Дюжина задач на параметры

Задачи из сборника «30 задач, ЕГЭ-2019» и других источников, а также специально составленные задачи

Шевкин А. В., Заслуженный учитель РФ.
avshevkin@mail.ru   www.shevkin.ru

Выражаю сердечную благодарность учителям математики Назарову М.Г. за помощь в подготовке презентации, Пукасу Ю.О. за исправление ошибки.

Сборник «30 задач, ЕГЭ-2019». Вариант 12

1. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$ больше 1.

Решение. Переформулируем задачу. Найдём все значения a, при каждом из которых неравенство

$$|x^2 - 8x + 15| > 1 - 2ax \qquad (1)$$

выполняется при любом значении a. Обозначим $b = -2a$.

Перепишем неравенство (1) в виде:

$$|x^2 - 8x + 15| > 1 + bx \qquad (2)$$

Строим в одной системе координат графики функций:

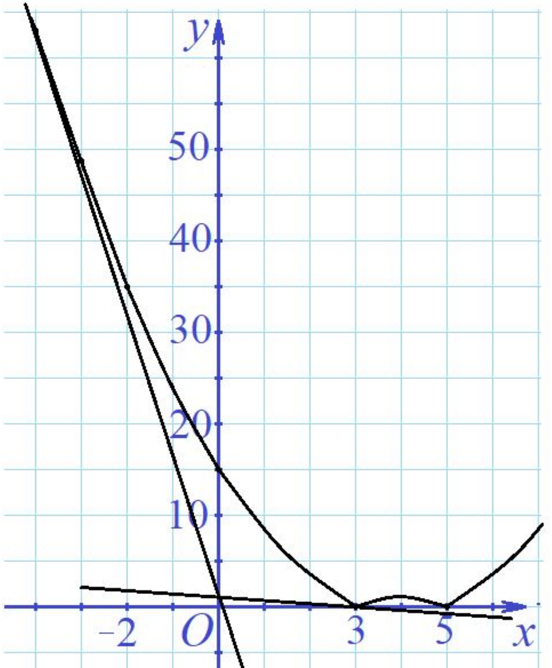
1) $y = |x^2 - 8x + 15|$ и 2) $y = 1 + bx$.

Графический способ

1. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$ больше 1.

…Неравенство (2) выполняется при любых значениях x при тех значениях b, при которых все точки графика функции 1) находятся выше соответствующих точек прямой 2).

Верхняя граница значений b соответствует прямой $y = 1 + bx$, проходящей через точки (0; 1) и (3; 0), т. е. $b = -\frac{1}{3}$. При больших значениях b прямая пересекает более чем в одной точке.



Графический способ

1. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$ больше 1.

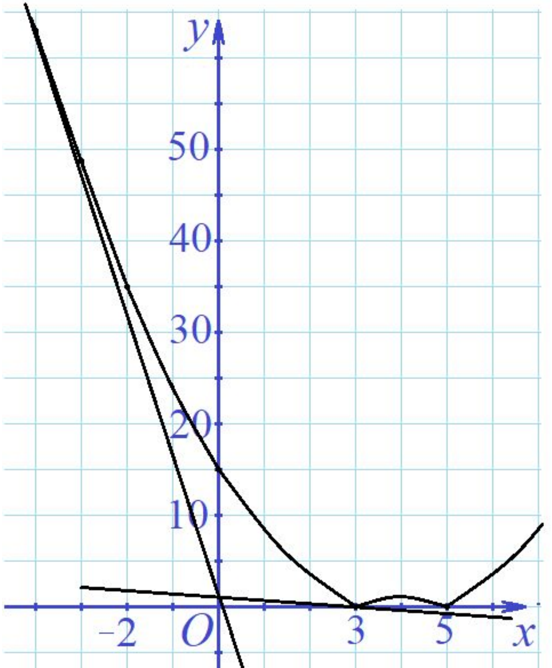
…Нижнюю границу значений b найдём из условия, что прямая $y = 1 + bx$ и парабола $y = x^2 - 8x + 15$ пересекаются в одной точке.

Уравнение

$$x^2 - 8x + 15 = 1 + bx$$

имеет единственный корень при $b = -8 - 2\sqrt{14}$ и $b = -8 + 2\sqrt{14}$.

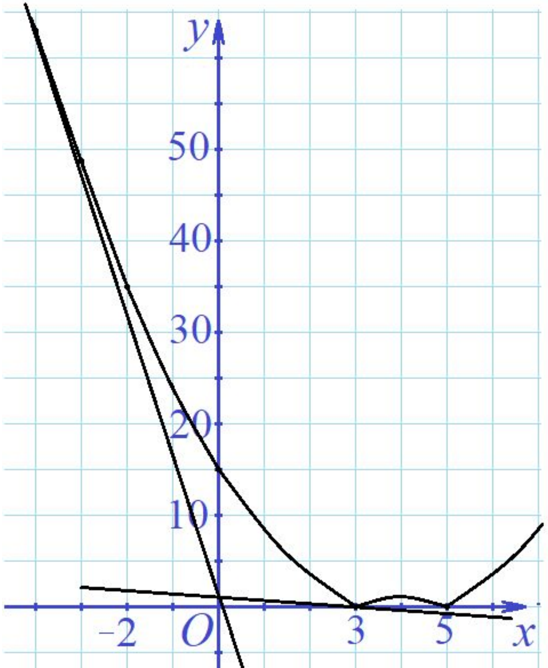
Первое из этих значений соответствует изображённому на рисунке случаю.



Графический способ

1. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $y = 2ax + |x^2 - 8x + 15|$ больше 1.

…Итак, графики функции 1) и прямой 2) имеют единственную общую точку при $b = -\frac{1}{3}$ и при $b = -8 - 2\sqrt{14}$, не имеют общих точек, т. е. график функции 1) находится выше прямой 2) и неравенство (2) выполняется для любого значения x при $-8 + 2\sqrt{14} < b < -\frac{1}{3}$. Откуда следует, что $-8 + 2\sqrt{14} < -2a < -\frac{1}{3}$, т. е. $\frac{1}{6} < a < 4 + \sqrt{14}$.



Досрочный экзамен. Резерв. 10.04.2019

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3\sin x - \cos x = a \qquad (1)$$

имеет ровно 1 корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Разделим уравнение (1) на $\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{10}}\cos x = \frac{a}{\sqrt{10}}. \qquad (2)$$

В первой четверти существует число t, такое, что $\sin t = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos t = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Вспомогательный угол

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

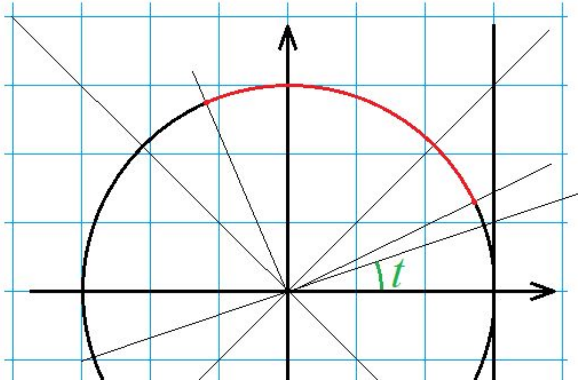
$$3\sin x - \cos x = a \qquad (1)$$

имеет ровно 1 корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

Решение. Разделим уравнение (1) на $\sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$:

$$\frac{3}{\sqrt{10}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{10}}\cos x = \frac{a}{\sqrt{10}}. \qquad (2)$$

В первой четверти существует число t, такое, что $\sin t = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos t = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Тогда $\operatorname{tg} t = \frac{1}{3}$ и из $\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$ следует, что $\frac{\pi}{4} - t \le x - t \le \frac{3\pi}{4} - t$.



Вспомогательный угол

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3\sin x - \cos x = a \qquad (1)$$

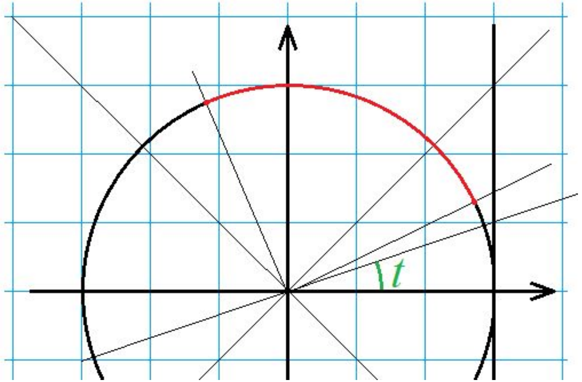
имеет ровно 1 корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

… Причём $\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} - t < \frac{3\pi}{4}$, а $0 < \frac{\pi}{4} - t < \frac{\pi}{4}$ (см. рис.).

Перепишем уравнение (2) в виде:

$$\sin(x - t) = \frac{a}{\sqrt{10}}. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет ровно 1 корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$, если: $\frac{a}{\sqrt{10}} = 1$, т. е. $a = \sqrt{10}$.



