

*МАТЕМАТИЧЕСКА  
Я ЛОГИКА*

# 1. Операции над высказываниями.

**Определение.** Под высказыванием мы будем понимать любое предложение, о котором можно судить истинно оно или ложно.

**Примеры высказываний:**

1. «Луна спутник Земли»,
2. «Волга впадает в Каспийское море»,
3. «Косинус 60 градусов равен 0,5»,
4. «Париж столица Англии»,
5. «Угол, вписанный в окружность равен дуге, на которую он опирается»

**Пример 1.** Какие из приведенных ниже предложений являются высказываниями? Какие из этих высказываний истинны, а какие ложны?

1. Енисей является притоком Волги.
2. Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.
3. Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда суммы его противоположных углов равны 180 градусов.
4. Диагонали параллелограмма всегда являются биссектрисами его углов.

В примере 1 все 5 предложений являются высказываниями.

2-ое и 3-ье предложения – истинные высказывания,

1-ое и 4-ое предложения – ложные высказывания.

Предложения «Пейте пепси-колу», «Жуйте орбит без сахара» высказываниями не являются.

Высказывания мы будем обозначать маленькими буквами латинского алфавита:  $a, b, c, p, q, s$  и т.д.

*Из высказываний, при помощи частицы «не», союзов «и», «или», слов «если-то», «тогда и только тогда, когда» могут образовываться новые высказывания.*

Простейшей операцией над высказываниями является операция отрицания, которой соответствует частица «не».

Отрицание высказывания  $p$  обозначается  $\neg p$ . Если высказывание  $p$  истинно, то  $\neg p$  - ложно.

**Определение.** Высказывание, составленное из данных высказываний  $p$  и  $q$  при помощи союза «и» называется *конъюнкцией* высказываний  $p$  и  $q$ .

Обозначается  $p \wedge q$ .

Конъюнкция истинна только в случае, если оба высказывания  $p$  и  $q$  истинны.

**Определение.** Высказывание, составленное из данных высказываний  $p$  и  $q$  при помощи союза «или» называется *дизъюнкцией* высказываний  $p$  и  $q$ .

Обозначается

Дизъюнкция истинна, если хотя бы одно из двух высказываний  $p$  или  $q$  истинно.

**Определение.** Высказывание, составленное из данных высказываний  $p$  и  $q$  при помощи слов «если...то» называется *импликацией* высказываний  $p$  и  $q$ .

Обозначается  $p \rightarrow q$ . При этом высказывание  $p$  называется условием, а  $q$  – заключением.

Импликация принимает значение ложно только если условие  $p$  истинно, а заключение  $q$  ложно. Из истинны не может следовать ложь. Если условие  $p$  ложно, то импликация всегда принимает значение истинна, так как из лжи может следовать все, что угодно.

**Определение.** Высказывание, составленное из данных высказываний  $p$  и  $q$  при помощи слов «тогда и только тогда, когда» называется *эквиваленцией* высказываний  $p$  и  $q$ . Обозначается  $p \leftrightarrow q$ .

Эквиваленция принимает значение истинно если оба высказывания  $p$  и  $q$  истинны, или оба высказывания  $p$  и  $q$  – ложны.

	$p$	$q$	$p \wedge q$
1.	Л	Л	Л
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	Л
4.	И	И	И

	$p$	$q$	$p \vee q$
1.	Л	Л	Л
2.	Л	И	И
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

	$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	И
3.	И	Л	Л
4.	И	И	И

	$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	Л
4.	И	И	И

**Пример 2.** Составить таблицу истинности для высказывания  $(p \wedge q) \leftrightarrow q$

	$P$	$q$	$s$
1.	Л	Л	
2.	Л	И	
3.	И	Л	
4.	И	И	

1.  $s = (Л \wedge Л) \leftrightarrow Л = Л \leftrightarrow Л = И$

2.  $s = (Л \wedge И) \leftrightarrow И = Л \leftrightarrow И = Л$

3.  $s = (И \wedge Л) \leftrightarrow Л = Л \leftrightarrow Л = И$

4.  $s = (И \wedge И) \leftrightarrow И = И \leftrightarrow И = И$

	$P$	$q$	$s$
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

**Пример 3.** Составить таблицу истинности для высказывания  $(p \rightarrow q) \vee \bar{q}$

	$P$	$q$	$s$
1.	Л	Л	
2.	Л	И	
3.	И	Л	
4.	И	И	

1.  $s = (Л \rightarrow Л) \vee И = И \vee И = И$

2.  $s = (Л \rightarrow И) \vee Л = И \vee Л = И$

3.  $s = (И \rightarrow Л) \vee И = Л \vee И = И$

4.  $s = (И \rightarrow И) \vee Л = И \vee Л = И$

	$P$	$q$	$s$
1.	Л	Л	И
2.	Л	И	И
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

$s$ - ТОЖДЕСТВЕННО ИСТИННОЕ ВЫСКАЗЫВАНИЕ.



Вместо И (истинна) мы будем писать 1, вместо Л (ложь) будем писать 0.

### *Законы логики высказываний.*

1. Закон двойного отрицания  $\overline{\overline{p}} = p$
2. Закон исключения третьего  $p \wedge \overline{p} = 0, \quad p \vee \overline{p} = 1$
3. Закон операций с константами  $p \wedge 0 = 0 \quad p \wedge 1 = p \quad p \vee 0 = p \quad p \vee 1 = p$
4. Закон повторения  $p \wedge p = p, \quad p \vee p = p$
5. Закон поглощения  $p \wedge (p \vee q) = p, \quad p \vee (p \wedge q) = p$
6. Переместительный закон  $p \wedge q = q \wedge p$
7. Сочетательный закон  $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r, \quad p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$

### *Законы де Моргана.*

$$1. \overline{p \wedge q} = \overline{p} \vee \overline{q}, \quad 2. \overline{p \vee q} = \overline{p} \wedge \overline{q}$$

Докажем закон поглощения  $p \wedge (p \vee q) = p$ .

Введем в рассмотрение

высказывание  $q$

. Нам нужно доказать, что в таблице истинности для данного

высказывания

	$P$	$q$	$s$
1.	Л	Л	
2.	Л	И	
3.	И	Л	
4.	И	И	

$$s = Л \wedge (Л \vee Л) = Л \wedge Л = Л$$

1.  $s = Л \wedge (Л \vee И) = Л \wedge И = Л$

2.  $s = И \wedge (И \vee Л) = И \wedge И = И$

3.  $s = И \wedge (И \vee И) = И \wedge И = И$

4.  $s = И \wedge (И \vee И) = И \wedge И = И$

Столбец  $s$  совпадает со столбцом  $p$

	$P$	$q$	$s$
1.	Л	Л	Л
2.	Л	И	Л
3.	И	Л	И
4.	И	И	И

## Пример 4.

*Брауну, Джонсу и Смиту предъявлено обвинение в соучастии в ограблении банка. Похитители скрылись на поджидавшем их автомобиле. На следствии Браун показал, что преступники были на синем «Бьюике», Джонс сказал, что это был черный «Крайслер», а Смит утверждал, что это был «Форд – Мустанг» и не в коем случае не синий. Стало известно, что желая запутать следствие каждый из них правильно указал либо только марку машины, либо ее цвет. Какого цвета был автомобиль и какой марки?*