АЧХ и нуль-полюсная диаграмма

- АЧХ этого ЦФ:

$$H(\omega) = \sqrt{(1+e^{-j\omega T})(1+e^{j\omega T})} = \sqrt{2(1+\cos\omega T)}$$

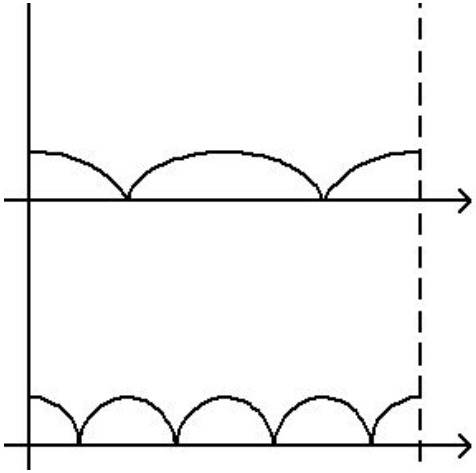
$$= \sqrt{4\cos^2(\omega T/2)} = 2\cdot\left|\cos\frac{\omega T}{2}\right| \quad (3).$$

- Нуль и полюс фильтра найдем, умножив и разделив *H(z)* на *z*:

$$H(z) = \frac{1}{z}(z+1) \quad (4).$$

АЧХ и нуль-полюсная диаграмма

- Фильтр хорошо подавляет частоты в узкой полосе вблизи частоты *fs/4*, т.е. является узкополосным режекторным фильтром.
- Если увеличить задержку исходного фильтра в 4 и в 8 раз, то получим АЧХ и нуль-полюсные диаграммы, изображенные на рис.3 б.



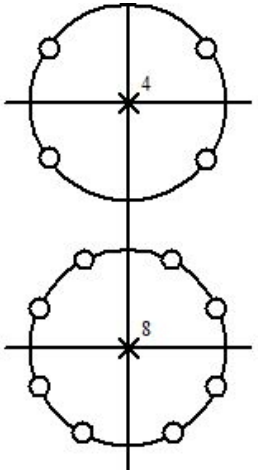


Рис. 3 б

Передаточная функция

- Обозначим передаточные функции рассмотренных элементарных нерекурсивных звеньев следующим образом:
- $H_1(z) = 1 + z^{-1}$; $H_2(z) = 1 + z^{-2}$;
-
- $H_4(z) = 1 + z^{-4}$; $H_8(z) = 1 + z^{-8}$.
- Если включить эти звенья каскадно, то получим передаточную функцию
-
- $H(z) = (1 + z^{-1})\,(1 + z^{-2})\,(1 + z^{-4})\,(1 + z^{-8})$ (5).

Структурная схема и передаточная функция НЦФ

- Структурная схема НЦФ

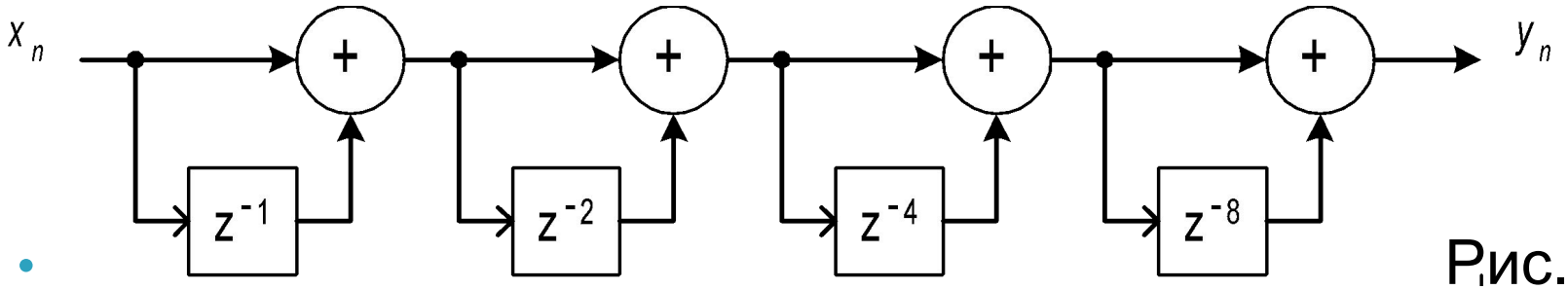


Рис. 4

- Передаточная функция

$$H(z) = \sum_{n=0}^{15} z^{-n} \qquad (6)$$

Структурная схема ЦФ

- Структурная схема, соответствующая этой формуле (6), приведена на рис.5. Она базируется на линии задержки с отводами и имеет название
- трансверсальный фильтр.