Вспомогательный угол

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$3\sin x - \cos x = a \qquad (1)$$

имеет ровно 1 корень на отрезке $\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{3\pi}{4}\right]$.

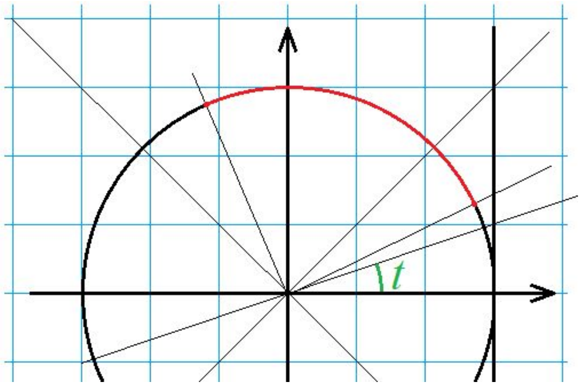
…Или если

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right) \le \sin(x - t) < \sin\left(\frac{3\pi}{4} - t\right),$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}} \le \frac{a}{\sqrt{10}} < \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}},$$

$$\sqrt{2} \le a < 2\sqrt{2}.$$

Ответ. $\sqrt{2} \le a < 2\sqrt{2}$, $a = \sqrt{10}$.



Замена неизвестного

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\lg^2(2x^2 - 4x + 3) + (3a^2 + 5a + 7) \cdot \lg\,(2x^2 - 4x + 3) - 2a + 3 = 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы 1 корень.

Решение. Заметим, что $2x^2 - 4x + 3 = 2(x-1)^2 + 1 \geq 1$, значит, $t = \lg\,(2x^2 - 4x + 3) \geq 0$; $3a^2 + 5a + 7 > 0$.

Замена неизвестного

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\lg^2(2x^2-4x+3)+(3a^2+5a+7)\cdot\lg(2x^2-4x+3)-$$
$$-2a+3=0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы 1 корень.

Решение. Заметим, что $2x^2-4x+3=2(x-1)^2+1\geq 1$, значит, $t=\lg(2x^2-4x+3)\geq 0$; $3a^2+5a+7>0$.

Перепишем уравнение (1) в виде

$$t^2+(3a^2+5a+7)t-2a+3=0 \qquad (2)$$

Задача свелась к отысканию всех значений a, таких, что уравнение (2) имеет хотя бы один неотрицательный корень.

Замена неизвестного

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\lg^2(2x^2 - 4x + 3) + (3a^2 + 5a + 7) \cdot \lg(2x^2 - 4x + 3) -$$
$$- 2a + 3 = 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы 1 корень.

…Если $-2a + 3 = 0$, т. е. если $a = 1{,}5$, то уравнение (2) имеет вид:

$$t^2 + (3a^2 + 5a + 7)t = 0,$$
$$t(t + 3a^2 + 5a + 7) = 0. \qquad (3)$$

Уравнение (3) имеет единственный корень $t_1 = 0$. Значит, $a = 1{,}5$ удовлетворяет условиям задачи (уравнение (1) имеет корень $x_1 = 1$.

Замена неизвестного

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\lg^2(2x^2-4x+3)+(3a^2+5a+7)\cdot\lg(2x^2-4x+3)-$$
$$-2a+3=0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы 1 корень.

…Если $-2a+3>0$, т. е. если $a<1{,}5$, то уравнение (2) не имеет корней, так как его левая часть положительна, а правая – нуль.

Если $-2a+3<0$, т. е. если $a>1{,}5$, то квадратичная функция $f(t)=t^2+(3a^2+5a+7)t-2a+3$ в точке $t=0$ принимает отрицательное значение, а так как коэффициент при t^2 положительный, то функция имеет два нуля t_1 и t_2 разных знаков.

Замена неизвестного

3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\lg^2(2x^2 - 4x + 3) + (3a^2 + 5a + 7) \cdot \lg\,(2x^2 - 4x + 3) - 2a + 3 = 0 \qquad (1)$$

имеет хотя бы 1 корень.

…Это означает, что при $t > 1{,}5$ уравнение (2) имеет положительный корень, тогда и уравнение (1) имеет корень, т. е. все $a > 1{,}5$ удовлетворяют условиям задачи.

Объединив все найденные значения a, имеем: $a \geq 1{,}5$.

Ответ. $a \geq 1{,}5$.

Графический способ

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (1)$$

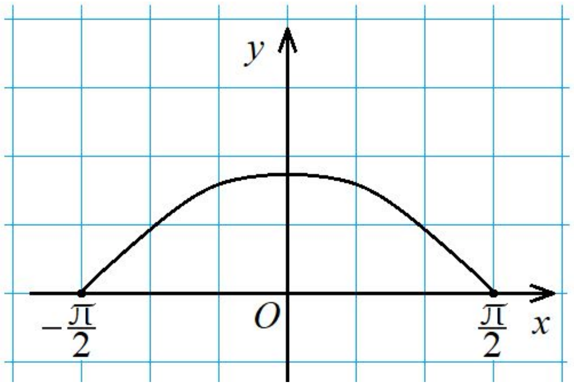
имеет единственный корень.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$x^2 + a^2 = 2a\sin(\cos x) \qquad (2)$$

Все значения функции $y = x^2 + a^2$ неотрицательны. График – парабола, ветви которой направлены вверх.

На промежутке $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ функция $y = \sin(\cos x)$ достигает наибольшего значения $\sin 1$ в точке $x = 0$.



Графический способ

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственный корень.

…При $a < 0$ значения функции $y = 2a\sin(\cos x)$ отрицательны на промежутке $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, её график не имеет общих точек с параболой.

При $a = 0$ уравнение (1) имеет единственный корень $x = 0$.

При $a > 0$ уравнение (1) имеет единственный корень при условии, что $0^2 + a^2 = 2a\sin(\cos 0)$, т. е. при $a = 2\sin 1$.

Графический способ

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0 \qquad (1)$$

имеет единственный корень.

…Осталось убедиться, что при $a = 0$ и при $a = 2\sin 1$ уравнение (1) не имеет других решений.

При $a = 0$ это очевидно, а при $a = 2\sin 1$ уравнение (1) можно записать в виде

$$x^2 = 4\sin 1\,(\sin(\cos x) - \sin 1).$$

При $x = 0$ равенство верно, при $x \neq 0$ – нет, т. к.. правая часть уравнения отрицательна, а левая положительна.

Ответ. $a = 0$, $a = 2\sin 1$.

Метод *xOa*

5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\log_{x+1}(x^2 + ax) = 1 \qquad (1)$$

имеет единственный корень.

Решение. Уравнение (1) имеет единственный корень при таком значении a, при котором система

$$\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 1 \\ x^2 + ax > 0 \\ x^2 + ax = x + 1. \end{cases}$$

имеет единственное решение x.

Метод *xOa*

…Уравнение системы

$$x^2 + ax = x + 1 \qquad (2)$$

имеет два корня при любом значении *a*, значит, нужно найти, при каких значениях *a* один корень уравнения удовлетворяет ограничениям: $x > -1$, $x \neq 0$, $x^2 + ax > 0$, а другой – нет.

Но это долгая история. Мы пойдём другим путём.

Рассмотрим уравнение (2) с двумя неизвестными. Будем изображать его решения $(x;\, a)$ точками $(x;\, a)$ в системе координат *xOa* – отсюда и название метода.

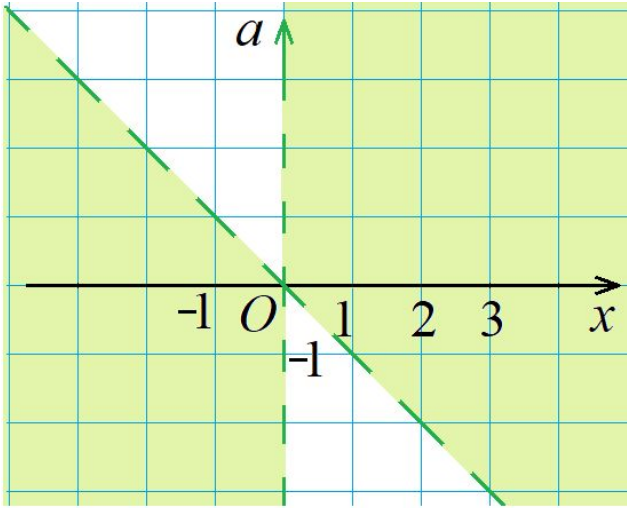
Метод xOa

…Начнём с ограничения $x^2 + ax > 0$, которое запишем в виде

$$x(x + a) > 0. \qquad (3)$$

Левая часть неравенства (3) обращается в нуль для каждой пары чисел $(x; a)$, если $x = 0$ или $a = -x$. Все такие точки лежат на пунктирных прямых, координаты этих точек не удовлетворяют неравенству (3).

