ПРИМЕНЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ТЕХНОЛОГИИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВ

Материал к урокам в 8 – 11 классах

1.Вводное повторение (ВП).

1. Определение уравнения.
2. Определение корня уравнения.
3. Что значит решить уравнение?
4. Основные свойства уравнения.
5. Квадратные уравнения и их способы решения.

ВП осуществляется в ходе выполнения следующих устных заданий:

1. Какие из данных чисел: 0, -2, 2, 4 являются корнями уравнения $x^2-2x-8=0$?
2. Решить уравнение: а) $(x-2)(3+x)=0$; б) $5x^2-2x=0$; в) $8x^2-8=0$; г) $x^2-3x-54=0$.
3. Разложите на множители: а) x^3-2x^2+x; б) x^4-16; в) $x^2+x-2x-2$.
4. Найдите сумму и произведение корней уравнения: а) $6x^2+7x+1=0$; б) $64x^2+16+1=0$
5. Определите знаки корней уравнения (если они существуют):
   а) $x^2-22x+120=0$; б) $x^2+15x+56=0$.

Учащиеся могут пользоваться опорными конспектами «Уравнение», «Квадратные уравнения».

Квадратные уравнения.

$$ax^2+вx+c=0, \quad a \neq 0.$$

$$D=в^2-4ac$$

$$X = \frac{-в \pm \sqrt{D}}{2a}$$

Неполные квадратные уравнения.

$$ax^2=0$$

$$x=0$$

$$ax^2+вx=0$$

$$x(ax+в)=0$$

$$x=0; \quad x=\frac{-в}{a}$$

$$ax^2+c=0$$

$$ax^2=-c$$

$$x^2=-\frac{c}{a}$$

$$\left(-\frac{c}{a} \geq 0\right)$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

Kurt Nilsen, Espen Lind, Alejandro Fuentes, Askil Holm

Теорема Виета.

$$x_1+x_2=-\frac{в}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}$$

ОМ 2. Метод подстановки.

Суть этого метода по отношению к уравнению f(x)=g(x) состоит в том, чтобы найти функции t=s(x) и y=h(t), для которых при любом $x \in D(f) \cap D(g)$ (т.е. для любого допустимого значения x рассматриваемого уравнения) выполняется равенство

$$f(x)-g(x)=h(s(x)).$$

В этом случае достаточно решить уравнение h(t)=0, а затем для каждого его корня t_0 решить уравнение $s(x)=t_0$.

Совокупность полученных таким образом корней $x \in D(f) \cap D(g)$ будет искомым множеством решений исходного уравнения. Функция t=s(x) называется **подстановкой.** В случае алгебраических уравнений, как правило, в роли s(x) применяются многочлены.

Примеры.

6. $(x^2-7x+13)^2-(x-3)(x-4)=1$

Решение.

Пусть $t=x^2-7x+13$. тогда данное уравнение в силу $(x-3)(x-4)=x^2-7x+12$ можно записать в виде $t^2-t=0$.отсюда имеем $t_1=0$, $t_2=1$. Осталось решить два квадратных уравнения: 1) $x^2-7x+13=0$; 2) $x^2-7x+13=1$.

Ответ: $\{3;4\}$.

7. (x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=63.

Решение.

$(x+1)(x+4)=x^2+5x+4$, $(x-2)(x+7)=x^2+5x-14$.

Пусть $t=x^2+5x-14$, тогда из исходного уравнения имеем t(t+18)=63.

Его корни $t_1=3, t_2=-21$. Остается решить два квадратных уравнения:

1) $x^2+5x-14=3$; 2) $x^2+4x-14=-21$.

Ответ: $x=\dfrac{-5\pm\ 93}{2}$.

ОМ 3. Метод строгой монотонности.

Он основан на **теореме 1:**

Если функция y =f(x) строго монотонна на множестве X, то уравнение f(x)=a (a=const) не может иметь на множестве X более одного корня.

