

# **ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ**

---

**КРУПИНА НАТАЛЬЯ ВЛАДИМИРОВНА**

МОСКВА  
2021

## Свойства операции умножения матриц

1) Умножение матриц **не коммутативно**, т.е.  $AB \neq BA$  даже если определены оба произведения. Однако, если для каких – либо матриц соотношение  $AB=BA$  выполняется, то такие матрицы называются **перестановочными**.

Самым характерным примером может служить единичная матрица, которая является перестановочной с любой другой матрицей того же размера.

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

Перестановочными могут быть только квадратные матрицы одного и того же порядка. Очевидно, что для любых матриц выполняется следующее свойство:

$$A \cdot O = O; O \cdot A = O, \text{ где } O \text{ – нулевая матрица.}$$

2) Операция перемножения матриц **ассоциативна**, т.е. если определены произведения  $AB$  и  $(AB)C$ , то определены  $BC$  и  $A(BC)$ , и выполняется равенство:

$$(AB)C = A(BC).$$

3) Операция умножения матриц **дистрибутивна** по отношению к сложению, т.е. если имеют смысл выражения  $A(B+C)$  и  $(A+B)C$ , то соответственно:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC.$$

4) Если произведение  $AB$  определено, то для любого числа  $\alpha$  верно соотношение:

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

5) Если определено произведение  $AB$ , то определено произведение  $B^T A^T$  и выполняется равенство:

$$(AB)^T = B^T A^T$$

6) Заметим также, что для любых квадратных матриц  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ . Что такое  $\det$  будет рассмотрено ниже.

Пример. Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ,  $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  и число  $\alpha = 2$ .

Найти  $A^T B + \alpha C$ .

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$  и  $B = (2 \ 4 \ 1)$ .

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Найти произведение матриц  $A = (1 \ 2)$ ,  $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$

$$AB = (1 \ 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3 + 10 \quad 4 + 12) = (13 \ 16).$$

## Определители

Каждой квадратной матрице  $A$  может быть поставлено в соответствие некоторое число, вычисляемое по определенному правилу с помощью элементов матрицы. Такое число называют *определителем* (или *детерминантом*) матрицы  $A$  и обозначают символом  $|A|$  или  $\det A$ . При этом *порядком* определителя называют порядок соответствующей матрицы.

Определитель  $n$ -го порядка имеет вид:  $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ .

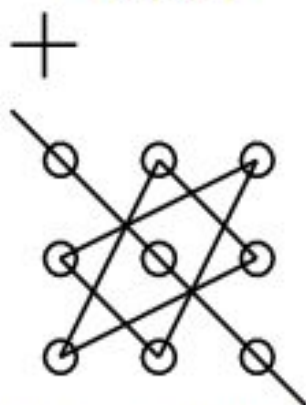
Правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков легко выписать:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

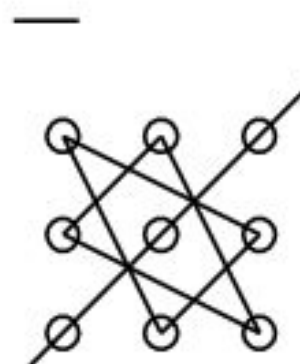
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Последнюю формулу, несмотря на внешнюю сложность записи, нетрудно запомнить. Если соединить линией каждые три элемента определителя, произведение которых входит в правую часть последней формулы со знаком «+», то получим легко запоминающуюся *схему 1*. Аналогично для произведений, входящих со знаком «-», имеем *схему 2*.

*Схема 1*



*Схема 2*



Это правило вычисления определителей 3-го порядка называется правилом треугольников (или правилом Сарруса).

## Свойства определителей

**Свойство 1 (равноправности строк и столбцов).** Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами (т.е. транспонировать):

$$\det A = \det A^T;$$

**Свойство 2.**  $\det ( A \pm B ) = \det A \pm \det B.$

**Свойство 3.**  $\det (AB) = \det A \cdot \det B$

**Свойство 4.** Если в квадратной матрице поменять местами какие-либо две строки (или столбца), то определитель матрицы изменит знак, не изменившись по абсолютной величине.