Все точки $(x; a)$, координаты которых удовлетворяют неравенству (3), лежат в закрашенных областях. Надо найти все значения a, при каждом из которых одно решение $(x; a)$ уравнения (2) принадлежит закрашенной области, другое – нет.

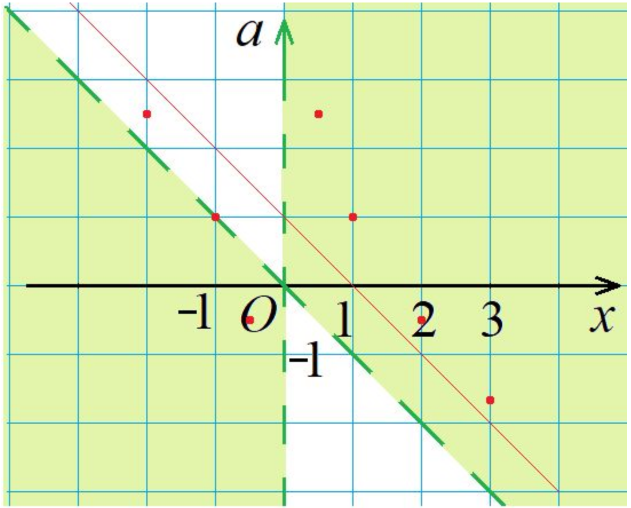


Метод *xOa*

…Так как $x \neq 0$, то перепишем уравнение (2) в виде

$$a = -x + 1 + \frac{1}{x}. \qquad (4)$$

Построим график функции (4), применяя метод «сложения» графиков для функций $a = -x + 1$ и $a = \frac{1}{x}$.



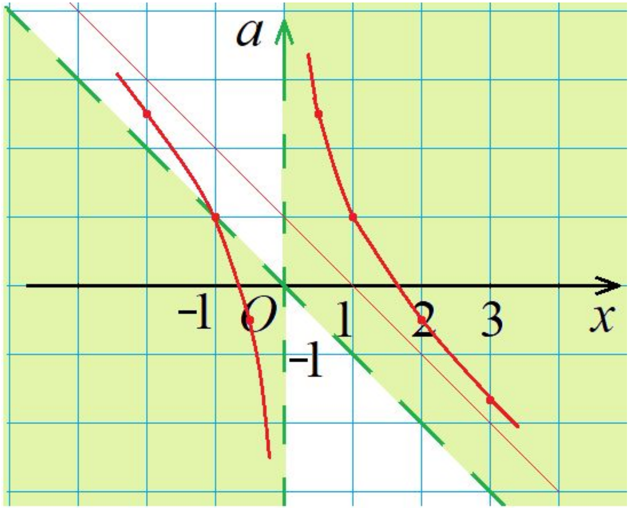
Метод *xOa*

…Так как $x \neq 0$, то перепишем уравнение (2) в виде

$$a = -x + 1 + \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Построим график функции (4), применяя метод «сложения» графиков для функций $a = -x + 1$ и $a = \frac{1}{x}$.

Получим две «ветви» графика.



Метод *xOa*

…Так как $x \neq 0$, то перепишем уравнение (2) в виде

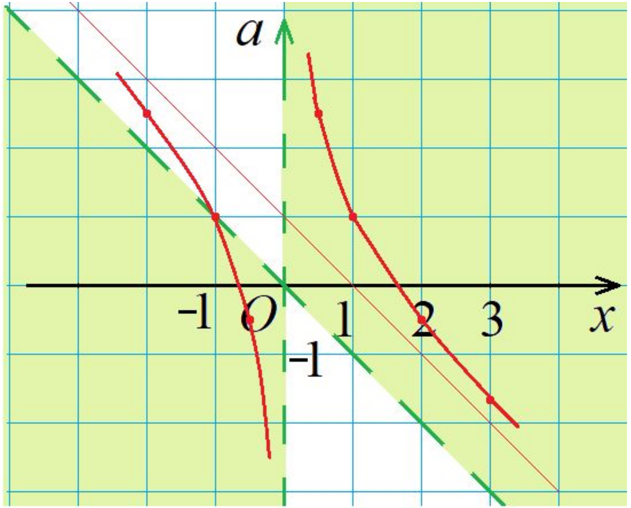
$$a = -x + 1 + \frac{1}{x}. \tag{4}$$

Построим график функции (4), применяя метод «сложения» графиков для функций $a = -x + 1$ и $a = \frac{1}{x}$.

Получим две «ветви» графика.

Нашим ограничениям удовлетворяют лишь точки графика функции (4), лежащие в закрашенной области. Уравнение (1) имеет единственный корень лишь при $a \geq 1$.

Ответ. $a \geq 1$.



Метод областей

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

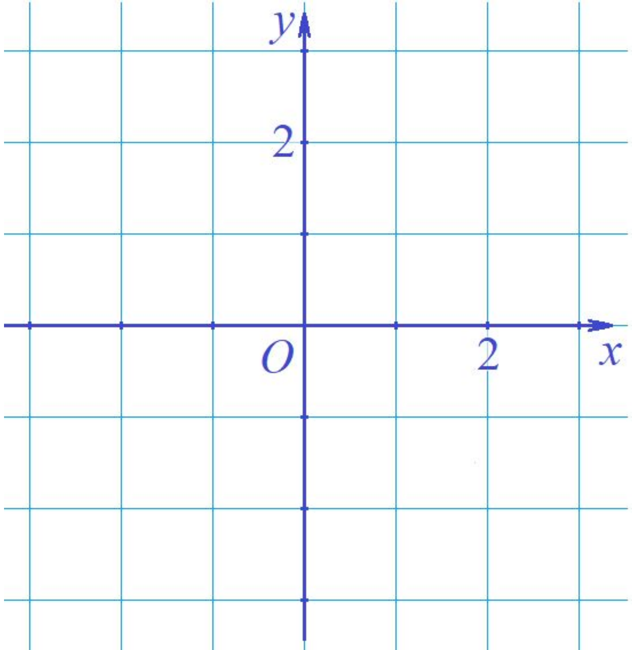
$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2x^2 & (1) \\ 2y-x=2a & (2) \end{cases}$$

имеет три решения.

Решение. Построим в системе координат xOy фигуру $\boldsymbol{F}$, заданную уравнением (1).

$|x-y|=0$, если $y=x$;

$|x+y|=0$, если $y=-x$.



Метод областей

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2x^2 & (1) \\ 2y-x=2a & (2) \end{cases}$$

имеет три решения.

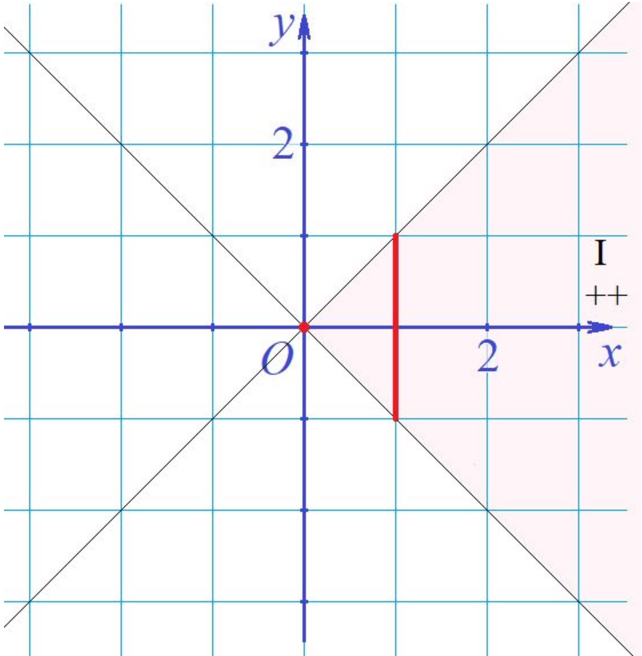
…Прямые $y=x$ и $y=-x$ разбивают плоскость на 4 области.

В области I уравнение (1) имеет вид:

$$x-y+x+y=2x^2,$$

$$x(x-1)=0,$$

$x=0$, $x=1$, y – любое число.



Метод областей

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x - y| + |x + y| = 2x^2 & (1) \\ 2y - x = 2a & (2) \end{cases}$$

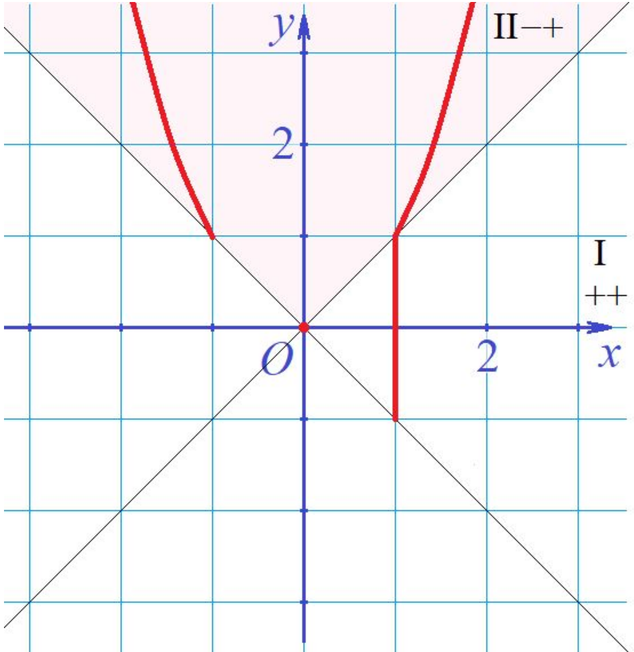
имеет три решения.

