

**ФОРМУЛА БЕРНУЛЛИ И ЕЕ СЛЕДСТВИЯ.
ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РЕАЛЬНЫХ ЯВЛЕНИЙ
И ПРОЦЕССОВ**

Преподаватель: Нургалиева
А.К.

В ходе испытания фиксируется появление некоторого случайного события A , вероятность появления которого $P(A)$ не зависит от результатов предыдущих испытаний и остается неизменной ($P(A) = \text{const}$) при повторении опыта. Такие испытания называются *независимыми*, а схема проведения испытаний носит название *схемы Бернулли*.

Событие, противоположное событию A , обозначается \bar{A} и значение суммы вероятностей противоположных событий равно единице, т. е. $p + q = 1$, где $p = P(A)$, $q = P(\bar{A})$.

Теорема Бернулли. Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна, то вероятность наступления события A k раз в данных испытаниях вычисляется по формуле $P_{n,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где:

$P_{n,k}(A)$ — вероятность наступления события A k раз в n независимых испытаниях;

C_n^k — число сочетаний из n элементов по k элементов;

p — вероятность события A ;

q — вероятность события \bar{A} .

ЗАПОМНИТЕ

$P_{n,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ — формула Бернулли.

$P_{n,k}(A)$ — вероятность наступления события A k раз в n независимых испытаниях;

C_n^k — число сочетаний из n элементов по k элементов;

p — вероятность события A ;

q — вероятность события \bar{A} .

ЗАПОМНИТЕ

$P_{n,k}(A) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ — формула Бернулли.

ПРИМЕР

1. Вероятность p события A равна 0,8. Вычислим вероятность появления события A два раза в пяти независимых испытаниях.

Решение. По условию $n = 5$ и $k = 2$, а вероятность $p = 0,8$. Тогда вероятность события \bar{A} равна: $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$.

Используя формулу Бернулли, найдем искомую вероятность:

$$P_{5,2}(A) = C_5^2 \cdot (0,8)^2 \cdot (0,2)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot (0,8)^2 \cdot 0,008 = \frac{3! \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3!} \cdot 0,64 \cdot 0,008 = 0,0512.$$

Ответ: 0,0512.

Следствия формулы Бернулли

1. Вероятность того, что в серии из n опытов событие A появится хотя бы один раз, вычисляется по формуле: $P_n(m \geq 1) = 1 - q^n$.

2. Вероятность того, что в серии из n опытов событие A появится не менее k раз (k и больше), находится по формуле:

$$P_n(m \geq k) = \begin{cases} \sum_{m=k}^n P_n(m), & k > \frac{n}{2}, \\ 1 - \sum_{m=0}^{k-1} P_n(m), & k < \frac{n}{2}. \end{cases}$$

ПРИМЕР

2. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее 8 машин, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждой машины на линию равна 0,1. Найдем вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

Решение. Автобаза будет работать нормально (событие D), если на линию выйдет или 8 (событие A), или 9 (событие B), или все 10 (событие C) автомашин.

По теореме сложения вероятностей $P(D) = P(A) + P(B) + P(C) = P_{10}(8) + P_{10}(9) + P_{10}(10)$. Каждое слагаемое найдем по формуле Бернулли. Поскольку вероятность невыхода каждой автомашины на линию равна 0,1, то вероятность выхода автомашины на линию будет равна 0,9, т. е. $p = 0,9$, $q = 0,1$. Из условия следует, что $n = 10$, $m = 8, 9, 10$.

Следовательно, $P(D) = P_{10}(m \geq 8) = C_{10}^8 \cdot (0,9)^8 \cdot (0,1)^2 + C_{10}^9 \cdot (0,9)^9 \cdot (0,1)^1 + C_{10}^{10} \cdot (0,9)^{10} \cdot (0,1)^0 \approx 0,1937 + 0,3874 + 0,3487 = 0,9298$.

Ответ: 0,9298.

3. Вероятность того, что в серии из n опытов событие A появится не более k раз (k и меньше), находится по формуле: $P_n(m \leq k) = \sum_{m=0}^k P_n(m)$.

4. Число наступлений события A называется *наивероятнейшим*, если оно имеет наибольшую вероятность по сравнению с вероятностями наступления события A любое другое количество раз. Наивероятнейшее число m^* наступлений события A в n испытаниях заключено между числами $np - q$ и $np + p$ ($np - q \leq m^* \leq np + p$).

ПРИМЕР

3. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,8. Найдите наиболее вероятное число попаданий в мишень при 5 выстрелах и соответствующую этому числу вероятность.

Решение. Воспользуемся неравенством $np - q \leq m^* \leq np + p$.

Поскольку $np - q = 5 \cdot 0,8 - 0,2 = 3,8$, $np + p = 5 \cdot 0,8 + 0,8 = 4,8$, то $m^* = 4$. Вероятность искомого события A находим по формуле Бернулли:

$$P_{5,4}(A) = C_5^4 (0,8)^4 \cdot 0,2 = 0,4096.$$

Ответ: 0,4096.

Домашнее задание: Краткий конспект
Выписать определение и формулу. Решить задачи №29.1 №29.2

Упражнения

- 29.1.** В коробке находится 6 одинаковых пронумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найдите вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.
- 29.2.** В коробке находятся 3 шара синего цвета и 2 шара красного. Извлекаются два шара. Найдите вероятность того, что среди двух извлеченных шаров окажется:
- 1) один шар синего цвета;
 - 2) два шара синего цвета;
 - 3) хотя бы один шар синего цвета.