Действительно, иногда с помощью каких либо приемов(или подбором) удается найти один корень данного уравнения. Если при этом к этому уравнению применима приведенная выше теорема, то найденный корень – единственный.

Напомним, что функция называется *строго монотонной* на множестве X, если она либо возрастающая, либо убывающая на множестве X. степенная функция вида $y=x^{2k-1}, k \in N$ возрастающая на множестве R, а степенная функция $y=x^{2k}; k \in N$ возрастает на множестве $[0;\infty)$ и убывает на множестве $(-\infty;0]$.

Изучение нового материала(основной объем).
ИНМ(о).

План:

1. Алгебраические уравнения n-го порядка.
2. Общие методы решения алгебраических уравнений (ОМ).
3. ОМ. Метод разложения на множители.
4. ОМ. Метод подстановки.
5. ОМ. Метод строгой монотонности.
6. ОМ. Метод сравнения множеств значений.

1. Алгебраические уравнения n-го порядка.

Уравнения вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (1)$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ - действительные числа (коэффициенты), n- натуральное число, а x- искомая неизвестная величина, называются **алгебраическими уравнениями**. При $a_n \neq 0$ уравнение (1) называется **алгебраическим уравнением n-го порядка.**

Например: $x^4 + 7x^2 - 8 = 0$, $\qquad 3x^3 + 7x^2 + 3x + 1 = 0$.

2. Общие методы решения (МО) с точки зрения алгебраических уравнений.

Систематизация методов решения алгебраических уравнений начинается с осознания того, что существуют методы решения уравнений, применяемые к отдельным представителям любого типа. Это общие методы: метод разложения на множители и метод замены переменной. Сюда же необходимо причислять методы, основанные на использовании строгой монотонности, либо возможности сравнить множества значений левой и правой частей уравнений.

ОМ 1. Метод разложения на множители.

В общем варианте идея этого метода выражена следующей цепочкой преобразований данного уравнения

$F(x)=g(x) \Leftrightarrow f(x)-g(x)=0 \;\Leftrightarrow\; h_1(x)\, h_2(x)=0$.

Далее рассматривается либо равносильную совокупность систем

1) $\begin{cases} h_1(x) = 0 \\ h_2(x) - имеет - смысл \end{cases}$; $\qquad$ 2) $\begin{cases} h_2(x) = 0 \\ h_1(x) - имеет - смысл \end{cases}$;

либо совокупность двух уравнений:

а) $h_1(x)=0$;

б) $h_2(x)=0$.

Во втором случае могут быть получены посторонние корни, поэтому обязательна проверка корней или иной их анализ на пригодность.

В случае уравнения (1) правая его часть равна 0, причем допустимыми значениями неизвестной x являются любые действительные числа. Следовательно, необходимо лишь разложить на множители многочлен

$$P_n(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0$$

В произведение многочленов $Q_m(x)$ и $H_k(x)$ меньшей , чем n, степени.

Если $P_n(x)=Q_m(x)\,H_k(x)$, то (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} Q_m(x)=0 \\ H_k(x)=0 \end{array}\right.$.

Одним из основных способов разложения на множители при этом служит прием группировки слагаемых. Возможны следующие случаи:

1. Вынесение за скобку некоторого общего выражения.
2. Выделение полных квадратов вида $a^2 \pm 2ab + b^2$.
3. Выделение разности квадратов $a^2 - b^2$.
4. Выделение полных кубов вида $a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$.
5. Выделение суммы (разности) кубов $a^3 \pm b^3$.

Этот список легко продолжить, если иметь в виду формулы вида $(a \pm b)^n$, $a^n - b^n$, $a^{2k+1}+b^{2k+1}$, $(a+b+c)^k$ и др.

