МАТЕМАТИЧЕСКА Я ЛОГИКА

1. Операции над высказываниями.

Определение. Под высказыванием мы будем понимать любое предложение, о котором можно судить истинно оно или ложно.

Примеры высказываний:

1. «Луна спутник Земли»,
2. «Волга впадает в Каспийское море»,
3. «Косинус 60 градусов равен 0,5»,
4. «Париж столица Англии»,
5. «Угол, вписанный в окружность равен дуге, на которую он опирается»

Пример 1. Какие из приведенных ниже предложений являются высказываниями? Какие из этих высказываний истинны, а какие ложны?

1. Енисей является притоком Волги.
2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
3. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180 градусов.
4. Диагонали параллелограмма всегда являются биссектрисами его углов.

В примере 1 все 5 предложений являются высказываниями.

2-ое и 3-тье предложения – истинные высказывания,

1-ое и 4-ое предложения – ложные высказывания.

Предложения «Пейте пепси-колу», «Жуйте орбит без сахара» высказываниями не являются.

Высказывания мы будем обозначать маленькими буквами латинского алфавита: a, b, c, p, q, s и т.д.

Из высказываний, при помощи частицы «не», союзов «и», «или», слов «если-то», «тогда и только тогда, когда» могут образовываться новые высказывания.

Простейшей операцией над высказываниями является операция отрицания, которой соответствует частица *«не»*.

Отрицание высказывания p обозначается $\bar{p}$. Если высказывание p истинно, то $\bar{p}$ -ложно.

Определение. Высказывание, составленное из данных высказываний p и q при помощи союза *«и»* называется *конъюнкцией* высказываний p и q.

Обозначается $p \wedge q$.

Конъюнкция истинна только в случае, если оба высказывания p и q истинны.

Определение. Высказывание, составленное из данных высказываний p и q при помощи союза *«или»* называется *дизъюнкцией* высказываний p и q.

Обозначается $p \vee q$.

Дизъюнкция истинна , если хотя бы одно из двух высказываний p или q истинно.

Определение. Высказывание, составленное из данных высказываний p и q при помощи слов *«если…то»* называется *импликацией* высказываний p и q. Обозначается $p \to q$. При этом высказывание p называется условием, а q – заключением.

Импликация принимает значение ложно только если условие p- истинно, а заключение q- ложно. Из истинны не может следовать ложь. Если условие р – ложно, то импликация всегда принимает значение истинна, так как из лжи может следовать все, что угодно.

Определение. Высказывание, составленное из данных высказываний p и q при помощи слов *«тогда и только тогда, когда»* называется *эквиваленцией* высказываний p и q. Обозначается $p \leftrightarrow q$.

Эквиваленция принимает значение истинно если оба высказывания p и q истинны, или оба высказывания p и q – ложны.

	p	q	$p \wedge q.$
1.	Л	Л	Л
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	Л
4.	И	И	И

	p	q	$p \vee q.$
1.	Л	Л	Л
2.	Л	И	И
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

	p	q	$p \to q$
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	И
3.	И	Л	Л
4.	И	И	И

	p	q	$p \leftrightarrow q$
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	Л
4.	И	И	И

Пример 2. Составить таблицу истинности для высказывания $s = (p \wedge q) \leftrightarrow q$

	P	q	s
1.	Л	Л	
2.	Л	И	
3.	И	Л	
4.	И	И	

1. $s = (Л \wedge Л) \leftrightarrow Л = Л \leftrightarrow Л = И$
2. $s = (Л \wedge И) \leftrightarrow И = Л \leftrightarrow И = Л$
3. $s = (И \wedge Л) \leftrightarrow Л = Л \leftrightarrow Л = И$
4. $s = (И \wedge И) \leftrightarrow И = И \leftrightarrow И = И$

	P	q	s
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

Пример 3. Составить таблицу истинности для высказывания $s = (p \to q) \vee \overline{q}$

	P	q	s
1.	Л	Л	
2.	Л	И	
3.	И	Л	
4.	И	И	

1. $s = (Л \to Л) \vee И = И \vee И = И$
2. $s = (Л \to И) \vee Л = И \vee Л = И$
3. $s = (И \to Л) \vee И = Л \vee И = И$
4. $s = (И \to И) \vee Л = И \vee Л = И$

	P	q	s
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	И
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

s- тождественно истинное высказывание.

Вместо И (истинна) мы будем писать 1, вместо Л (ложь) будем писать 0.

Законы логики высказываний.

1. Закон двойного отрицания $\overline{\overline{p}} = p$
2. Закон исключения третьего $p \wedge \overline{p} = 0, \quad p \vee \overline{p} = 1$
3. Закон операций с константами $p \wedge 0 = 0 \quad p \wedge 1 = p \quad p \vee 0 = p \quad p \vee 1 = p$
4. Закон повторения $p \wedge p = p, \quad p \vee p = p$
5. Закон поглощения $p \wedge (p \vee q) = p, \quad p \vee (p \wedge q) = p$
6. Переместительный закон $p \wedge q = q \wedge p$
7. Сочетательный закон $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r, \quad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

Законы де Моргана.

1. $\overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}, \qquad$ 2. $\overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$

Докажем закон поглощения $p \wedge (p \vee q) = p$. Введем в рассмотрение высказывание $s = p \wedge (p \vee q)$. Нам нужно доказать, что в таблице истинности для данного высказыван

	P	q	s
1.	Л	Л	
2.	Л	И	
3.	И	Л	
4.	И	И	

1. $s = Л \wedge (Л \vee Л) = Л \wedge Л = Л$
2. $s = Л \wedge (Л \vee И) = Л \wedge И = Л$
3. $s = И \wedge (И \vee Л) = И \wedge И = И$
4. $s = И \wedge (И \vee И) = И \wedge И = И$

Столбец s совпадает со столбцом p

	P	q	s
1.	Л	Л	Л
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

Пример 4.

Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд – Мустанг» и не в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие каждый из них правильно указал либо только марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?