

# АЧХ и нуль-полюсная диаграмма

- АЧХ этого ЦФ:

$$H(\omega) = \sqrt{(1 + e^{-j\omega T})(1 + e^{j\omega T})} = \sqrt{2(1 + \cos \omega T)}$$

$$= \sqrt{4 \cos^2(\omega T / 2)} = 2 \cdot \left| \cos \frac{\omega T}{2} \right| \quad (3).$$

- Нуль и полюс фильтра найдем, умножив и разделив  $H(z)$  на  $z$ :

$$H(z) = \frac{1}{z} (z + 1) \quad (4).$$

# АЧХ и нуль-полюсная диаграмма

- Фильтр хорошо подавляет частоты в узкой полосе вблизи частоты  $fs/4$ , т.е. является узкополосным режекторным фильтром.
- Если увеличить задержку исходного фильтра в 4 и в 8 раз, то получим АЧХ и нуль-полюсные диаграммы, изображенные на рис.3 б.

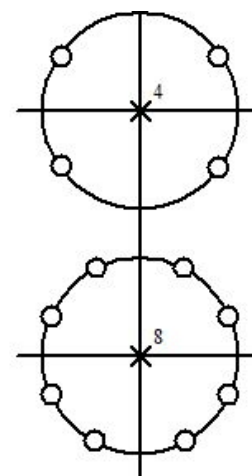
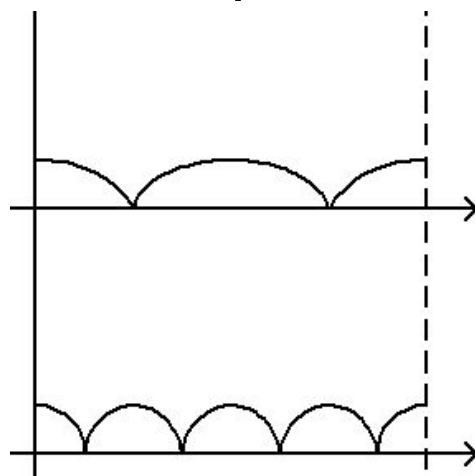


Рис. 3 б

# Передаточная функция

- Обозначим передаточные функции рассмотренных элементарных нерекурсивных звеньев следующим образом:

- $H_1(z) = 1 + z^{-1}$  ;  $H_2(z) = 1 + z^{-2}$  ;

- 

- $H_4(z) = 1 + z^{-4}$  ;  $H_8(z) = 1 + z^{-8}$ .

- Если включить эти звенья каскадно, то получим передаточную функцию

- 

- $H(z) = (1 + z^{-1}) (1 + z^{-2}) (1 + z^{-4}) (1 + z^{-8})$   
(5).

# Структурная схема и передаточная функция НЦФ

- Структурная схема НЦФ

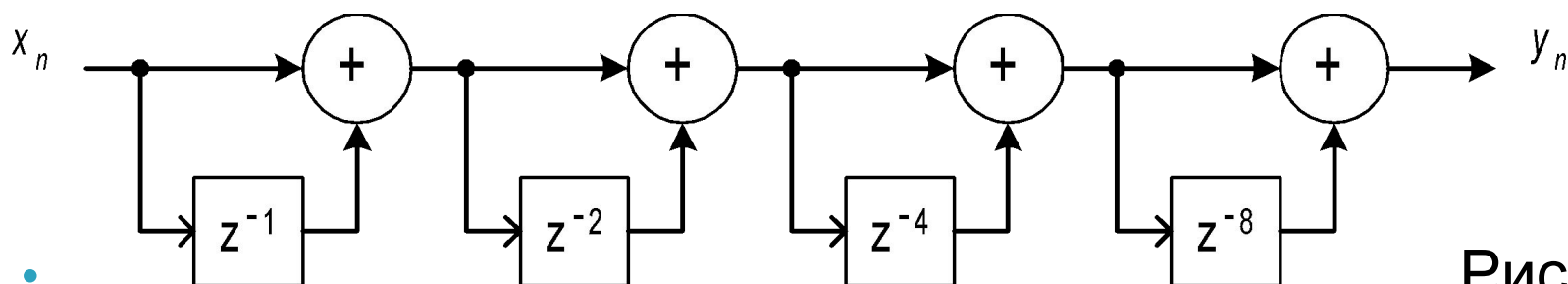


Рис. 4

- Передаточная функция

$$H(z) = \sum_{n=0}^{15} z^{-n} \quad (6)$$

# Структурная схема ЦФ

- Структурная схема, соответствующая этой формуле (6), приведена на рис.5. Она базируется на линии задержки с отводами и имеет название
- **трансверсальный фильтр.**