Примеры:

1. $x^4+x^3-x^2-2x-2=0$

$\Leftrightarrow (x^4+x^3+x^2)-(2x^2+2x+2)=0 \Leftrightarrow x^2(x^2+x+1)-2(x^2+x+1)=0 \Leftrightarrow (x^2-2)(x^2+x+1)$

$\Leftrightarrow x=\pm\ 2$

$+2x^2-2x^2$ $\qquad$ $2x^2+2x^2=(2x)^2$

2. $x^4-4x^3+2x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow \left[(x^2)^2-2x^2\cdot(2x)+(2x)^2\right]-2x^2+4x+1=0 \Leftrightarrow$

рядом

$\Leftrightarrow (x^2-2x)^2-2(x^2-2x)+1=0 \Leftrightarrow ((x^2-2x)-1)^2=0 \Leftrightarrow x^2-2x-1=0 \Leftrightarrow x=1\pm\ 2$

3. $x^4-5x^2+4=0 \Leftrightarrow \left[(x^2)^2-2x^2\cdot 2+4\right]-x^2=0 \Leftrightarrow (x^2-2)^2-x^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-2-x)(x^2-2+x)=0 \Leftrightarrow x\in\{-2;-1;1;2\}$.

4. $x^3-x^2-x=\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^3-3x^2-3x=1 \Leftrightarrow 4x^3=x^3+3x^2+3x+1 \Leftrightarrow 4x^3=(x+1)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\sqrt[3]{4}=x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$.

5. $9x^3+15x^2+9x+2=0 \Leftrightarrow (x^3+3x^2+3x+1)+(8x^3+3\cdot 4x^2+3\cdot 2x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+(2x+1)^3=0 \Leftrightarrow (x+1)^3=-(2x+1)^3 \Leftrightarrow x+1=-(2x+1) \Leftrightarrow x=-\dfrac{2}{3}$.

Примеры.

8. $x^5+3x^3+5x-15\ \ 2=0$.

Решение. Заметим, что функции $y_1=5x-15\ \ 2; y_2=3x^3; y_3=x^5$ являются возрастающими на всем R . Следовательно возрастающей является функция y $=y_1+y_2+y_3$. тогда в силу теоремы 1, данное уравнение не может иметь более одного корня. Остается проверить, что ему удовлетворяет значение x = 2 .

Ответ: 2. .

9. $x^6+2x^4+3x^2-54=0$.

Решение. Очевидно, что функция f(x) $=x^6+2x^4+3x^2-54$ возрастает на множестве $[o;\infty)$

Следовательно, на этом множестве у исходного уравнения не более одного решения. Это x = 3 .теперь достаточно заметить, что функция f четная и поэтому уравнению f(x)=0 вместе с каждым x удовлетворяет также значение –x, или использовать убывание f на множестве $(-\infty;0]$.

Ответ: ± 3 .

Замечание. Иногда вместо теоремы 1 применяется ее **следствие.**
Если функция y =f(x)-g(x) строго монотонна на множестве X, то уравнение f(x)=g(x) не может иметь более одного корня.

ОМ 4. Метод сравнения множеств значений.

В его основе **теорема 2:**
Если для всех $x \in X$ выполняются неравенства $f(x) \geq a$ и $g(x) \leq a$,(*) то уравнение f(x)=g(x) на множестве X равносильно системе двух уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases} f(x)=a \\ g(x)=a \end{cases}.$$

Примеры.

10. $x^8-7x^4-4x^2+20=0$. выделяем полный квадрат

Решение. Данное уравнение равносильно $x^8-8x^4+16=-(x^4-4x^2+4)$.
Выражение в левой части этого уравнения есть полный квадрат, следовательно, оно неотрицательно на R. Аналогично выражение в правой части не может принимать положительных значений. По теореме 2 это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (x^4-4)^2=0 \\ (x^2-2)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=2 \\ x=\pm\ \ 2 \end{cases} \Leftrightarrow x=\pm\ \ 2.$$

Ответ: ± 2 .