**Свойство 5.** При умножении столбца (или строки) матрицы на число ее определитель умножается на это число.

**Свойство 6.** Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.

**Свойство 7.** Если матрица содержит нулевой столбец или нулевую строку, то ее определитель равен нулю. (Данное утверждение очевидно, т.к. считать определитель можно именно по нулевой строке или столбцу.)

**Свойство 8.** Определитель матрицы не изменится, если к элементам одной из его строк(столбца) прибавить(вычесть) элементы другой строки(столбца), умноженные на какое-либо число, не равное нулю.

**Свойство 9.** Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, равны нулю, равен произведению элементов главной диагонали.



## Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Пусть дана матрица  $A$   $n$ -го порядка.

*Минором* любого элемента  $a_{ij}$  называют определитель порядка  $n-1$ , соответствующий той матрице, которая получается из матрицы  $A$  в результате вычеркивания  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца (т.е. той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент  $a_{ij}$ ). Минор элемента  $a_{ij}$  будем обозначать символом  $M_{ij}$ .

*Алгебраическим дополнением*  $A_{ij}$  элемента  $a_{ij}$  матрицы  $A$  называют минор  $M_{ij}$  этого элемента, умноженный на  $(-1)^{i+j}$ , т.е.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

### Вычисление определителей $n$ -го порядка

Теорема. *Определитель матрицы  $A$   $n$ -го порядка равен сумме произведений всех элементов какой-нибудь одной фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. для любого  $i = 1, 2, \dots, n$  имеет место равенство*

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in},$$

называемое разложением определителя  $|A|$  по элементам  $i$ -й строки.

Аналогично для  $k = 1, 2, \dots, n$  имеет место разложение определителя  $|A|$  по элементам  $k$ -го столбца:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk}.$$

### **Способы вычисления определителей:**

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно вычислять определители второго и третьего порядка.
2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.
3. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Этот способ основан на том, что в силу свойства 9треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, нужно к какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, до тех пор, пока не приходим к определителю треугольного вида.

Пример. Вычислить определитель матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) = \\ = -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример: Даны матрицы  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Найти  $\det(AB)$ .

1-й способ:  $\det A = 4 - 6 = -2$ ;  $\det B = 15 - 2 = 13$ ;  $\det(AB) = \det A \cdot \det B = -26$ .

2-й способ:  $AB = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 19 & 18 \end{pmatrix}$ ,  $\det(AB) = 7 \cdot 18 - 8 \cdot 19 = 126 - 152 = -26$ .

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -1(6 - 4) - 1(9 - 1) + 2(12 - 2) = -2 - 8 + 20 = 10.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 2(0 - 2) - 1(0 - 6) = 2.$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 3(-6) = -8 + 18 = 10.$$

Значение определителя:  $-10 + 6 - 40 = -44$ .

**1.8.** Даны матрицы  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ,  $Y = [-4 \quad -1]$ ,  $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Найти те по-

парные произведения данных матриц, которые существуют.

**1.9.** На примере матриц  $A$  и  $B$  убедиться, что  $AB = 0$ , хотя  $A \neq 0$ ,  $B \neq 0$ , если:

а)  $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}$ ;

б)  $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -3 & 5 \\ 9 & 2 & -3 & 4 \\ 7 & 6 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & -5 & 3 & 11 \\ 16 & 24 & 8 & -8 \\ 8 & 16 & 0 & -16 \end{bmatrix}$ .

**1.10.** Дано:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 2 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Показать, что  $AX = BX$ , хотя  $A \neq B$ .

**1.11.** Найти  $A^2$ , если  $A = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ 9 & -6 \end{bmatrix}$ .

**1.12.** Показать, что операция транспонирования матрицы обладает свойствами:

а)  $(A + B)' = A' + B'$ ;

б)  $(AB)' = B'A'$ ;

с)  $(cA)' = cA'$ .

**1.13.** Найти  $A'B'BA$ , если:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

**1.14.** Дано:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Найти  $AB$ ,  $BX$ ,  $B'BX$ ,  $AY$ ,  $A'AY$ .

Упражнение. Вычислите каждый из следующих определителей двумя способами (с помощью правила треугольников и с помощью разложения по элементам строки или столбца):

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}, \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}, \quad \text{в) } \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$