…В области II уравнение (1) имеет вид:

$$-x + y + x + y = 2x^2,$$

$$y = x^2.$$

Дальше можно рассмотреть области III и IV…



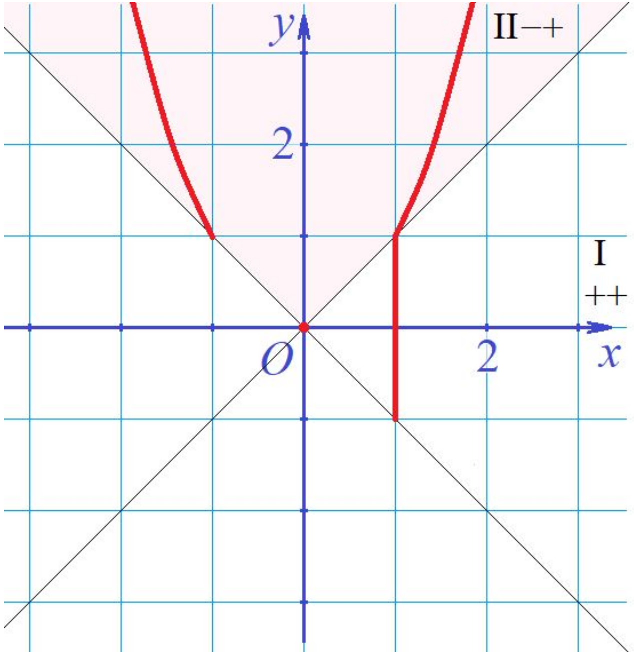
Метод областей

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2x^2 & (1) \\ 2y-x=2a & (2) \end{cases}$$

имеет три решения.

…Заметим, что вместе с точкой $(x; y)$ фигуре $\boldsymbol{F}$ принадлежит и точка $(-x; -y)$.



Метод областей

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

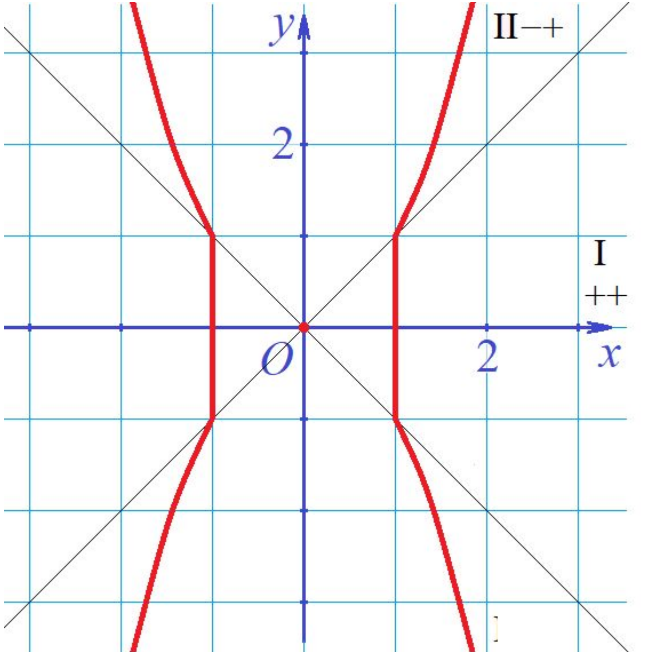
$$\begin{cases} |x-y|+|x+y|=2x^2 & (1) \\ 2y-x=2a & (2) \end{cases}$$

имеет три решения.

…Заметим, что вместе с точкой $(x; y)$ фигуре $\boldsymbol{F}$ принадлежит и точка $(-x; -y)$.

То есть фигура $\boldsymbol{F}$ симметрична относительно начала координат.

Уравнение (2) задаёт прямую $y = 0{,}5x + a$.

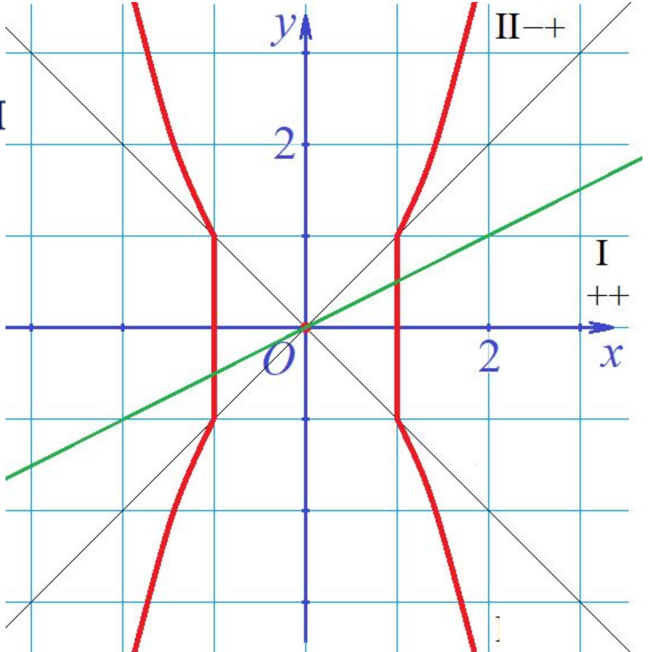


Метод областей

6. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x-y| + |x+y| = 2x^2 & (1) \\ 2y - x = 2a & (2) \end{cases}$$

имеет три решения.



…При $a = 0$ прямая $y = 0{,}5x + a$ пересекает фигуру ***F*** в трёх точках. Система имеет три решения.

При $a \neq 0$ прямая $y = 0{,}5x + a$ пересекает фигуру ***F*** в двух точках. Система имеет два решения.

Ответ. $a = 0$.

Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение. Построим в системе координат xOy фигуру ***F***, заданную уравнением (1). Модули обращаются в нуль при $x = 0$, $x = 2$ и $y = 0$, $y = 2$ соответственно.

Метод областей

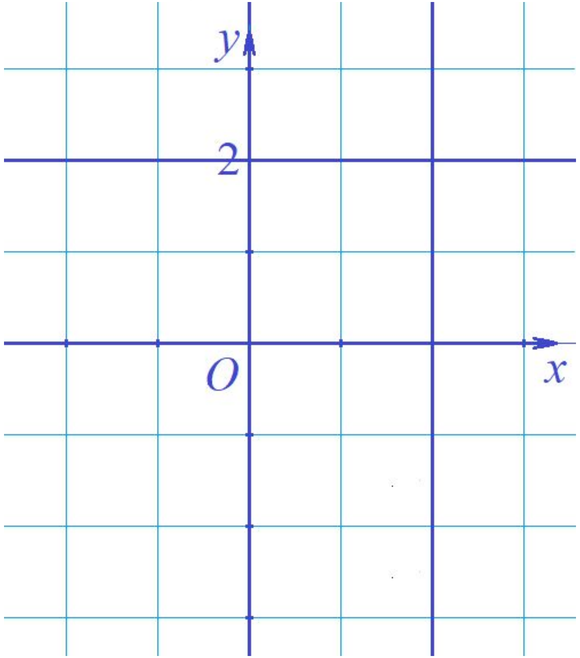
7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение. Построим в системе координат xOy фигуру $\boldsymbol{F}$, заданную уравнением (1). Модули обращаются в нуль при $x = 0$, $x = 2$ и $y = 0$, $y = 2$ соответственно.

Эти четыре прямые разбивают плоскость на 9 областей.



Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

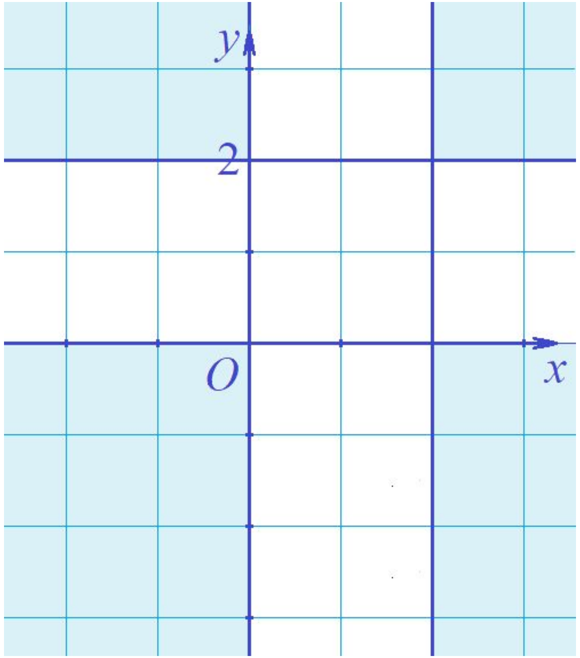
$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…В каждой из закрашенных областей оба модуля раскроем со знаком «+», уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 + x^2 - 2x = y^2 + y^2 - 2y,$$

$$(y - x)(y + x - 1) = 0.$$



Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

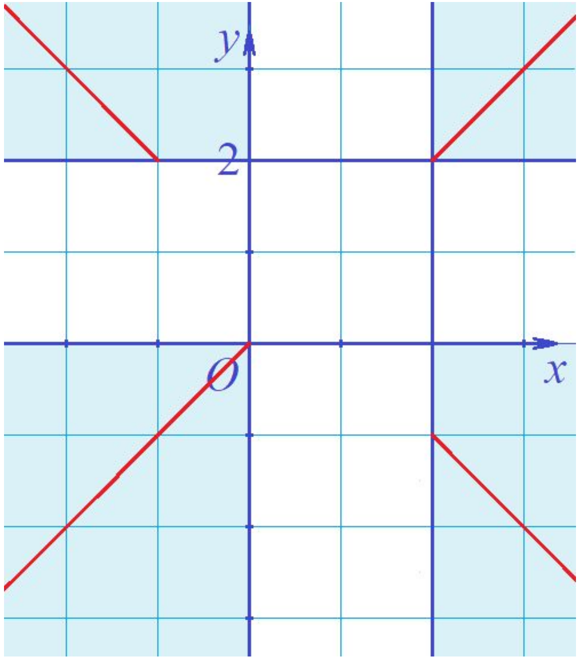
имеет более двух решений.

…В каждой из закрашенных областей оба модуля раскроем со знаком «+», уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 + x^2 - 2x = y^2 + y^2 - 2y,$$

$$(y - x)(y + x - 1) = 0.$$

Все решения этого уравнения изобразим точками прямых $y = x$ и $y = -x + 1$.



Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

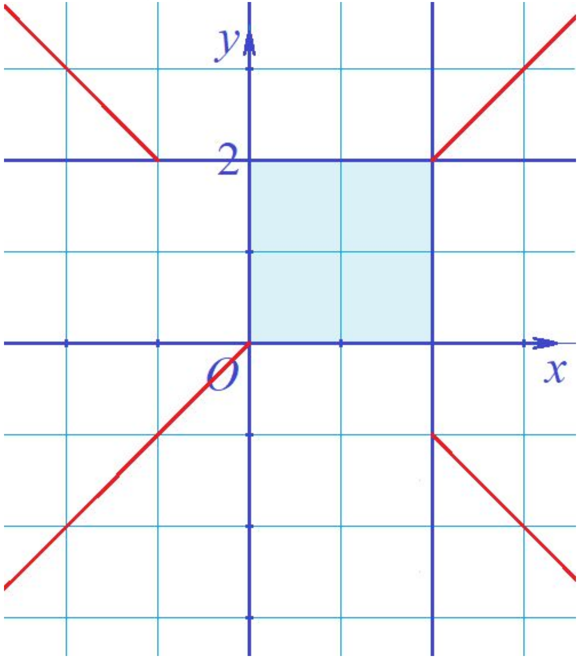
$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…Внутри центральной области оба модуля раскроем со знаком «−», уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 - x^2 + 2x = y^2 - y^2 + 2y,$$

$$y = x.$$



Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

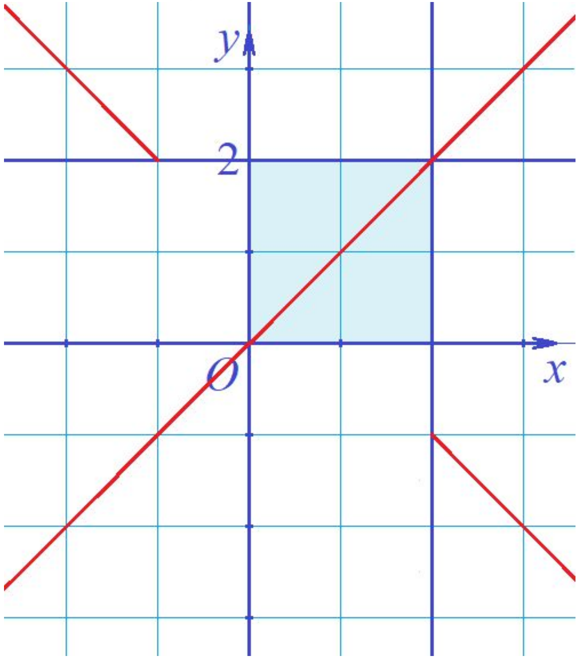
имеет более двух решений.

…Внутри центральной области оба модуля раскроем со знаком «−», уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 - x^2 + 2x = y^2 - y^2 + 2y,$$

$$y = x.$$

Все решения этого уравнения изобразим точками прямой $y = x$.



Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

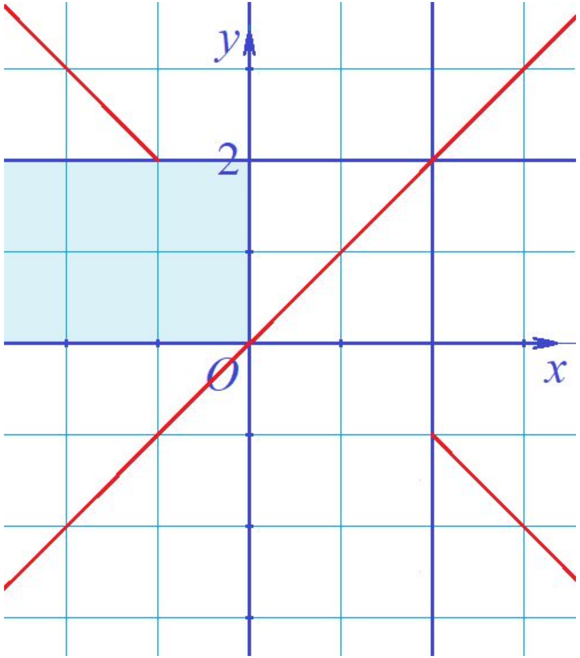
$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…Теперь рассмотрим одну область (выделена цветом). Первый модуль раскроем со знаком «+», второй – со знаком «–», уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 + x^2 - 2x = y^2 - y^2 + 2y,$$

$$y = x^2 - x.$$



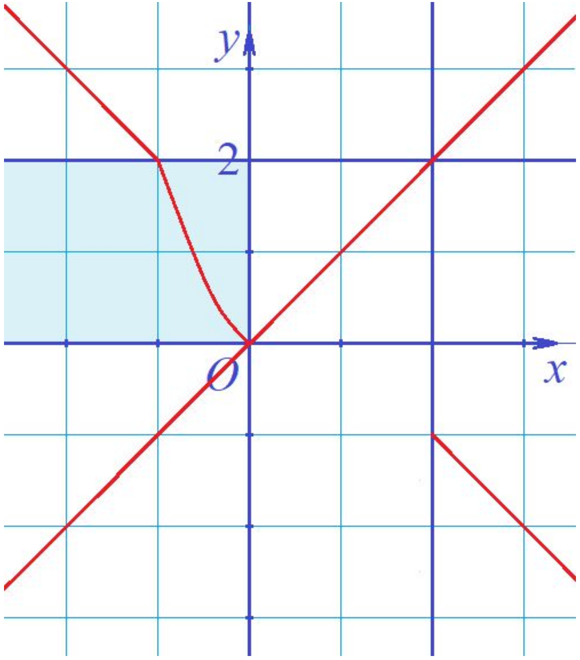
Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…Точки фигуры ***F*** принадлежат параболе $y = x^2 - x$.



Метод областей

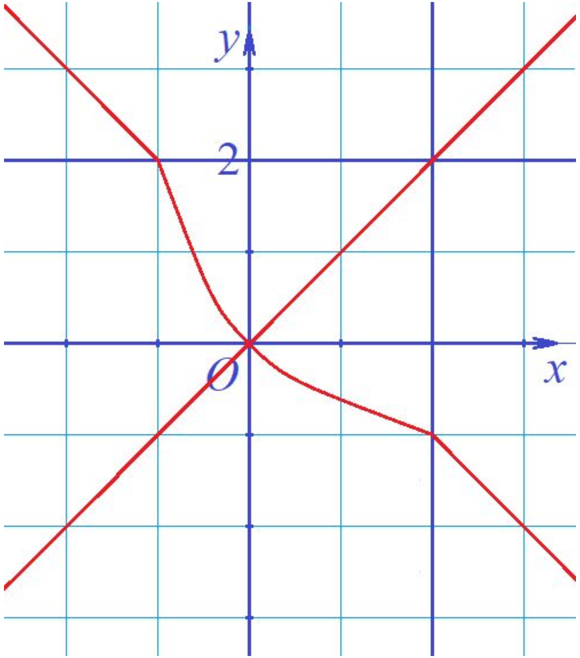
7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…Точки фигуры F принадлежат параболе $y = x^2 - x$.