Замечание. ***Если на X одно из неравенств (*) строгое, то уравнение f(x)=g(x) не имеет корней.***

Тренинг- минимум.
(т-м).

Метод разложения на множители.

1) $2x^4 + x^2(x+2) - 3(x+2)^2 = 0, (\{-1;2\})$

2) $x^4 + x^2 + 6x = 8; (\{-2;1\}$.

3) $x^6 - 7x^2 + \quad 6 = 0; (\{\pm {}^4\ 6; \pm \frac{\sqrt{10-\sqrt{6}}}{2}\}$.

4) $(x^2+3x-4)^3 + (2x^2-5x+3)^3 = (3x^2-2x-1)^3; (\left\{1;-4;\frac{3}{2};\frac{-1}{3}\right\})$.

5) $x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 6x + 7 = 0$; (нет корней).

Метод подстановки.

1) $(x^2-6x-9)^2 = x(x^2-4x-9); (\left\{-1;9;\frac{5\pm\sqrt{61}}{2}\right\}$.

2) $\frac{x^2+4}{x} + \frac{x}{x^2+3x+4} + \frac{11}{2} = 0; (\{-4;-1\})$. ***Указание.*** Каждую дробь почленно разделить на х и применить подстановку $t = x + \frac{4}{x}$.

3) $\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1; (\left\{\frac{7}{2};\frac{1}{2}\right\})$. ***Указание.*** $t = 4x + \frac{7}{x}$.

4) $(x^2-3x+1)(x^2+3x+2)(x^2-9x+20) = -30$. ***Указание.*** Разложить выражения во 2 и 3 скобках и перемножить линейные множители по другому, применить подстановку $t=x^2-3x+1$.

Тогда $t_1=6$, $t_{2,3} = 5 \pm \quad 30$.

Метод строгой монотонности.

1) $x^{19} + x^{99} = 3 - x^{1999}; (\{1\})$.

2) $x + 9x^9 + x^{98} = 11; (\pm 1)$.

Метод сравнения множеств значений.

1) $x^2 + \frac{1}{x^2} = 1 - x^6 + 2x^3; (1)$.

2) $x + \frac{1}{x} = \frac{3}{2} + x - \frac{x^2}{2}$;(1).

3) $2x - 2 \quad 2x + 3 + 4 = 1 - \quad x^2 - 2x + 2$; (решений нет).

Изучение нового материала.
(дополнительный объем)
(ИНМ(д)).

1.Метод перебора делителей крайних коэффициентов.

В случае уравнения (1) с целыми коэффициентами известен метод поиска всех его рациональных корней, если они имеются. Метод основан на следующей **теореме3**:

Если несократимая дробь $\frac{p}{g}$ -корень алгебраического уравнения (1)степени n с целыми коэффициентами $a_i, i = 0,1,2,...,n$, то p- делитель свободного члена a_0, а g – делитель старшего коэффициента a_n. В частности, если a_n =1, то каждый рациональный корень x_0 уравнения (1) с целыми коэффициентами является целым числом, причем делителем свободного члена a_0.

В силу этой теоремы для того, чтобы найти рациональные корни уравнения (1) с целыми коэффициентами, достаточно проверить все дроби $\frac{p}{g}$, для которых a_0 делится (без остатка) на p и a_n делится на g.

Примеры.

1) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0.$

Решение.

Все коэффициенты данного уравнения целые, причем n=3 и a_3=1. Поэтому достаточно проверить только делители свободного члена a_0=-21. Число -21 имеет 8 (целых) делителей: $\pm 1, \pm 3, \pm 7, \pm 21$. Из них уравнению удовлетворяют x=-7, x=-3, x=1. Поскольку у кубического уравнения не может быть более трех корней, найдены все корни.

Ответ: -7, -3, 1.

