

# ГРАФЫ КРАТЧАЙШИЕ ПУТИ



Школа::Кода  
Олимпиадное  
программирование

2020-2021 Таганрог

# Рассматриваемые алгоритмы

- Алгоритм Дейкстры

Находит кратчайшее расстояние от заданной вершины до всех остальных, базируется на обходе в ширину.

Асимптотика  $O(M \log(N))$ .

- Алгоритм Флойда-Уоршелла

Находит кратчайшее расстояние между всеми парами вершин.

Асимптотика  $O(N^3)$ .

# Приоритетная очередь (`std::priority_queue`)

1. Требуется подключение библиотеки `#include <queue>`
2. По умолчанию первый объект в очереди – самый наибольший.
3. Объявление объекта приоритетной очереди  
`priority_queue<'тип данных'> que;`  
или  
`priority_queue<'тип данных', 'тип контейнера'<'тип данных'>, 'тип компаратора'<'тип данных'>> que;`  
По умолчанию 'тип контейнера' – `std::vector`, а 'тип компаратора' – `std::less`.
4. Добавление объекта в очередь `que.push(obj);`
5. Получение первого объекта из очереди `que.top();`
6. Удаление первого элемента из очереди `que.pop();`
7. Проверка, пустая ли очередь `que.empty();`

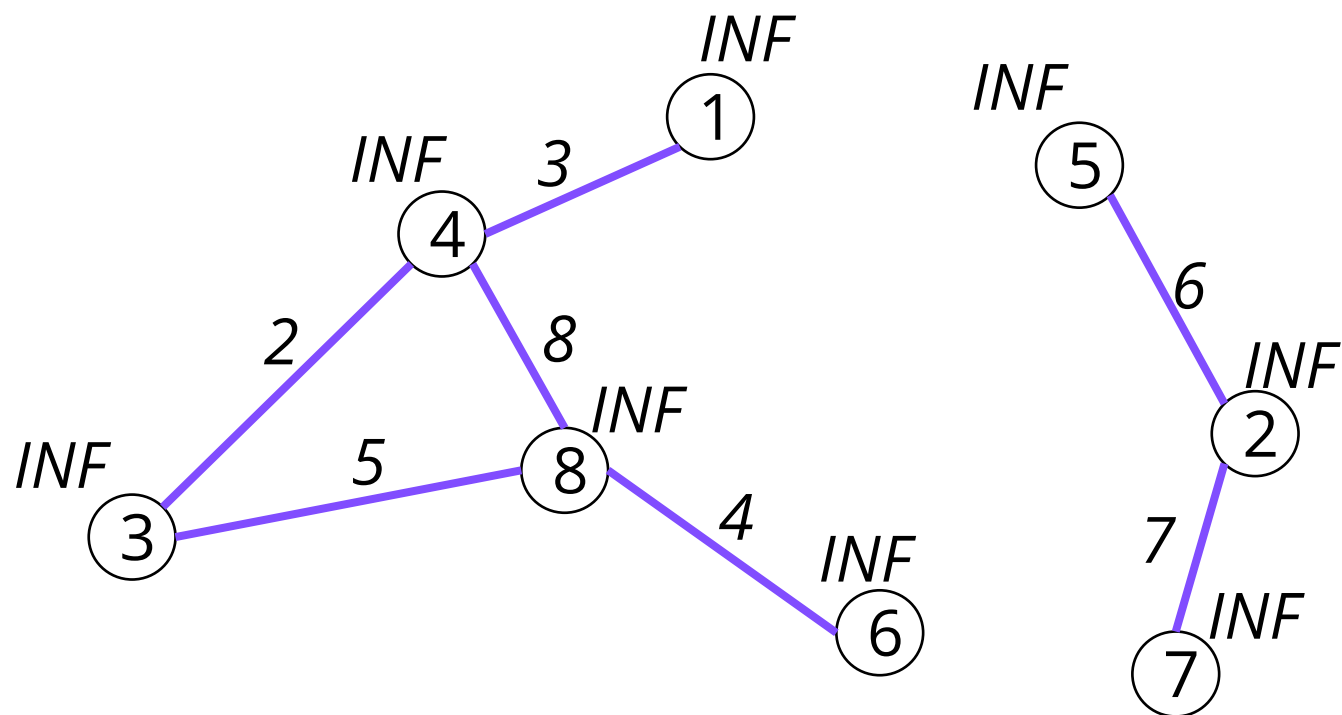
# Алгоритм Дейкстры

- Для каждой вершины будем хранить расстояние до неё. Изначально расстояние до всех вершин равно  $INF$  (очень большая константа), а до стартовой – 0.
- В каждой вершине помимо списка смежных с ней вершин будем хранить и длину ребра, которым они соединены.
- Во время обхода будем использовать не обычную, а приоритетную очередь. Хранить в ней будем пары чисел  $\langle \text{'расстояние до вершины'}, \text{'номер вершины'} \rangle$ .
- Положим в очередь пару  $\langle 0, \text{'стартовая вершина'} \rangle$ , следующие пункты будем повторять, пока очередь не опустеет.
- Вынем из очереди верхнюю пару. Если расстояние в этой паре не больше, чем текущее в вершине из этой пары, то перейдём к следующему шагу. Иначе – повторим текущий.
- Переберём все смежные вершины. Если расстояние до текущей вершины + длина ребра до смежной меньше текущего расстояния в смежной вершине, то обновим в ней расстояние и добавим в очередь пару  $\langle \text{'новое расстояние до смежной вершины'}, \text{'номер смежной вершины'} \rangle$ . Если для решения задачи нужно будет знать путь, то на этом шаге нужно запомнить, что предком смежной вершины является текущая.

# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 0

Приоритетная очередь:

$\langle 0, 1 \rangle$



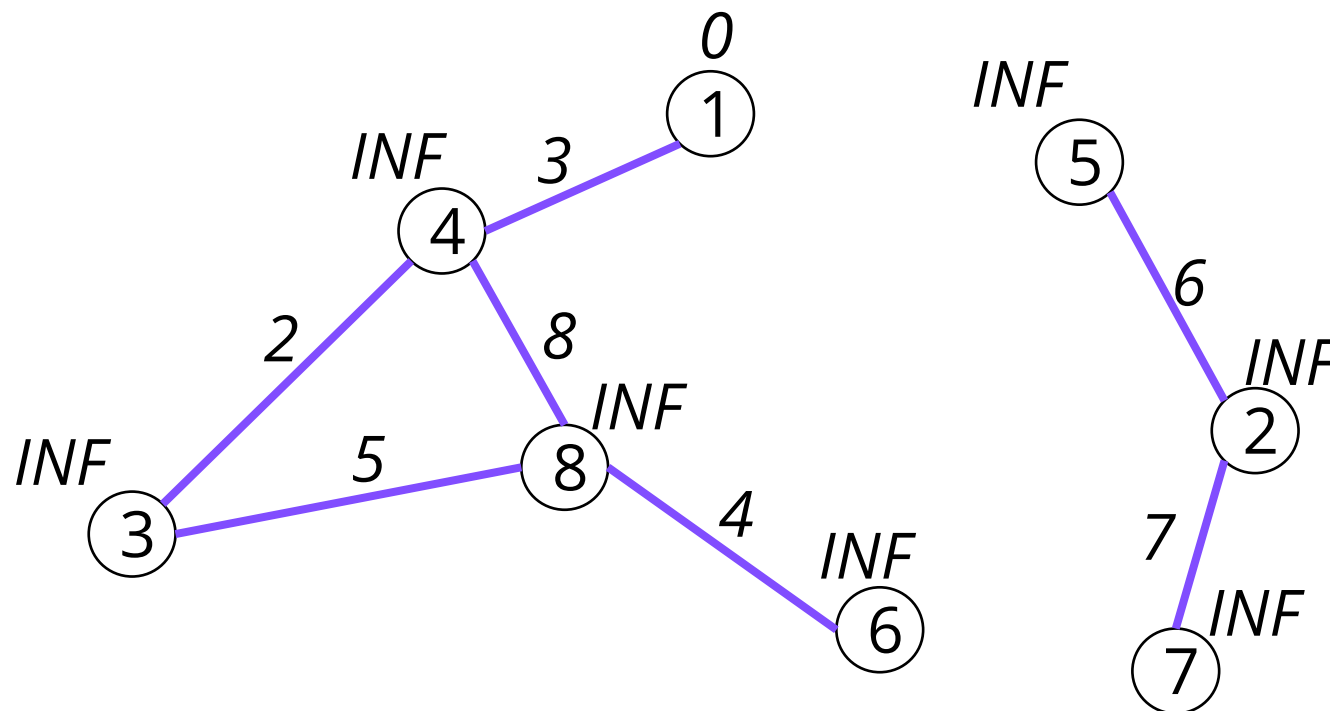
# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 1

Приоритетная очередь:

<empty>

Рассматриваемая пара:

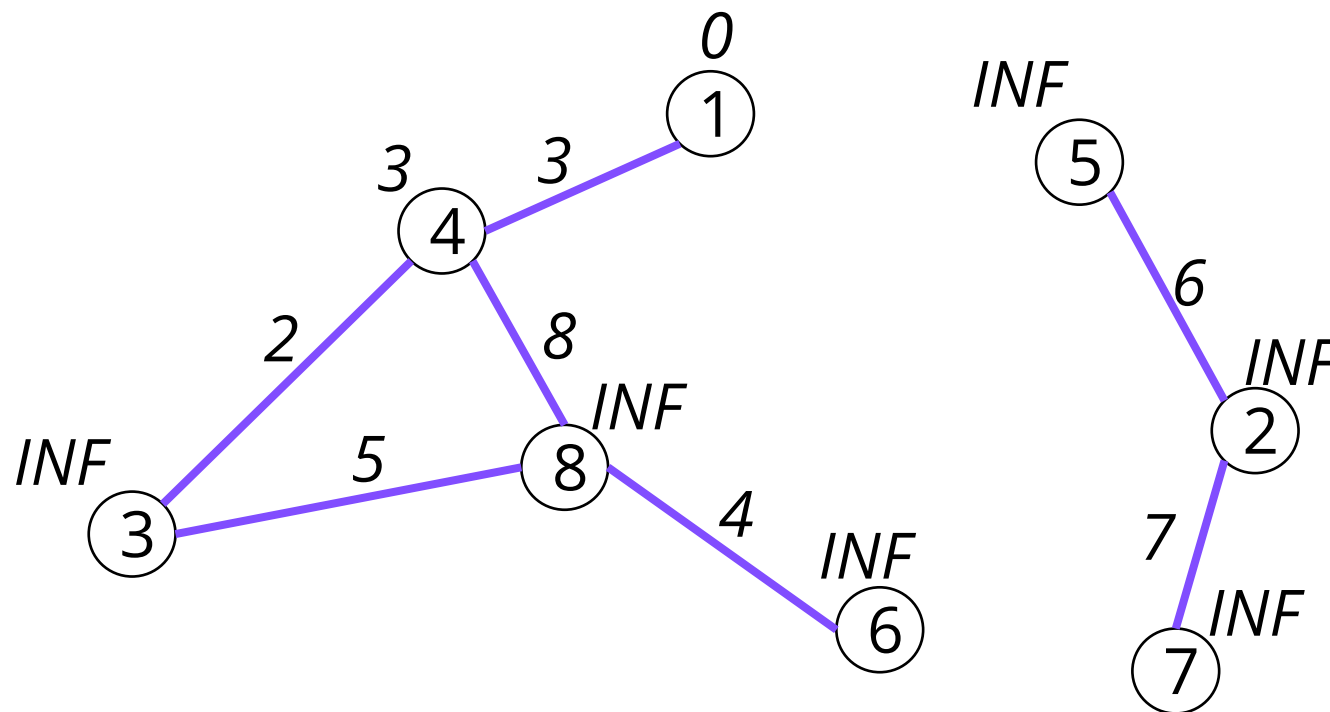
<0, 1>



# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 2

Приоритетная очередь:

$\langle 3, 4 \rangle$



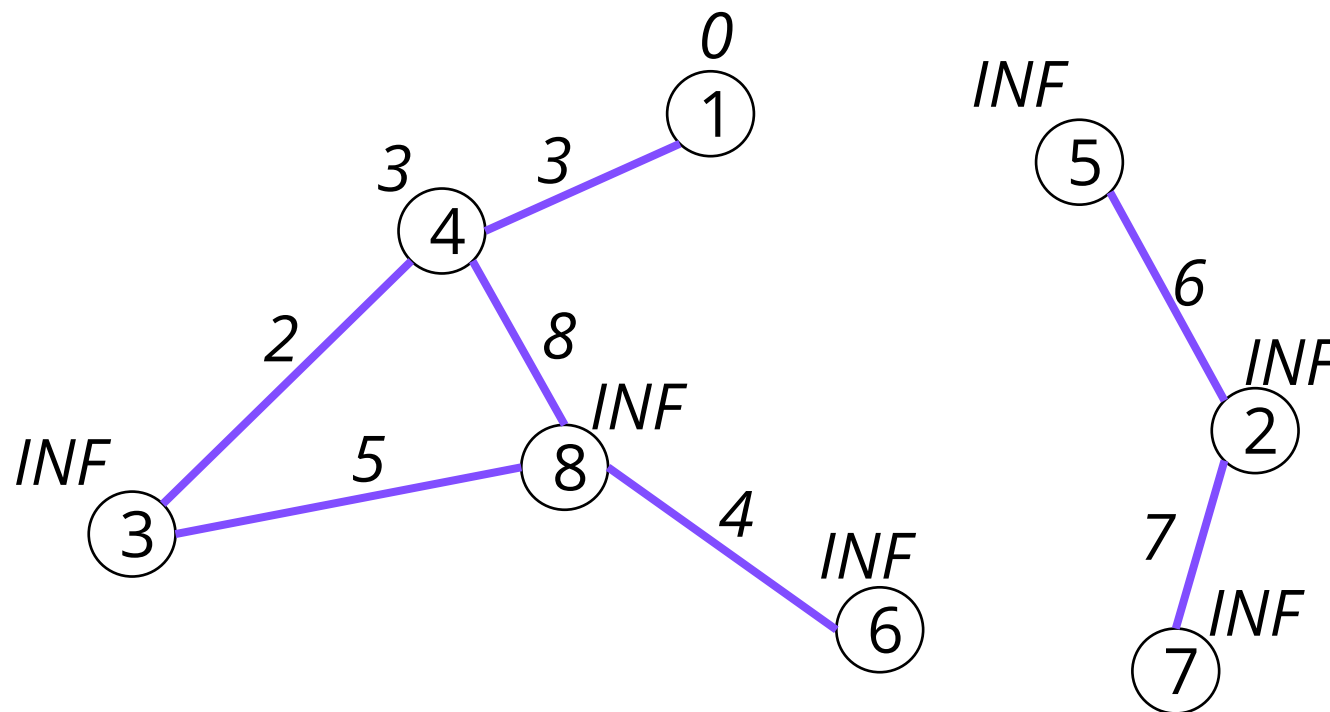
# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 3