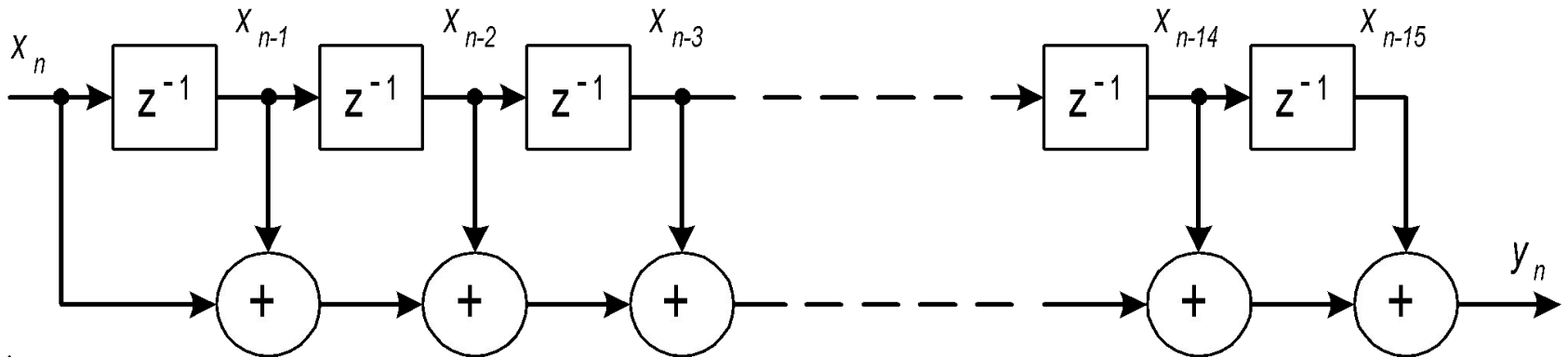


Рис. 5

# Передаточная функция

- Формула (6) представляет собой сумму геометрической прогрессии с показателем  $z^{-1}$  и может быть записана в виде

- $$H(z) = \frac{1 - z^{-16}}{1 - z^{-1}} \quad (7).$$

- Если умножить числитель и знаменатель в (7) на  $z^{16}$ , то получим формулу для анализа положения нулей и полюсов:

- $$H(z) = \frac{z^{16} - 1}{z^{15}(z - 1)}$$

# Нули и полюса

- Нуль-полюсная диаграмма для фильтра с передаточной функцией по формуле (7).

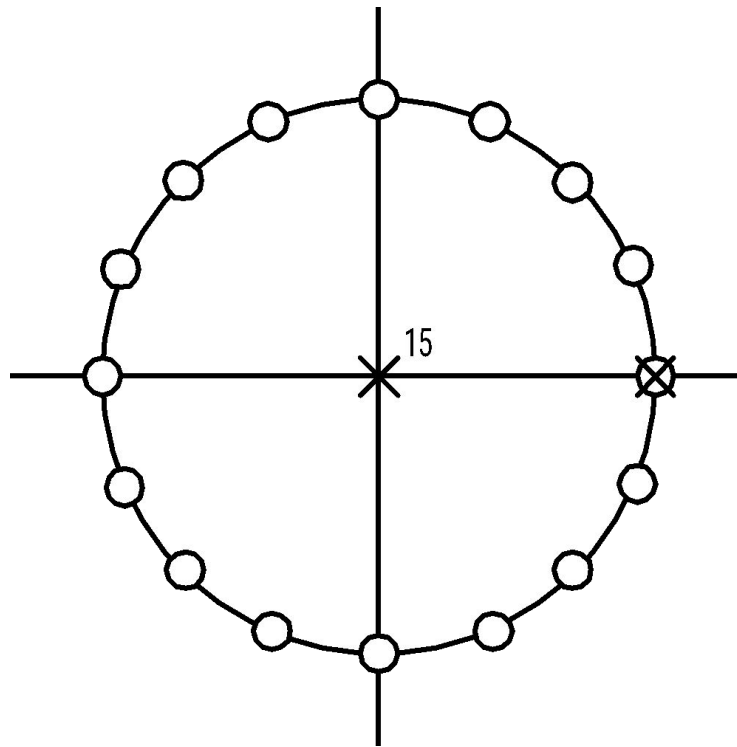


Рис. 6

# Передаточная функция

- Обобщая формулы (6) и (7) для фильтра N-го порядка, запишем:

- 
- 
- 
- 

$$H(z) \stackrel{(8)}{=} \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$$

- 

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}} \quad (9).$$



# Передаточная функция

- АЧХ НЦФ N-го порядка

$$H(\omega) = \frac{\sqrt{[(1 - e^{-jN\omega T})] \cdot [(1 - e^{jN\omega T})]}}{\sqrt{[(1 - e^{-j\omega T})] \cdot [(1 - e^{j\omega T})]}} = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos N\omega T}}{\sqrt{2 - 2 \cos \omega T}}$$

- $$H(\omega) = \frac{|\sin(N\omega T / 2)|}{|\sin(\omega T / 2)|} \quad (10)$$

# График АЧХ

- График АЧХ для  $N=16$  приведен на рис.8. Числитель (сплошная линия) и знаменатель (штриховая линия) по формуле 10.

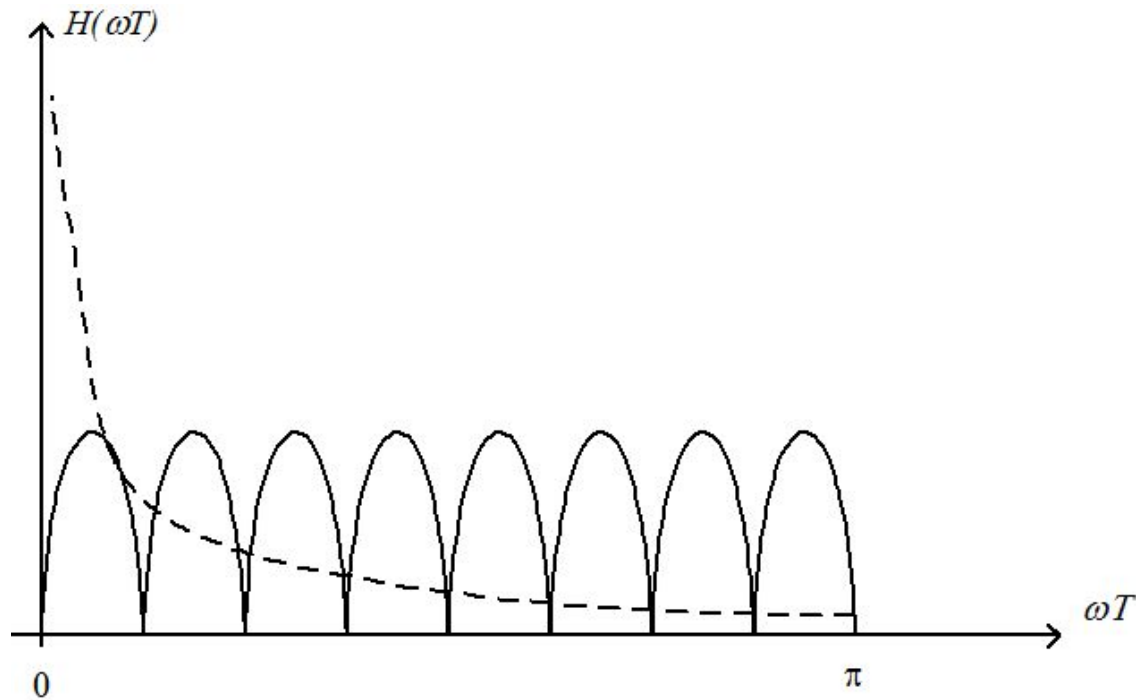


Рис. 8

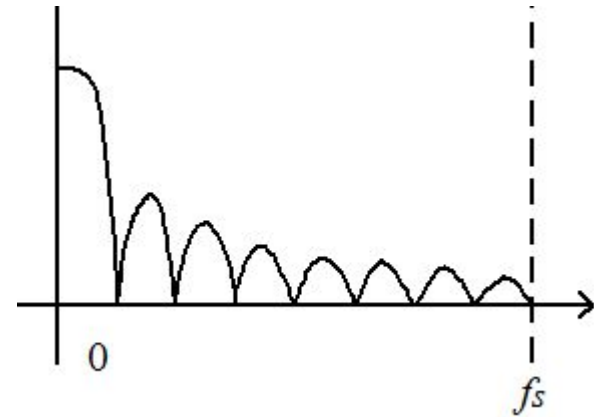
# График АЧХ

- Неопределенность при  $\omega T = 0$  раскрываем по правилу Лопиталю:

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\sin(N\omega T / 2)}{\sin(\omega T / 2)} &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{d\omega} \sin(N\omega T / 2)}{\frac{d}{d\omega} \sin(\omega T / 2)} = \\ &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{(NT / 2) \cdot \cos(N\omega T / 2)}{(T / 2) \cdot \cos(\omega T / 2)} = N \end{aligned}$$

# График АЧХ

- Суммарная АЧХ двух этих звеньев приведена на рис. Она по виду напоминает функцию  $\sin x / x$ .
- Как известно, такой функцией описывается спектр прямоугольного импульса.
- *Фильтр, согласованный с неким сигналом, имеет АЧХ, совпадающую с модулем спектра этого сигнала.*
- 
- Таким образом, рассматриваемый фильтр является **согласованным с прямоугольным импульсом определенной длительности.**



# Согласованный фильтр

- Тогда согласованный с этим импульсом фильтр должен иметь импульсную характеристику вида

- $$g(nT) = \begin{cases} 1, & 0 \leq nT \leq (N-1)T, \\ 0, & nT < 0, nT \geq NT. \end{cases} \quad (11)$$

- Фильтр с передаточной функцией 
$$H(z) = \sum_{n=0}^{N-1} z^{-n}$$
- как раз и обладает такой импульсной характеристикой.

# Фильтр согласованный с прямоугольным импульсом длительностью $NT$

- Указанный ЦФ может применяться в дискретных устройствах как согласованный фильтр для прямоугольных импульсов длительностью  $N$  тактов частоты дискретизации.
- При этом сигнал на его выходе (рис.9) будет иметь вид треугольного импульса с максимумом в момент времени  $(N-1)T$ .

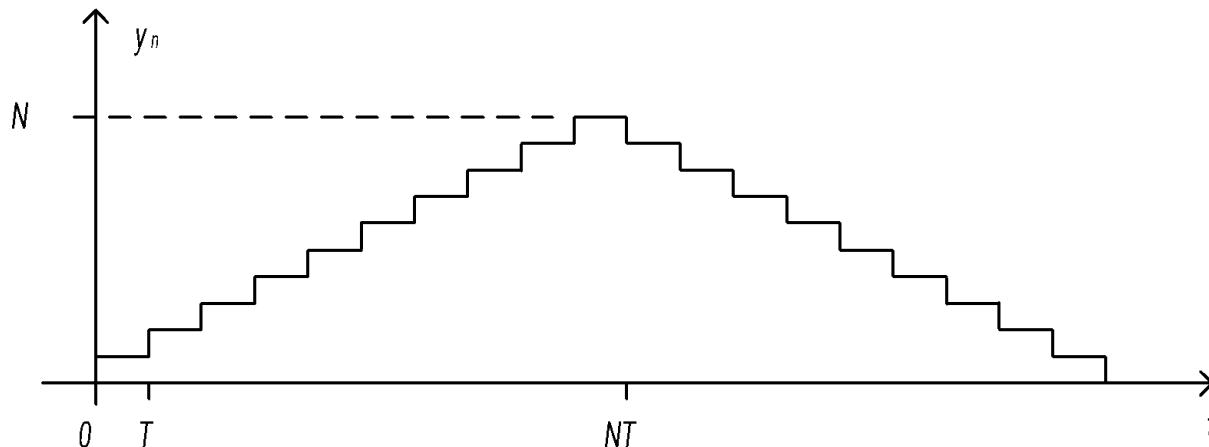


Рис.

# Согласованный фильтр

- Фильтр должен иметь разностное уравнение и передаточную функцию

- $$y_n = \sum_{i=0}^{N-1} s(NT - iT) \cdot x_{n-i} \quad (14),$$
- 
-

- $$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} s(NT - iT) \cdot z^{-i} \quad (15).$$