Вместе решением $(x; y)$ уравнению (1) удовлетворяет пара чисел $(y; x)$, поэтому фигура F симметрична относительно прямой $y = x$.



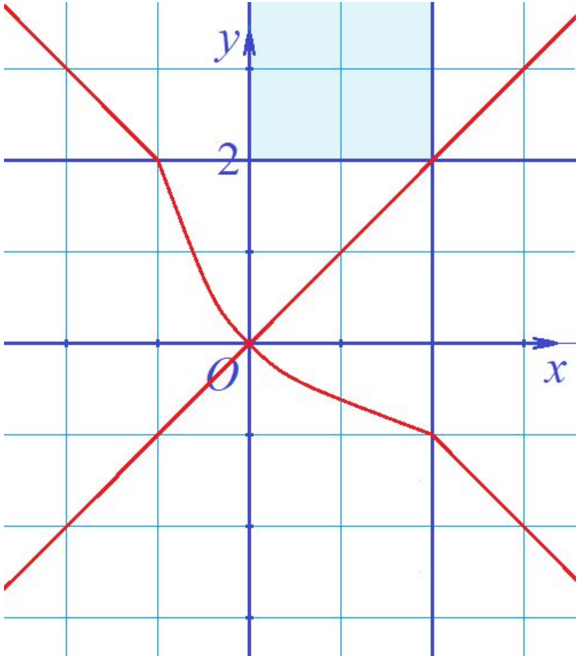
Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…В закрашенной области первый модуль раскроем со знаком «−», второй − со знаком «+». Уравнение (1) приводим к виду: $x = y^2 - y$. Часть этой параболы построена ниже оси x. В закрашенной области и в области, ей симметричной относительно оси $y = x$ точек фигуры $\boldsymbol{F}$ нет.



Метод областей

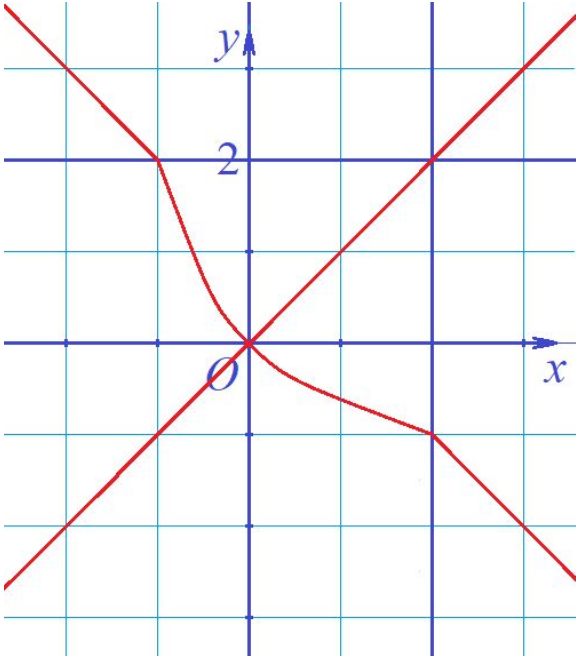
7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…Уравнение (2) задаёт прямую $y = -x + a$, положение которой зависит от параметра a.

При $a \leq 0$ и при $a > 1$ прямая $y = -x + a$ пересекает фигуру F в единственной точке. Система имеет единственное решение.



Метод областей

7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

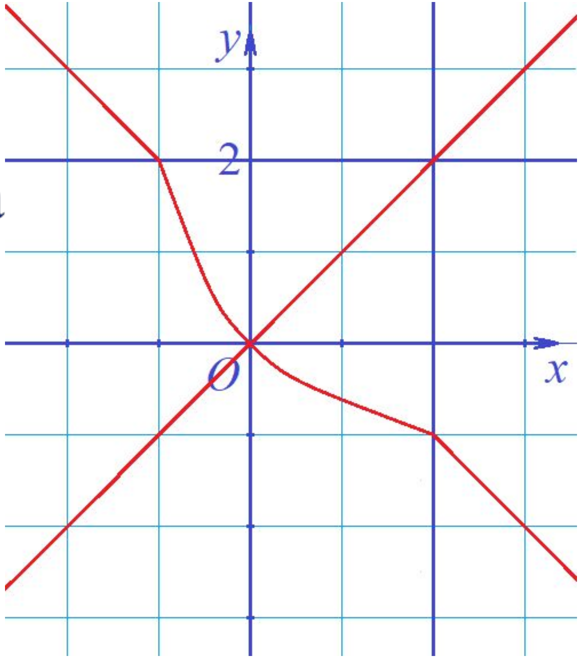
$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| & (1) \\ x + y = a & (2) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

…При $0 < a \leq 1$ прямая $y = -x + a$ имеет с фигурой ***F*** более двух общих точек. Система имеет более двух решений.

Ответ. $0 < a \leq 1$.

Замечание. Парабола $y = x^2 - x$ и прямая $y = -x + a$ имеют единственную общую точку при $a = 0$.



Метод областей

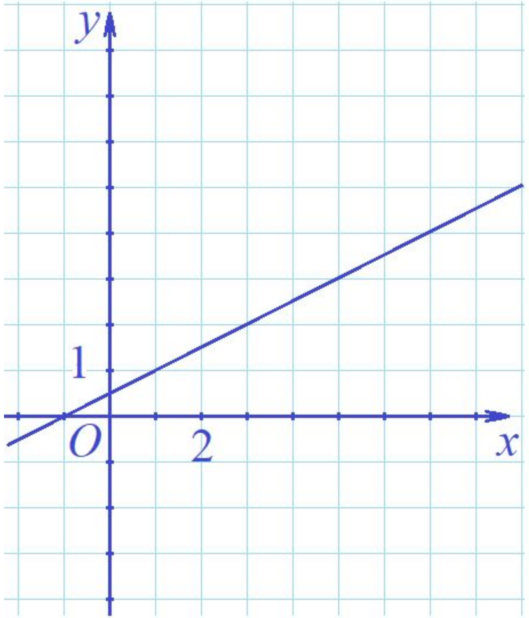
8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2|2y - x - 1| = -8 & (1) \\ y - 3 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение. Построим в системе координат xOy фигуру F, заданную уравнением (1).

Прямая $y = 0{,}5x + 0{,}5$ разбивает плоскость на две полуплоскости.

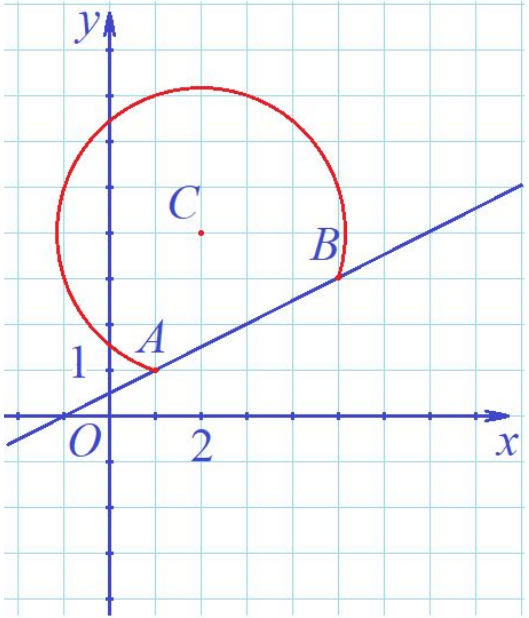


Метод областей

8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2|2y - x - 1| = -8 & (1) \\ y - 3 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.



…Если $y \geq 0{,}5x + 0{,}5$, то уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4y + 2x + 2 = -8,$$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 10.$$

Получили часть окружности с центром $C\ (2;\ 4)$, проходящей через точки $A\ (1;\ 1)$ и $B\ (5;\ 3)$.

Метод областей

8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2|2y - x - 1| = -8 & (1) \\ y - 3 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

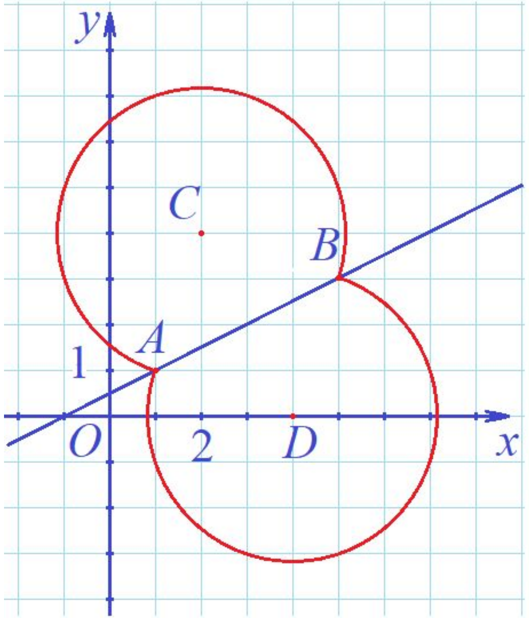
имеет ровно два решения.