Заметим, что если количество имеющихся рациональных корней у уравнения (1) с целыми коэффициентами меньше, чем степень n, то сформулированная выше теорема также полезна. С ее помощью находят сначала все рациональные корни, а затем понижают степень уравнения. Эта возможность основана на следствии из **теоремы Безу:**

Если x_0 - корень уравнения (1), то многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ делится на x - x_0, т.е. имеется многочлен Q(x) степени n-1 такой, что $P_n(x) = (x - x_0)Q(x)$.

Таким образом, если x_0 - корень уравнения (1) , то для завершения решения достаточно найти коэффициенты многочлена Q(x) и решить уравнение Q(x)=0. Для поиска используется **схема Горнера** или деление многочлена P(x) на двучлен x - x_0 «уголком».

2). $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0.$

Решение. Здесь n=4 и $a_n = 1$, а свободный член $a_0 = -3$ имеет четыре делителя $\pm 1, \pm 3$. Проверка показывает, что x=1 и x=-1 являются корнями данного уравнения. Поскольку n=4, то могут быть еще два (действительных) корня. По теореме Безу многочлен P_4(x)= $x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$ делится на x -1 и x +1. В результате получим многочлен $x^2 - x + 3$. Дискриминант этого многочлена отрицателен, поэтому корней у него нет. Исходное уравнение имеет два корня 1 и -1.

Ответ: 1, -1.

2. Метод решения возвратных уравнений.

Уравнение (1) называется **симметрическим**, если $a_n = a_0, a_{n-1} = a_1, a_{n-2} = a_2 \ldots$, т.е. если равноудаленные от концов коэффициенты попарно равны.

Например, симметрическими являются уравнения:

$x^5 + 21x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 21x + 1 = 0, x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3x + 1 = 0$.

Многие симметрические уравнения удается решить. Для этого разработана методика понижения степени симметрического уравнения не менее, чем вдвое.

Пусть n=2k.Т.к. у симметрического уравнения $a_0 \neq 0$, то x=0 – не корень. Поэтому после деления обеих частей уравнения на x^k получим:

$$a_n x^k + a_{n-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x^{1-k} + a_0 x^{-k} = 0, \Leftrightarrow a_0(x^k + \frac{1}{x^k}) + a_1(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}) + \ldots + (x + \frac{1}{x}) + a_k = 0$$

Пусть $\boxed{t = x + \frac{1}{x}}$.

Применив соотношения типа: $x^2 + \frac{1}{x^2} = (x + \frac{1}{x})^2 - 2 = t^2 - 2$,

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = (x + \frac{1}{x})^3 - 3(x + \frac{1}{x}) = t^3 - 3t,$$

$$x^4 + \frac{1}{x^4} = (x^2 + \frac{1}{x^2})^2 - 2 = (t^2 - 2)^2 - 2 = t^4 - 4t^2 + 2,$$

уравнение, приведенное выше, сводим к алгебраическому уравнению степени k.

Пусть n=2k+1. Проверка показывает, что x=-1 является корнем (симметрического уравнения нечетной степени). Тогда делением его левой части на x+1 оно сводится к симметрическому уравнению степени 2k, т.е. к случаю, рассмотренному выше.

Примеры.

1) $2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$.

Решение. Это симметрическое уравнение 4-го порядка. Ясно, что $x \neq 0$. После деления левой части на x^2 и соответствующей группировки слагаемых получаем $2t^2 + 3t - 20 = 0, где\, t = x + \frac{1}{x}$.Следовательно t_1=-4, t_2=2,5 и остается решить два уравнения: $x + \frac{1}{x} = -4$ и $x + \frac{1}{x} = 2{,}5$.

Ответ: $-2 \pm \ 3, \frac{1}{2}, 2$.

Методика решения симметрических уравнений может быть обобщена. Рассмотрим это на примере так называемых **возвратных уравнений 4-го порядка.**

$ax^4 + вx^3 + cx^2 + вmx + am^2 = 0, (a \neq 0, m \neq 0)$. (6)

кососимметрические

Здесь $a_4 = a, a_3 = b, a_2 = c, a_1 = bm, a_0 = am^2, поэтому \frac{a_0}{a_4} = m^2 = (\frac{a_1}{a_3})^2$.