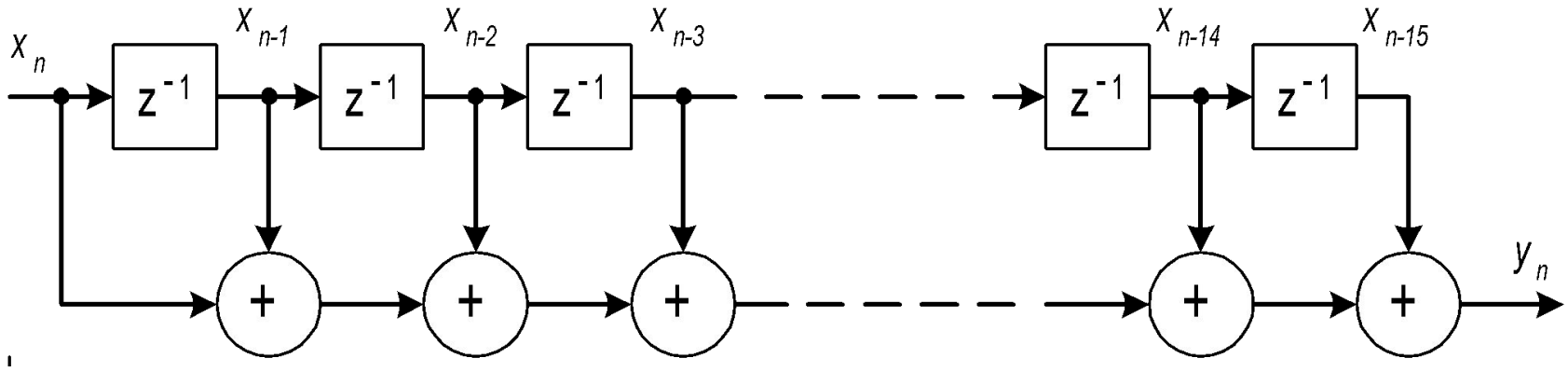


Рис. 5

Передаточная функция

- Формула (6) представляет собой сумму геометрической прогрессии с показателем z^{-1} и может быть записана в виде

$$H(z) = \frac{1 - z^{-16}}{1 - z^{-1}} \quad (7).$$

- Если умножить числитель и знаменатель в (7) на z^{16} , то получим формулу для анализа положения нулей и полюсов:

$$H(z) = \frac{z^{16} - 1}{z^{15}(z - 1)}$$

Нули и полюса

- Нуль-полюсная диаграмма для фильтра с передаточной функцией по формуле (7).

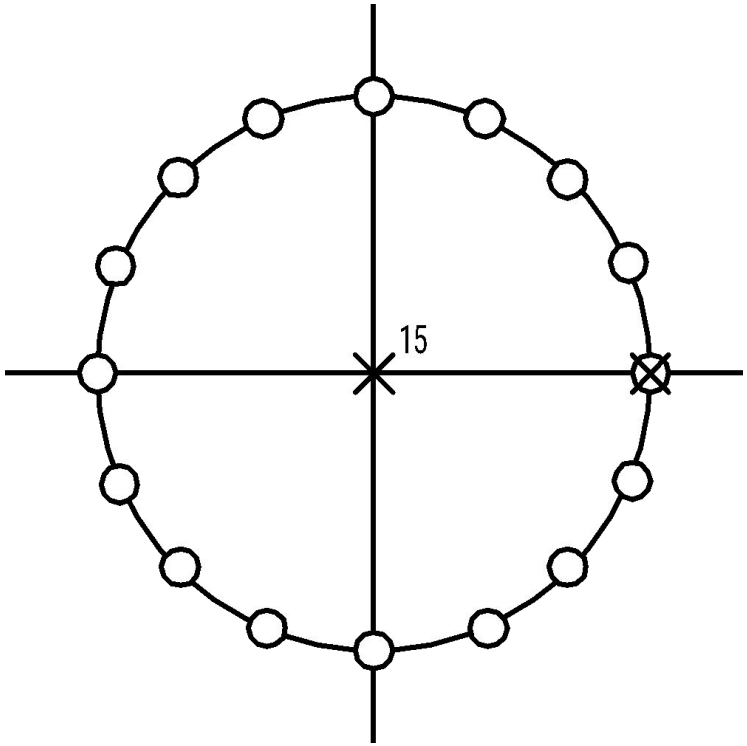


Рис. 6

Передаточная функция

- Обобщая формулы (6) и (7) для фильтра N-го порядка, запишем:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n} \qquad (8),$$