Приоритетная очередь:

<empty>

Рассматриваемая пара:

<3, 4>

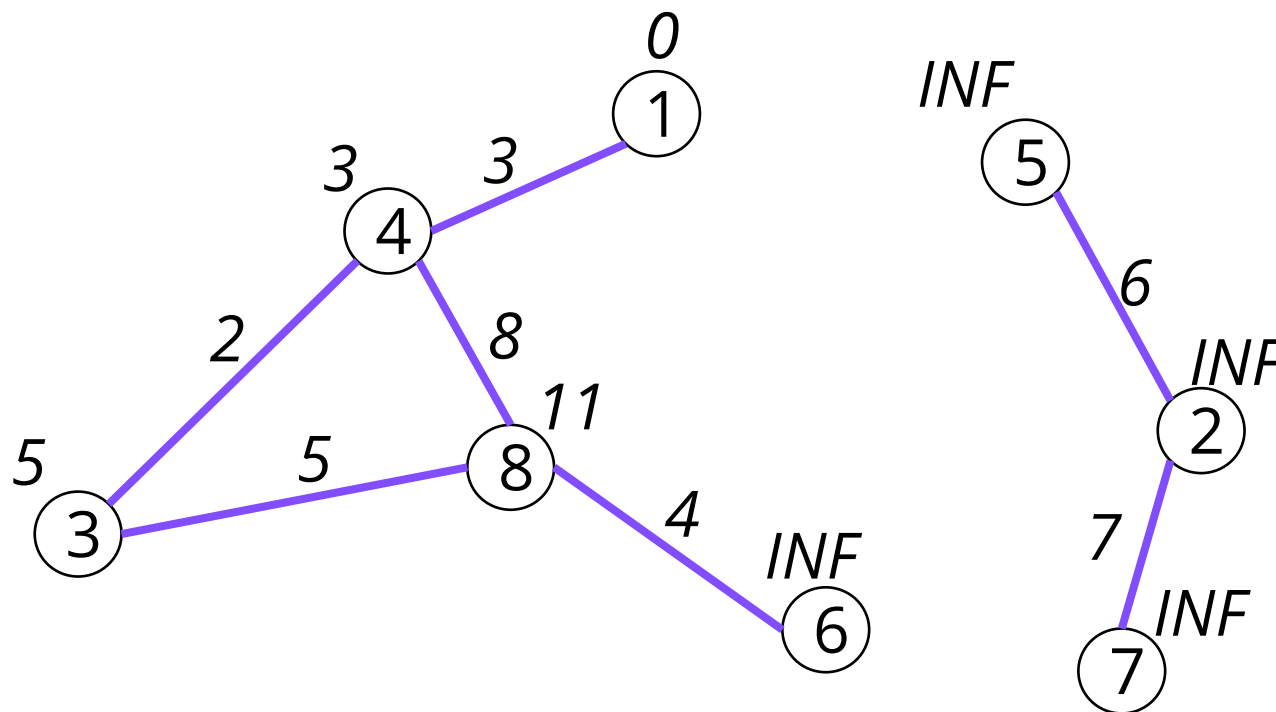




# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 4

Приоритетная очередь:

$\langle 5, 3 \rangle$   
 $\langle 11, 8 \rangle$



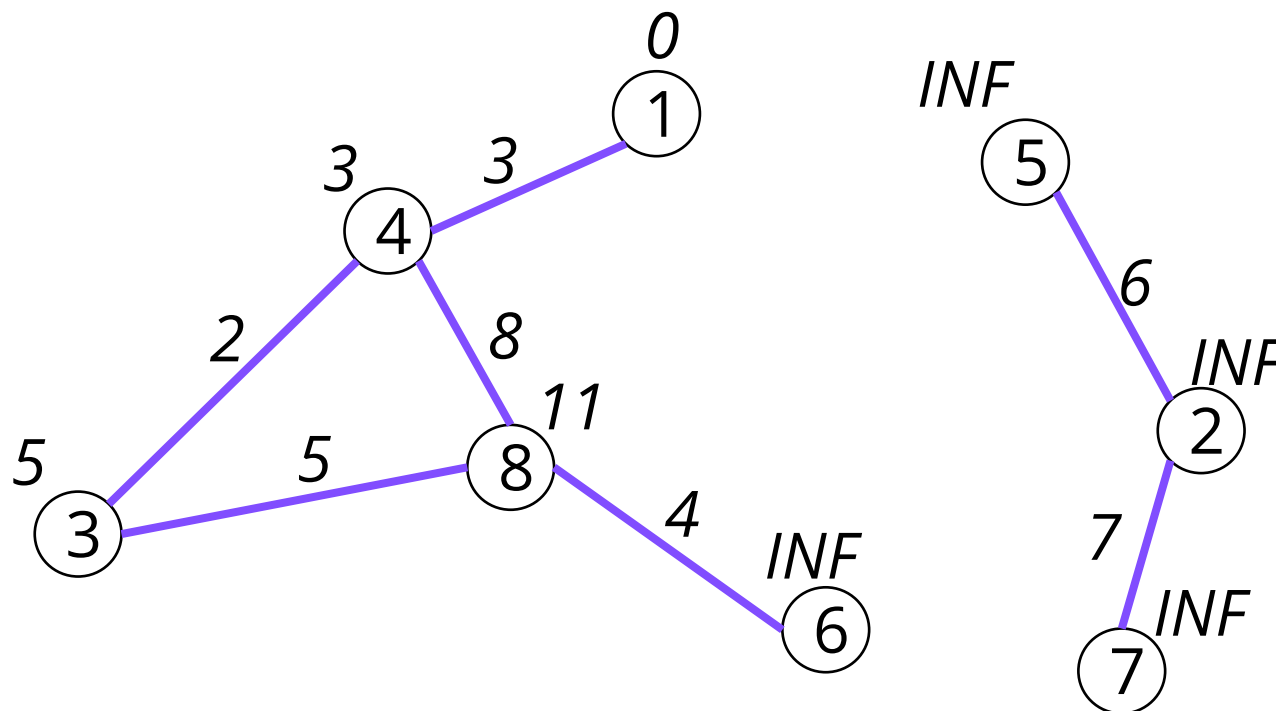
# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 5

Приоритетная очередь:

$\langle 11, 8 \rangle$

Рассматриваемая пара:

$\langle 5, 3 \rangle$

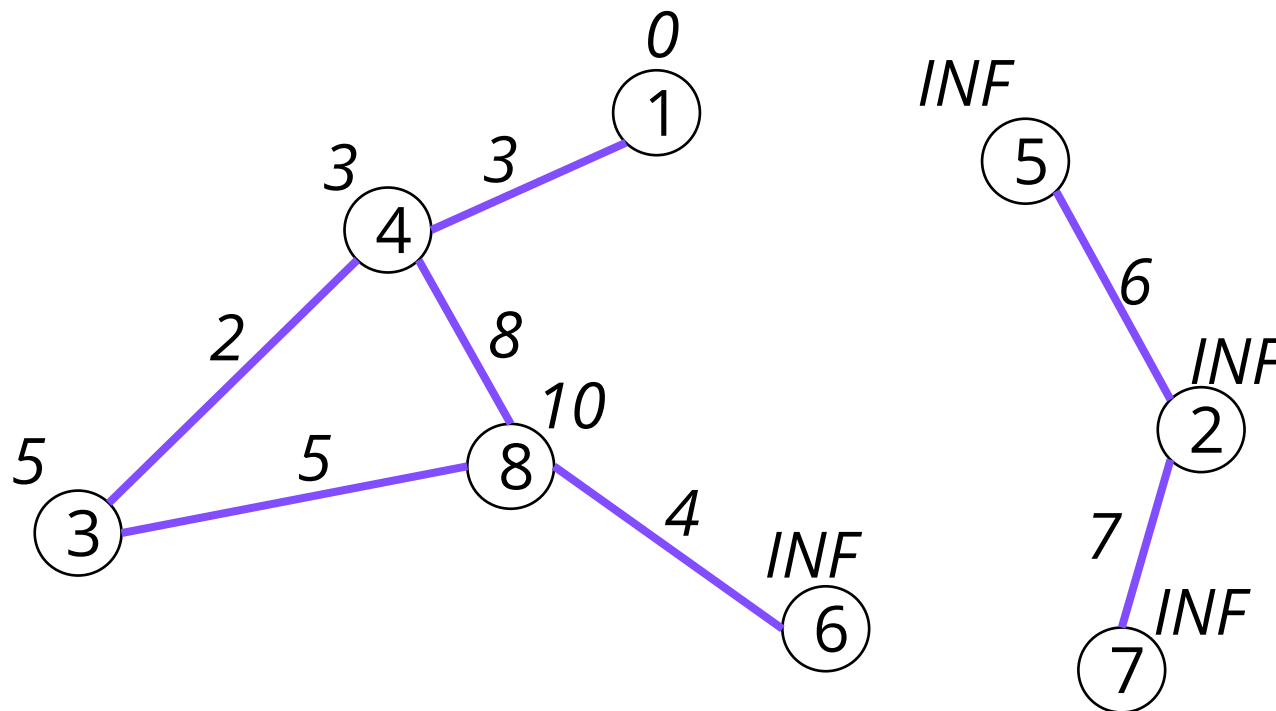


# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 6

Приоритетная очередь:

