2=\alpha^2\cdot1-2\alpha\cdot t+1\cdot t^2+0\cdot t^3+\dots+0\cdot t^n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(t-\alpha)^n=t^n+n(-\alpha)\cdot t^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}(-\alpha)^2t^{n-2}+\dots+$$
$$+n(-\alpha)^{n-1}t+(-\alpha)^n\cdot1=(-\alpha)^n\cdot1+(-\alpha)^{n-1}nt+\dots+1\cdot t^n$$

$$\boxed{(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k}$$

$$\boxed{T=\begin{pmatrix}1 & -\alpha & \alpha^2 & \dots & (-\alpha)^n\\ 0 & 1 & -2\alpha & \dots & n(-\alpha)^{n-1}\\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{n(n-1)}{2}(-\alpha)^{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}}$$

1285) Это множество не является линейным подпространством, т.к. $\lambda \in \mathbb{R}$.

1287) 1) Это множество является линейным подпространством, если прямая проходит через начало координат.
2) В противном случае это множество не будет линейным подпространством.

1290) Это множество не является линейным подпространством, т.к. $\forall x \in G \quad -1 \cdot x \notin G$.

1291) Это множество будет линейным подпространством.

1297) $L = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\} : \alpha_1 = \alpha_n\}$
Это множество является линейным подпространством.

Базис: $e_1 = \{1, 0, 0, \ldots, 0, 1\}$
$e_2 = \{0, 1, 0, \ldots, 0, 0\}$
$\ldots$
$e_{n-1} = \{0, 0, 0, \ldots, 1, 0\}$
$\Rightarrow \dim L = n - 1$

$\underline{1299}$ $L=\{x\in\mathbb{R}^n : x=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_{n-1},\alpha_n\} : \alpha_{2k}=\alpha_{2k+2}\ \forall k=1,2,\dots\}$

Это множество – лин. подпространство

Базис: 1) $n=2k \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} e_1&=\{1,0,0,\dots,0\}\\ e_2&=\{0,0,1,\dots,0\}\\ &\dots\dots\dots\dots\\ e_k&=\{0,0,0,\dots,1,0\}\\ e_{k+1}&=\{0,1,\dots,0,1\}\end{aligned}\right. \Rightarrow \dim L=k+1$$

2) $n=2k+1$

$$\left.\begin{aligned} e_1&=\{1,0,0,\dots,0\}\\ e_2&=\{0,0,1,\dots,0\}\\ &\dots\dots\dots\dots\\ e_{k+1}&=\{0,0,0,\dots,0,1\}\\ e_{k+2}&=\{0,1,0,\dots,1,0\}\end{aligned}\right. \Rightarrow \dim L=k+2$$

Окончательно, $\boxed{\dim L=\left[\frac{n+1}{2}\right]+1}$

$\boxed{1311}$ $\vec{a}_1=\{1,1,1,1,0\}$, $\vec{a}_2=\{1,1,-1,-1,-1\}$

$\vec{a}_3=\{2,2,0,0,-1\}$, $\vec{a}_4=\{1,1,5,5,2\}$, $\vec{a}_5=\{1,-1,-1,0,0\}$

$L=L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4,\vec{a}_5)$

$\dim L=?$ Базис L ?

Решение:

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&-1&-1&-1\\2&2&0&0&-1\\1&1&5&5&2\\1&-1&-1&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&-2&-2&-1\\0&0&4&4&2\\0&-2&-2&-1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&1&0\\0&0&2&2&1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&2&2&1&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{Rg}A=3 \Rightarrow \boxed{\text{Базис } L:\ [e]=\{\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_5\}}$

$\Rightarrow \boxed{\dim L=3}$

Def 1 Пересечением линейных подпространств L_1 и L_2 называется множество $L_1\cap L_2=\{x\in V:\ x\in L_1 \text{ и } x\in L_2\}$

Def 2 Суммой L_1 и L_2 называется множество $L_1+L_2=\{x\in V:\ x=x_1+x_2$, где $x_1\in L_1,\ x_2\in L_2\}$

Формула: $\dim(L_1+L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1\cap L_2)$ (*)

1317 $\vec{a}_1=\{1,2,0,1\}$, $\vec{a}_2=\{1,1,1,0\}$;

$\vec{b}_1=\{1,0,1,0\}$, $\vec{b}_2=\{1,3,0,1\}$

$L_1=L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$, $L_2=L(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$

$\dim(L_1+L_2)=?$ $\dim(L_1\cap L_2)=?$

Решение

Найдем $\dim L_1$ и $\dim L_2$:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&1\\0&-1&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow Rg A=2\Rightarrow \dim L_1=2$$

$\Rightarrow$ Базис L_1: $\{\downarrow a_1, \downarrow a_2\}$

$$B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&3&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow Rg B=2\Rightarrow \dim L_2=2$$

$\Rightarrow$ Базис L_2: $\{\downarrow b_1, \downarrow b_2\}$

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&0&1\\1&1&1&0\\1&0&1&0\\1&3&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&2&-1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&3&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&-1&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&0&-1&1\\0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \boxed{\dim(L_1+L_2)=3}\Rightarrow$ Базис(L_1+L_2): $\{\downarrow a_1, \downarrow a_2, \downarrow b_1\}$

$$\boxed{\dim(L_1\cap L_2)\overset{(*)}{=}\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1+L_2)=2+2-3=1}$$

1320 $\vec{a}_1=\{1,2,1\}$, $\vec{a}_2=\{1,1,-1\}$, $\vec{a}_3=\{1,3,3\}$

$\vec{b}_1=\{2,3,-1\}$, $\vec{b}_2=\{1,2,2\}$, $\vec{b}_3=\{1,1,-3\}$

$L_1=L(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$, $L_2=L(\vec{b}_1,\vec{b}_2,\vec{b}_3)$

Найти базисы L_1+L_2 и $L_1\cap L_2$.

Решение:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\1&3&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&1&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \dim L_1=2$$

$\Rightarrow$ Базис L_1: $\{a_1, a_2\}$

$$B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\1&2&2\\1&1&-3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&-1&-5\\1&2&2\\0&-1&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0&1&5\\1&2&2\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \dim L_2=2$$

$\Rightarrow$ Базис L_2: $\{b_1, b_2\}$

$$\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&-1\\2&3&-1\\1&2&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&-2\\0&-1&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&2\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \dim(L_1+L_2)=3$$

Базис (L_1+L_2): $\{a_1, a_2, b_1\}$

$\dim(L_1\cap L_2)=\dim L_1+\dim L_2-\dim(L_1+L_2)=$

$=2+2-3=1$

Найдем базис $L_1 \cap L_2$

Из Def 1 $\Rightarrow \forall x \in L_1 \cap L_2 \quad x \in L_1$ и $x \in L_2$ одновременно

$$\Rightarrow x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 = y_1 \vec{b}_1 + y_2 \vec{b}_2$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - 2y_1 - y_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3y_1 - 2y_2 = 0 \\ x_1 - x_2 + y_1 - 2y_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Положим $y_2 = 1 \Rightarrow y_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_1 = 2$

$$\vec{c} = 2\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{b}_1 + \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, базис $(L_1 \cap L_2)$: $\{\vec{c}\}$

Дома: 1277, 1279, 1281, 1282, 1286, 1288, 1292, 1293, 1298, 1300, 1310, 1318, 1321.