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \qquad (9).$$

Передаточная функция

- АЧХ НЦФ N-го порядка

$$H(\omega)=\frac{\sqrt{[(1-e^{-jN\omega T}]\cdot[(1-e^{jN\omega T}]}}{\sqrt{[(1-e^{-j\omega T}]\cdot[(1-e^{j\omega T}]}}=\frac{\sqrt{2-2\cos N\omega T}}{\sqrt{2-2\cos\omega T}}$$

- $$H(\omega)=\frac{\left|\sin(N\omega T/2)\right|}{\left|\sin(\omega T/2)\right|} \qquad (10)$$

График АЧХ

- График АЧХ для N=16 приведен на рис.8. Числитель (сплошная линия) и знаменатель (штриховая линия) по формуле 10.

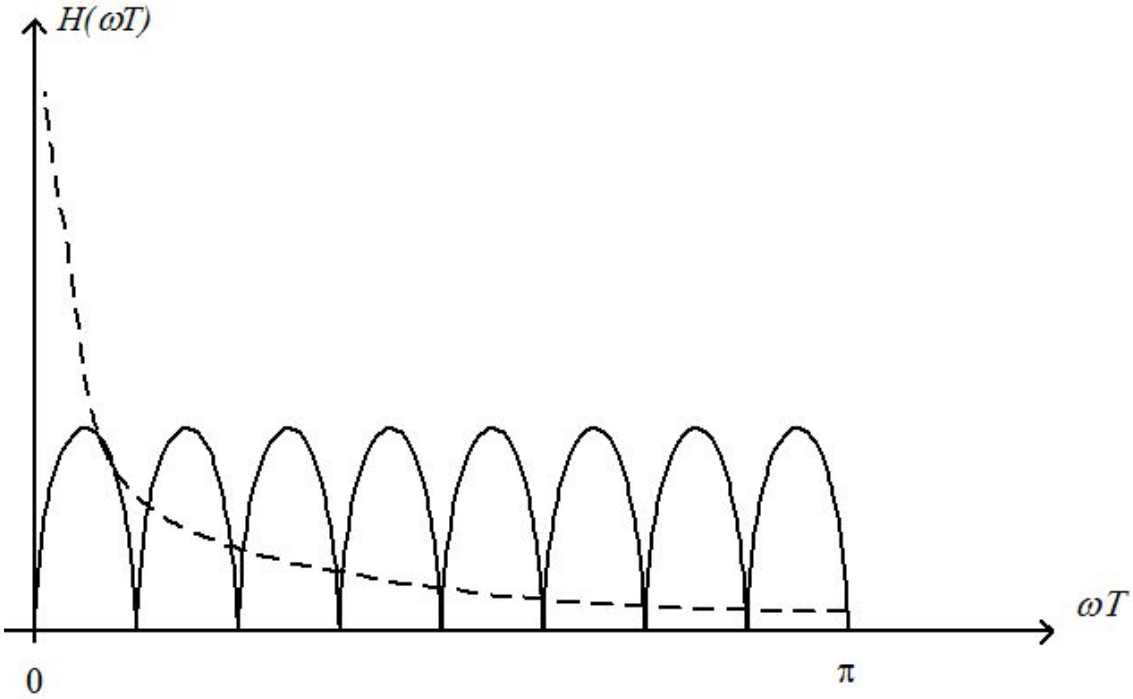


Рис. 8

График АЧХ

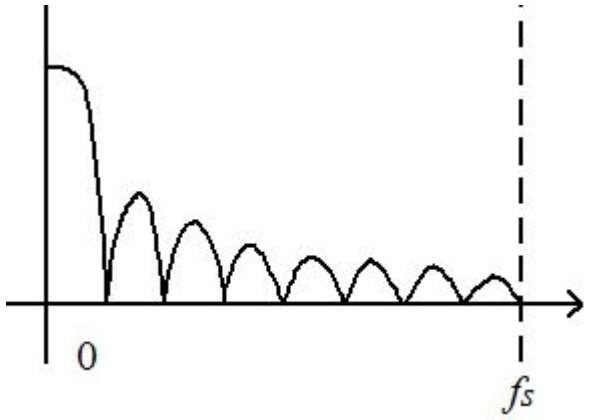
- Неопределенность при $\omega T = 0$ раскрываем по правилу Лопиталя:

$$\lim_{\omega \to 0} \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} = \lim_{\omega \to 0} \frac{\frac{d}{d\omega}\sin(N\omega T/2)}{\frac{d}{d\omega}\sin(\omega T/2)} =$$

$$= \lim_{\omega \to 0} \frac{(NT/2)\cdot\cos(N\omega T/2)}{(T/2)\cdot\cos(\omega T/2)} = N$$

График АЧХ

- Суммарная АЧХ двух этих звеньев приведена на рис. Она по виду напоминает функцию *sin x / x*.
- Как известно, такой функцией описывается спектр прямоугольного импульса.
- *Фильтр, согласованный с неким сигналом, имеет АЧХ, совпадающую с модулем спектра этого сигнала*.



- Таким образом, рассматриваемый фильтр является согласованным с прямоугольным импульсом определенной длительности.

Согласованный фильтр

- Тогда согласованный с этим импульсом фильтр должен иметь импульсную характеристику вида

$$g(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \le nT \le (N-1)T, \\ 0, & nT < 0,\ nT \ge NT. \end{cases} \qquad (11)$$

- Фильтр с передаточной функцией $H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$
- как раз и обладает такой импульсной характеристикой.

Фильтр согласованный с прямоугольным импульсом длительностью NT

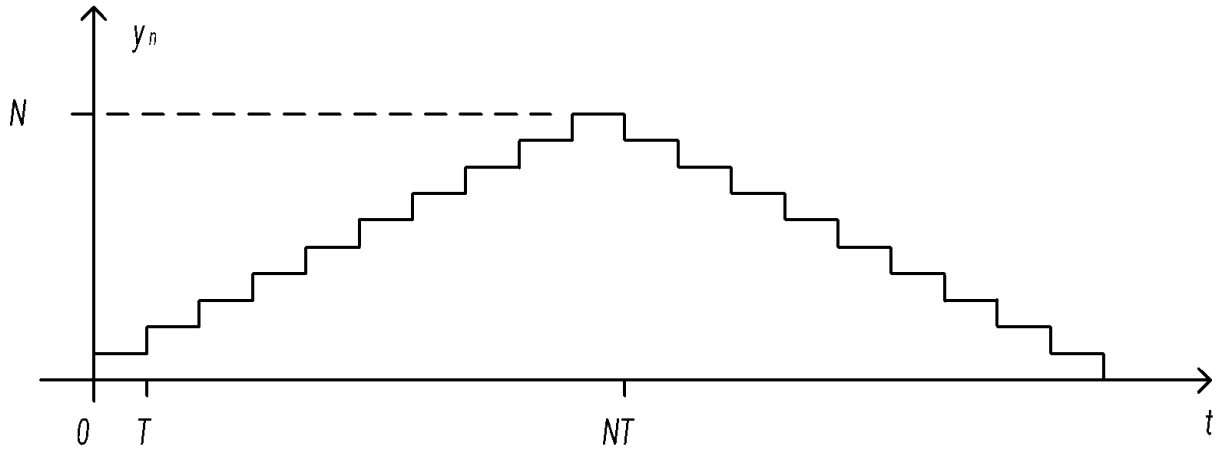
- Указанный ЦФ может применяться в дискретных устройствах как согласованный фильтр для прямоугольных импульсов длительностью N тактов частоты дискретизации.
- При этом сигнал на его выходе (рис.9) будет иметь вид треугольного импульса с максимумом в момент времени (N-1)T.
- 

Рис. 9

Согласованный фильтр

- Фильтр должен иметь разностное уравнение и передаточную функцию
-
-
$$y_n = \sum_{i=0}^{N-1} s(NT - iT) \cdot x_{n-i} \qquad (14),$$
-
-
$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} s(NT - iT) \cdot z^{-i} \qquad (15).$$