…Если $y \leq 0{,}5x + 0{,}5$, то уравнение (1) имеет вид:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4y - 2x - 2 = -8,$$

$$(x - 4)^2 + y^2 = 10.$$

Получили часть окружности с центром D (4; 0), проходящей через точки A и B.



Метод областей

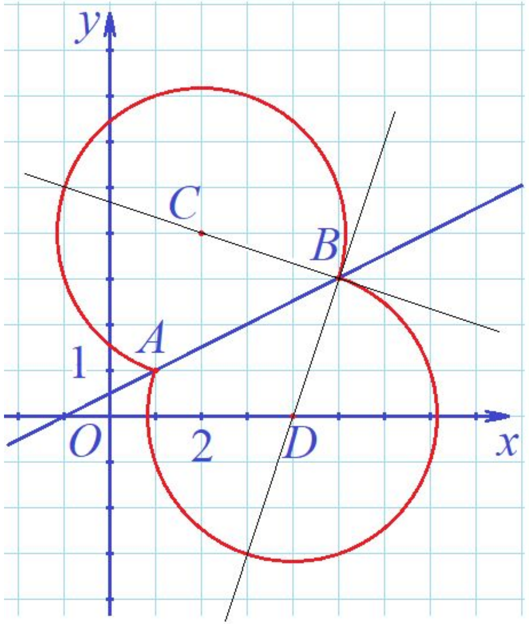
8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2|2y - x - 1| = -8 & (1) \\ y - 3 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

…Прямая, заданная уравнением (2), проходит через точку B.

При $a = -\frac{1}{3}$ она проходит через точку C перпендикулярно радиусу DB и касается окружности D.



Метод областей

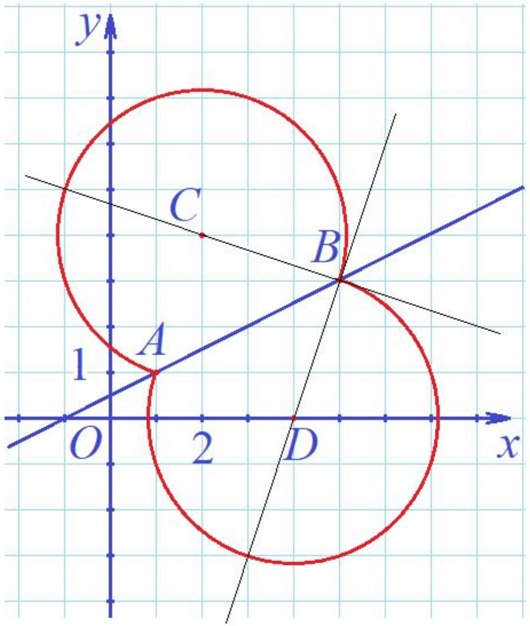
8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2|2y - x - 1| = -8 & (1) \\ y - 3 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

…При $a = 3$ прямая (2) проходит через точку D перпендикулярно радиусу CB и касается окружности C.

Если $-\frac{1}{3} \le a \le 3$, то прямая (2) пересекает фигуру $\boldsymbol{F}$ в двух точках, поэтому система имеет ровно 2 решения.



Метод областей

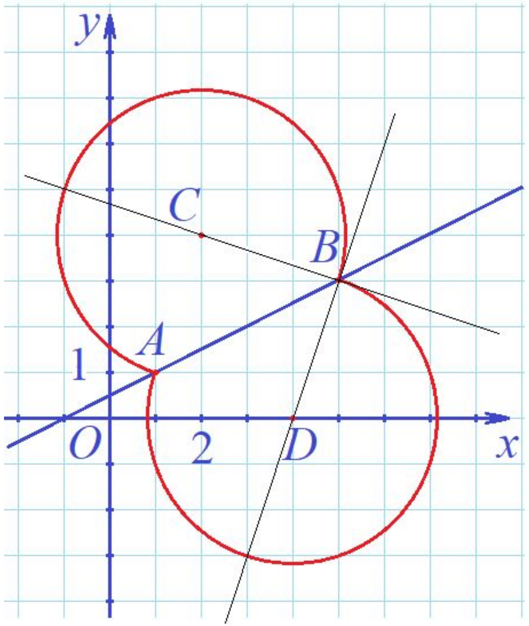
8. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x - 4y - 2|2y - x - 1| = -8 & (1) \\ y - 3 = a(x - 5) & (2) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

…При других значениях a прямая (2) пересекает фигуру ***F*** в трёх точках, система имеет 3 решения.

Ответ. $-\frac{1}{3} \le a \le 3.$



Симметричные решения (развитие идеи)

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 3| = |x + a - 3| - (a - 3)^2 \qquad (1)$$

имеет нечётное число корней.

Решение. Обозначим $y = a - 3$, запишем уравнение (1) в виде:

$$x^2 - |x - y| = |x + y| - y^2,$$

$$x^2 + y^2 = |y - x| + |y + x|. \qquad (2)$$

Вместе с решением $(x_0; y_0)$ уравнение (2) имеет и решение $(-x_0; y_0)$.

Если $x_0 \neq 0$, то уравнение (1) имеет чётное число корней.

Симметричные решения (развитие идеи)

9. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 - |x - a + 3| = |x + a - 3| - (a - 3)^2 \qquad (1)$$

имеет нечётное число корней.

…Чтобы уравнение (1) имело нечётное число корней, должно выполняться условие $x_0 = 0$. Подставив $x = 0$ в уравнение (2), получим уравнение $y^2 = 2|y|$, имеющее 3 корня: $y = 0, 2, -2$.

Решив три уравнения

$$a - 3 = 0, \qquad a - 3 = 2, \qquad a - 3 = -2,$$

получим: $a = 3$, $a = 5$, $a = 1$. В каждом случае число корней нечетно: 3, 1, 1 соответственно.

Ответ. 1, 3, 5.

Свойства функции, график функции с модулями

10. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3+9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|+\sqrt[5]{2x-3}\le 16$$

выполняется для всех $x\in[-2;1]$.

Решение. Для каждого значения a рассмотрим функцию

$$f(x)=2x^3+9x+3|x+a-2|+2|2x-a+2|+\sqrt[5]{2x-3}.$$

Перепишем её в виде

$f(x)=2x^3+9x\pm 3x\pm 4x+\sqrt[5]{2x-3}+A(a)$, где $A(a)$ – число.

Функция $f(x)$ возрастает на всей своей области определения, а значит, и на $[-2;1]$, как сумма возрастающих функций. Условие задачи будет выполнено, если $f(1)\le 16$.

Свойства функции, график функции с модулями

10. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3} \le 16$$

выполняется для всех $x \in [-2; 1]$.

…Решим неравенство:

$$2 + 9 + 3|a - 1| + 2|a - 4| - 1 \le 16,$$

$$3|a - 1| + 2|a - 4| - 6 \le 0.$$

Рассмотрим вторую функцию

$$g(a) = 3|a - 1| + 2|a - 4| - 6.$$

Свойства функции, график функции с модулями

10. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$2x^3 + 9x + 3|x + a - 2| + 2|2x - a + 2| + \sqrt[5]{2x - 3} \le 16$$

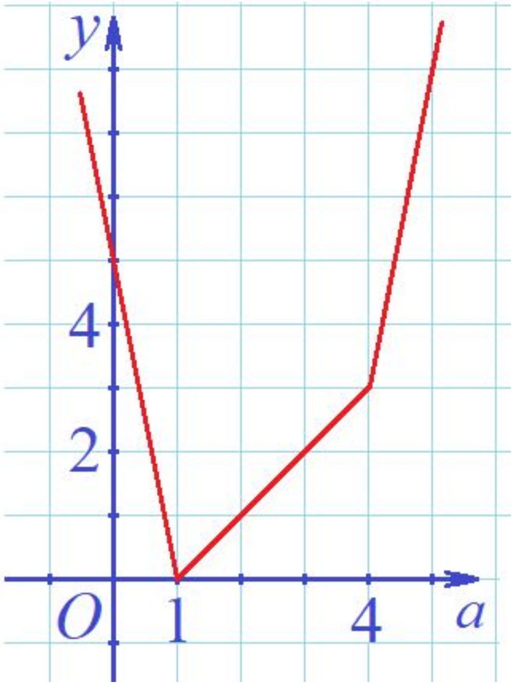
выполняется для всех $x \in [-2; 1]$.

…Точки $a = 1$ и $a = 4$ разбивают ось a на три промежутка, на каждом из которых график функции $y = g\,(a)$ − прямая

Неравенство $g\,(a) \le 0$ выполняется в единственной точке $a = 1$.

Ответ. 1.

Замечание. Неравенство (1) можно решить, раскрывая модули на трёх промежутках.