Такое соотношение позволяет выполнить деление на x^2 и ввести подстановку

$t = x + \frac{m}{x}$.

Действительно, из уравнения (6) получаем $a(x^2+\frac{m^2}{x^2})+b(x+\frac{m}{x})+c=0$,

$$at^2+bt+(c-2am)=0.$$

При m=-1 уравнение (6) называют **кососимметрическим.** К ним применима подстановка $t=x-\frac{1}{x}$.

Примеры.

2) $x^4+4x^3+2x^2-4x+1=0.(x=-1\pm\sqrt{2})$.

3) $3x^4-2x^3+4x^2-4x+12=0.(\textit{коней}\cdot\textit{нет})$.

Указание. Здесь m=2, поэтому подстановка $t=x+\frac{2}{x}$.

3. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим этот метод на примере алгебраического уравнения 4-го порядка. Известно, что каждый многочлен 4-го порядка может быть представлен как произведение двух квадратных многочленов $ax^4+вx^3+cx^2+dx+e=(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)$.

При этом должны быть выполнены следующие равенства коэффициентов при одинаковых степенях х слева и справа (если представить правое выражение в виде многочлена): $(x^0)e=c_1c_2$ $\quad(x^1)d=b_1c_2+b_2c_1$ $\quad(x^2)c=a_1c_2+a_2c_1+b_1b_2$

$(x^3)b=a_1b_2+a_2b_1$ $\quad(x^4)a=a_1a_2$

Т.о. , задача о разложении многочлена 4-го порядка сводится к задаче о нахождении величин $a_i,b_i,c_i,i=1,2$ по коэффициентам a,b,c,d,e с помощью равенств $(x^0)-(x^4)$.

В общем виде эту задачу решить столь же трудно, как и исходную. Поэтому применяют следующие упрощения. Принято считать, что $a_1=a$, $a_2=1$, $c_2=\frac{e}{c_1}$.

Остается найти три коэффициента: b_1,b_2,c_2.

Отметим, что при целых a,b,c,d,e коэффициенты разложения, в частности c_1,c_2, могут быть иррациональными.

Примеры.

1) $x^4-9x^2-6x-1=0$.

Решение. В силу изложенного выше имеем:

$x^4-9x^2-6x-1=(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x-\frac{1}{c_1})$.

Предполагая, что коэффициент $\frac{1}{c_1}$ будет целым числом, возьмем $c_1=1$. Тогда при любом х должно выполняться равенство $x^4-9x^2-6x-1=(x^2+b_1x+1)(x^2+b_2x-1)$.

Отсюда следует система уравнений:

$b_1+b_2=0$

$b_1b_2=-9$

$b_2-b_1=-6$

в результате получаем: $b_1=3,b_2=-3$.

Следовательно, разложение многочлена 4-го порядка найдено, а данное уравнение равносильно совокупности двух квадратных уравнений: 1) $x^2+3x+1=0$,
2) $x^2-3x-1=0$.

Ответ: $(\frac{-3\pm\ 5}{2};\frac{3\pm\ 13}{2})$.

4. Метод введения двух переменных.

Примеры.

1) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$. $13(x^3-1)=13(x-1)(x^2+x+1)$

Решение. Пусть $u=x^2+x+1, v=x-1$. Тогда $2u^2-7v^2=13uv$.

Получили однородное уравнение 2-го порядка относительно u и v. Легко заметить, что значение v=0 не годится для основного уравнения. Следовательно, поделив на v^2 и введя подстановку $t=\frac{u}{v}$, находим t_1=-0,5 и t_2=7. теперь осталось решить уравнения:

$$\frac{x^2+x+1}{x-1}=-0{,}5;\ \frac{x^2+x+1}{x-1}=7.$$

Ответ. (-1;-0,5;2;4).