ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

КРУПИНА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА

МОСКВА
2021

Свойства операции умножения матриц

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е. $AB \neq BA$ даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение $AB=BA$ выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка. Очевидно, что для любых матриц выполняются следующее свойство:

$$A \cdot O = O; \; O \cdot A = O, \text{ где } O \text{ – нулевая матрица.}$$

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна,** т.е. если определены произведения AB и $(AB)C$, то определены BC и $A(BC)$, и выполняется равенство:

$$(AB)C=A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения $A(B+C)$ и $(A+B)C$, то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$
$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение AB определено, то для любого числа α верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение AB, то определено произведение $B^T A^T$ и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц $\det(AB) = \det A \cdot \det B$. Что такое det будет рассмотрено ниже.

<u>Пример.</u> Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$.

Найти $A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 \\ 0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+10 & 4+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Определители

Каждой квадратной матрице A может быть поставлено в соответствие некоторое число, вычисляемое по определенному правилу с помощью элементов матрицы. Такое число называют ***определителем*** (или *детерминантом*) матрицы A и обозначают символом $|A|$ или $\det A$. При этом *порядком* определителя называют порядок соответствующей матрицы.

Определитель n-го порядка имеет вид: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков легко выписать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Последнюю формулу, несмотря на внешнюю сложность записи, нетрудно запомнить. Если соединить линией каждые три элемента определителя, произведение которых входит в правую часть последней формулы со знаком «+», то получим легко запоминающуюся *схему 1*. Аналогично для произведений, входящих со знаком «–», имеем *схему 2*.

Схема 1

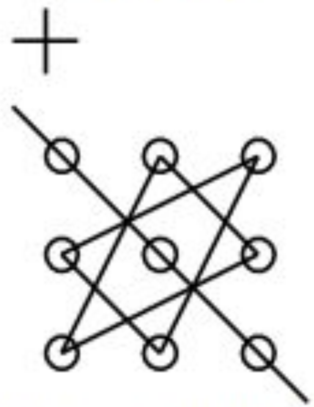
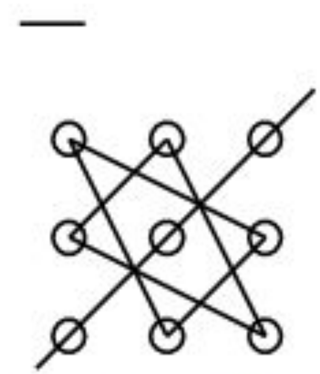


Схема 2



Это правило вычисления определителей 3-го порядка называется правилом треугольников (или правилом Сарруса).

Свойства определителей

Свойство1 (равноправности строк и столбцов). Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами (т.е. транспонировать):

$$\det A = \det A^T;$$

Свойство 2. $\det(A \pm B) = \det A \pm \det B.$

Свойство 3. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$

Свойство 4. Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

Свойство 5. При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

Свойство 6. Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

Свойство 7. Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

Свойство 8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

Свойство 9. Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю, равен произведению элементов главной диагонали.

Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Пусть дана матрица A n-го порядка.

Минором любого элемента a_{ij} называют определитель порядка $n-1$, соответствующий той матрице, которая получается из матрицы A в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца (т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}). Минор элемента a_{ij} будем обозначать символом M_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называют минор M_{ij} этого элемента, умноженный на $(-1)^{i+j}$, т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Вычисление определителей *n*-го порядка

Теорема. *Определитель матрицы* A n *-го порядка равен сумме произведений всех элементов какой-нибудь одной фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. для любого* $i = 1,2,\ldots,n$ *имеет место равенство*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

называемое разложением определителя $|A|$ *по элементам* i *-й строки.*

Аналогично для $k = 1,2,\ldots,n$ *имеет место разложение определителя* $|A|$ *по элементам k-го столбца:*

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}.$$

Способы вычисления определителей:

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно вычислять определители второго и третьего порядка.
2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.
3. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Этот способ основан на том, что в силу свойства 9треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, нужно к какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, до тех пор, пока не придем к определителю треугольного вида.

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$= -5 + 18 + 6 = 19.$

Пример: Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. Найти det (AB).

1-й способ: det A = 4 – 6 = -2; det B = 15 – 2 = 13; det (AB) = det A ·det B = -26.

2- й способ: $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$, det (AB) = 7·18 - 8·19 = 126 – 152 = -26.

<u>Пример.</u> Вычислить определитель $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6-4) - 1(9-1) + 2(12-2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0-2) - 1(0-6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя: -10 + 6 – 40 = -44.

1.8. Даны матрицы $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $Y=\begin{bmatrix} -4 & -1 \end{bmatrix}$, $X=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Найти те попарные произведения данных матриц, которые существуют.

1.9. На примере матриц A и B убедиться, что $AB=0$, хотя $A\neq 0, B\neq 0$, если:

а) $A=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{bmatrix}$.

1.10. Дано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Показать, что $AX = BX$, хотя $A \neq B$.

1.11. Найти A^2, если $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$.

1.12. Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а) $(A+B)' = A' + B'$; б) $(AB)' = B'A'$; с) $(cA)' = cA'$.

1.13. Найти $A'B'BA$, если:

а) $A=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$; б) $A=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}3&6\\2&1\end{bmatrix}$.

1.14. Дано:

$$A=\begin{bmatrix}3&6\\2&1\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&3&2\\0&-1&-1&1\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}-1\\1\\-1\\0\end{bmatrix},\quad Y=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}.$$

Найти AB, BX, $B'BX$, AY, $A'AY$.

Упражнение. Вычислите каждый из следующих определителей двумя способами (с помощью правила треугольников и с помощью разложения по элементам строки или столбца):

а) $\begin{vmatrix}2&3&4\\5&-2&1\\1&2&3\end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix}1&17&-7\\-1&13&1\\1&7&1\end{vmatrix}$, в) $\begin{vmatrix}2&0&5\\1&3&16\\0&-1&10\end{vmatrix}$.