Условие касания прямой и окружности

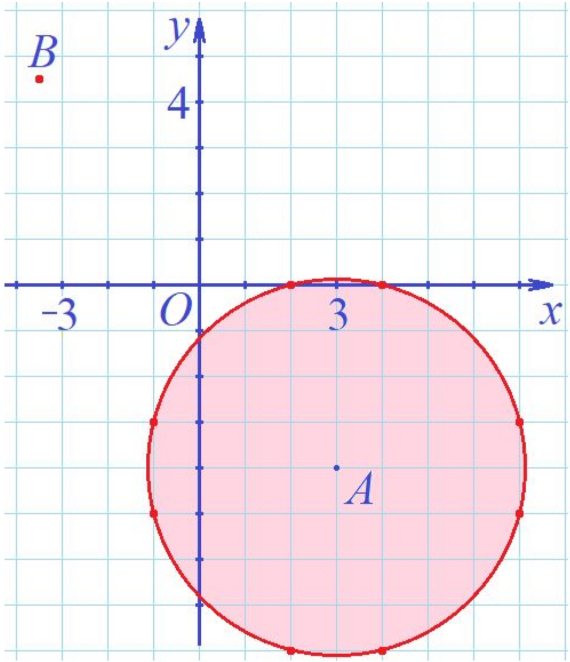
11. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-3)^2+(y+4)^2-17)((2x+7)^2+(2y-9)^2) \le 0 & (1) \\ y+ax=1 & (2) \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение. Построим в системе координат xOy фигуру ***F***, заданную неравенством (1).

Эта фигура состоит из всех точек круга с центром A (3; −4) радиуса $\sqrt{17}$ и точки B (−3,5; 4,5).



Условие касания прямой и окружности

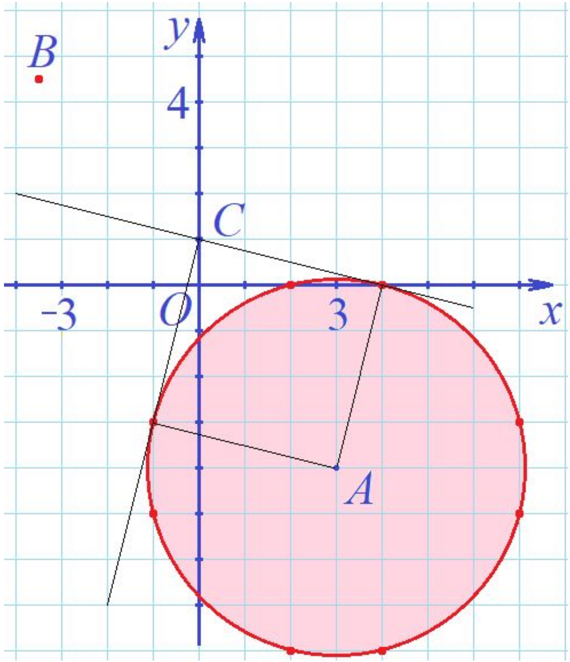
11. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} ((x-3)^2+(y+4)^2-17)((2x+7)^2+(2y-9)^2)\le 0 & (1) \\ y+ax=1 & (2) \end{cases}$$

не имеет решений.

…При каждом значении параметра уравнение (2) задаёт прямую $y=-ax+1$ с угловым коэффициентом $-a$, проходящую через точку $C\,(0;\,1)$.

Система не имеет решений, если прямая не имеет общих точек с фигурой $\boldsymbol{F}$.



Условие касания прямой и окружности

11. Найдите все значения a, при каждом из которых система

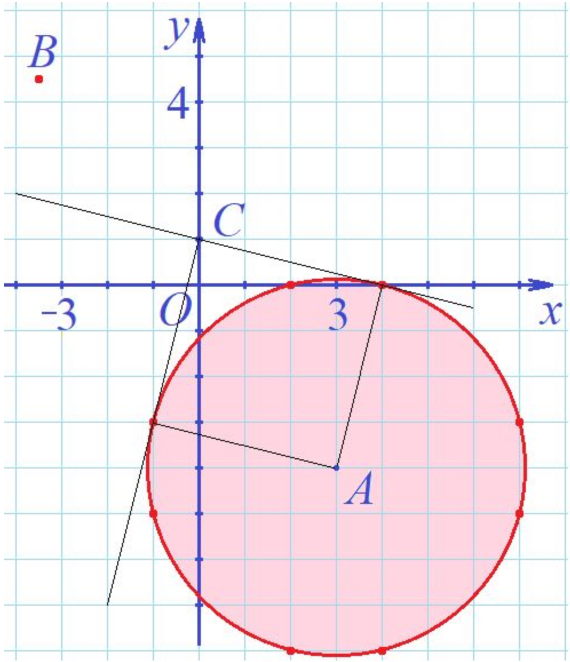
$$\begin{cases} ((x-3)^2+(y+4)^2-17)((2x+7)^2+(2y-9)^2)\le 0 & (1) \\ y+ax=1 & (2) \end{cases}$$

не имеет решений.

…Вместо y в уравнение окружности

$$(x-3)^2+(y+4)^2=17$$

подставим $-ax+1$ и определим значения a, при которых полученное уравнение имеет единственный корень (это условие касания прямой и окружности).



Условие касания прямой и окружности

11. Найдите все значения a, при каждом из которых система

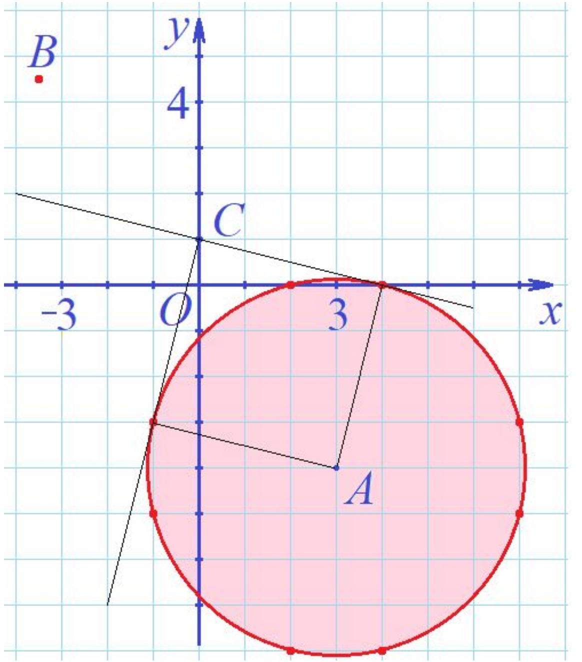
$$\begin{cases}((x-3)^2+(y+4)^2-17)((2x+7)^2+(2y-9)^2)\le 0 & (1)\\ y+ax=1 & (2)\end{cases}$$

не имеет решений.

…Получим $a=-4$ и $a=\frac{1}{4}$, что соответствует угловым коэффициентам $-a=4$ и $-a=-\frac{1}{4}$.

Если $-\frac{1}{4}<-a<4$, т. е. $-4<a<\frac{1}{4}$, то прямая $y=-ax+1$ не имеет общих точек с фигурой ***F***, а система не имеет решений.

Ответ. $-4<a<\frac{1}{4}$.



Область значений функции

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $f(x) = \frac{(3a-6)x^2+6x+3a+26}{3x^2+12x+19}$ содержит отрезок [2; 3].

Решение. Для каждого значения a функция $f(x)$ непрерывна на $\boldsymbol{R}$. Найдем все значения a, при каждом из которых существуют такие точки x, что $f(x) = 2$, и такие точки x, что $f(x) = 3$, тогда, в силу непрерывности функции $f(x)$, она принимает все значения из отрезка [2; 3]. То есть область значений функции $f(x)$ содержит отрезок [2; 3].

Итак, должны выполняться два условия.

Область значений функции

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $f(x) = \frac{(3a-6)x^2+6x+3a+26}{3x^2+12x+19}$ содержит отрезок [2; 3].

…1) Уравнение

$$(3a-6)x^2 + 6x + 3a + 26 = 3(3x^2 + 12x + 19),$$

$$(3a-15)x^2 - 30x + 3a - 31 = 0$$

имеет хотя бы один корень при $2 \le a \le 13\frac{1}{3}$.

Здесь надо рассмотреть случаи: 1) $a = 5$ – уравнение линейное; 2) $a \neq 5$ – уравнение квадратное, $\frac{D}{4} \ge 0$…

Область значений функции

12. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых область значений функции $f(x) = \frac{(3a-6)x^2+6x+3a+26}{3x^2+12x+19}$ содержит отрезок [2; 3].

…2) Уравнение

$$(3a-6)x^2+6x+3a+26=2(3x^2+12x+19),$$

$$(3a-12)x^2-18x+3a-12=0$$

имеет хотя бы один корень при $1 \le a \le 7$.

Условия 1) и 2) выполняются одновременно, если $2 \le a \le 7$.

Ответ. $2 \le a \le 7$.