$\langle 10, 8 \rangle$

$\langle 11, 8 \rangle$



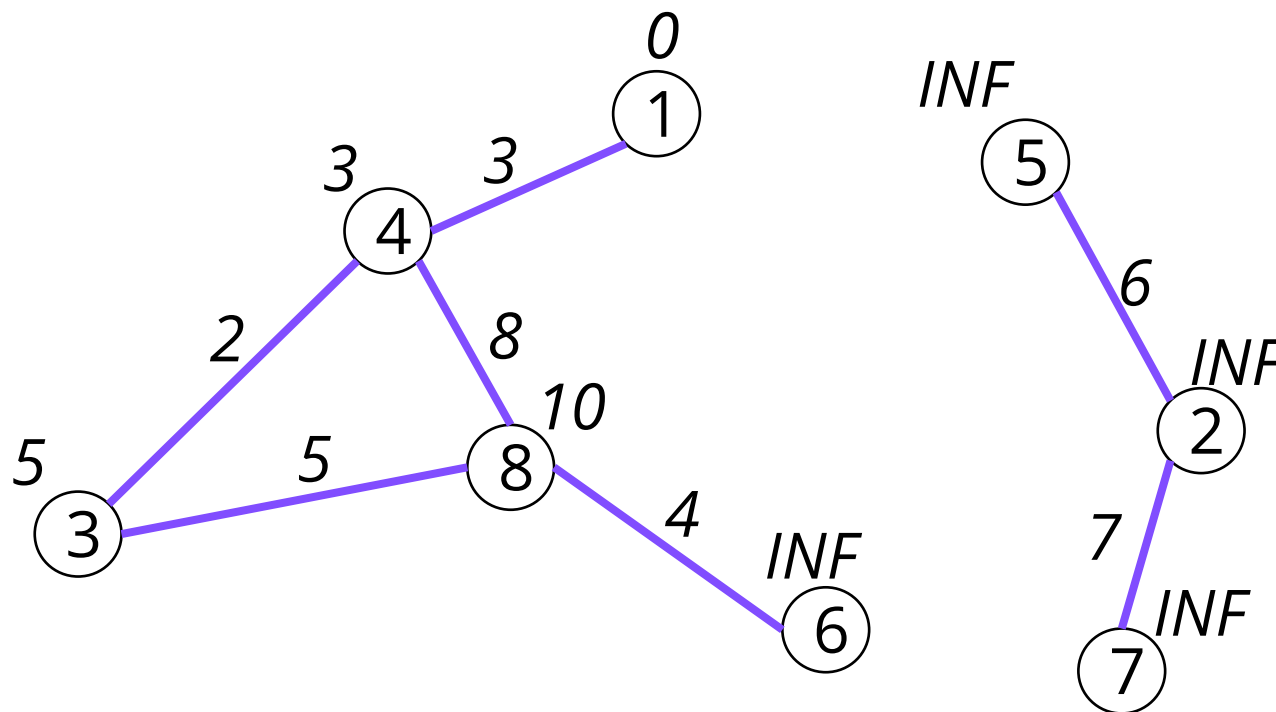
# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 7

Приоритетная очередь:

$\langle 11, 8 \rangle$

Рассматриваемая пара:

$\langle 10, 8 \rangle$

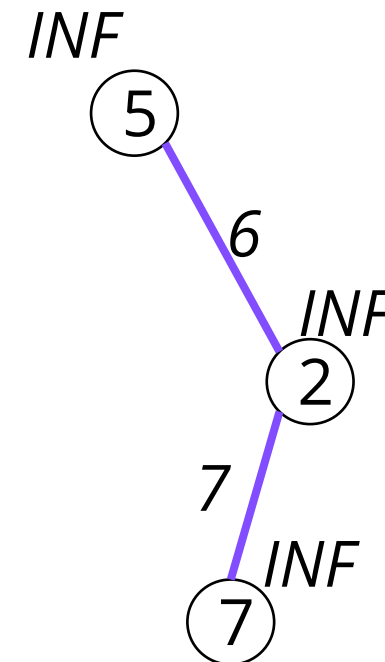
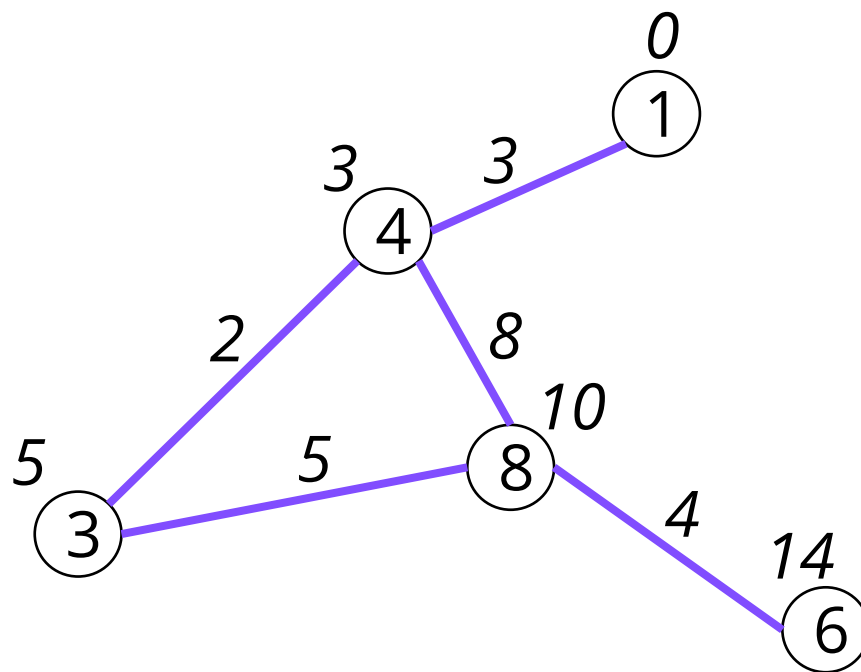


# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 8

Приоритетная очередь:

$\langle 11, 8 \rangle$

$\langle 14, 6 \rangle$



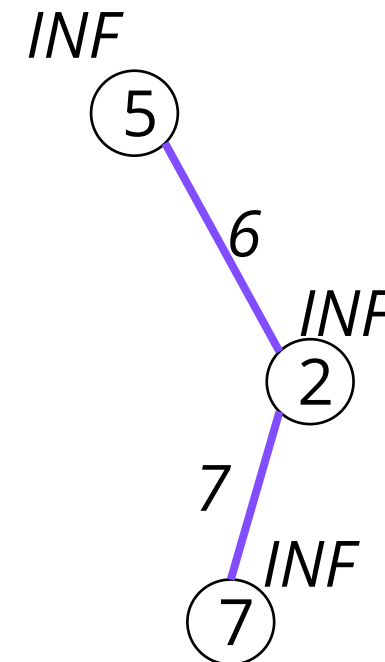
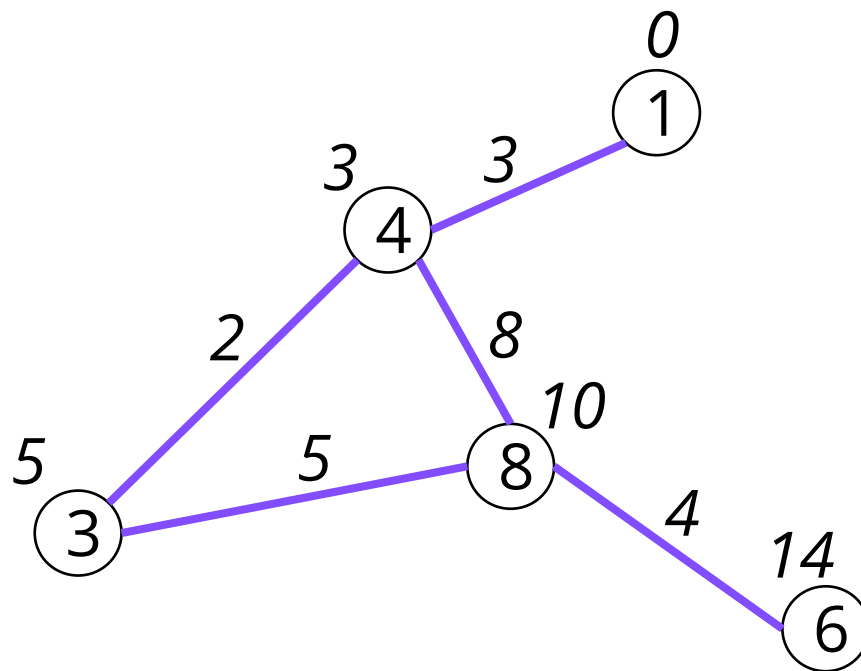
# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 9

Приоритетная очередь:

$\langle 14, 6 \rangle$

Рассматриваемая пара:

$\langle 11, 8 \rangle$



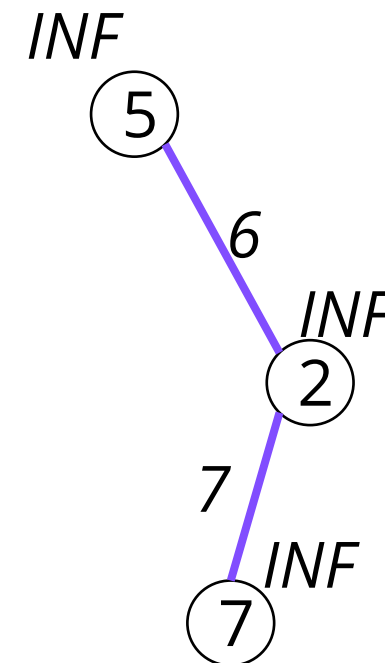
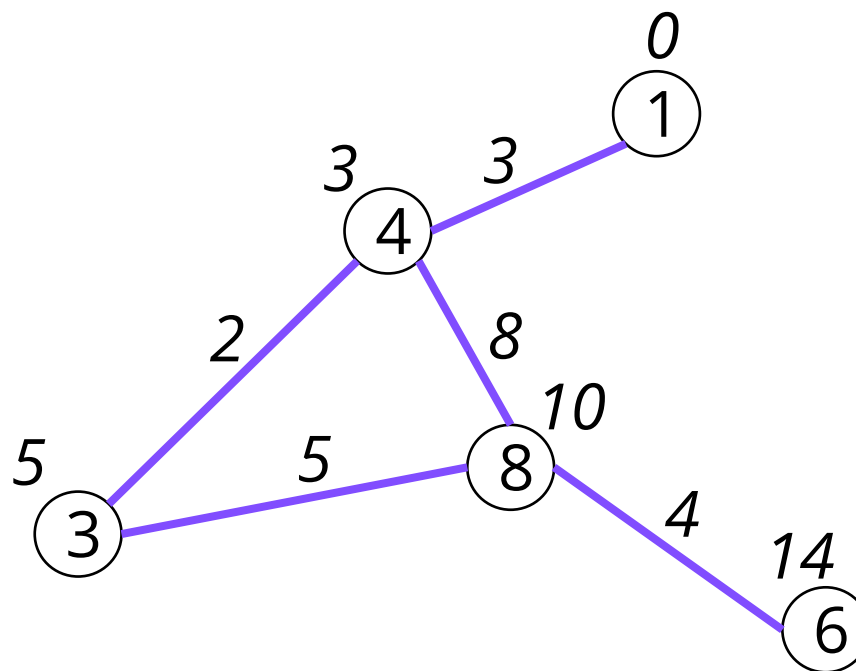
# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 10

Приоритетная очередь:

<empty>

Рассматриваемая пара:

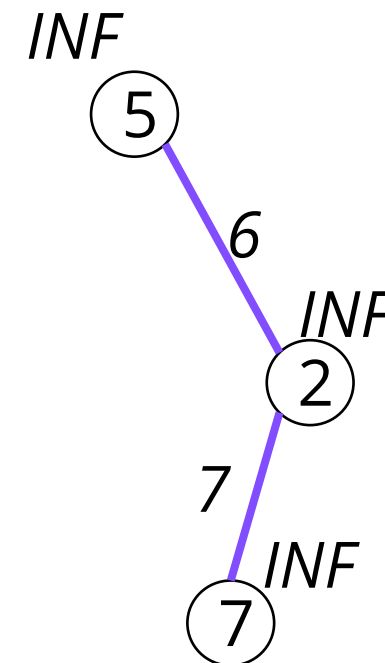
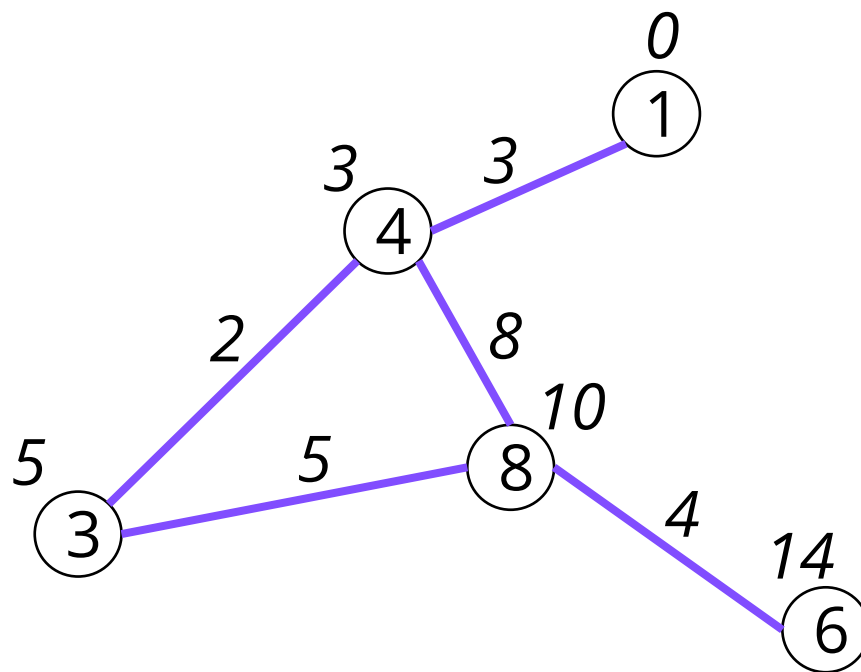
<14, 6>



# Алгоритм Дейкстры. Пример. Шаг 11

Приоритетная очередь:

<empty>





# Задача

Пусть дан ненаправленный взвешенный граф из  $N$  вершин и  $M$  рёбер. Рёбра описываются числами  $U, V$  и  $D$ , которые означают, что между вершинами с номерами  $U$  и  $V$  есть ребро длиной  $D$ . Далее даны два числа  $S$  и  $F$  – номера вершин, между которыми нужно найти кратчайший путь.

## Решение

Напишем алгоритм Дейкстры с запоминанием предка. Запустим алгоритм из вершины  $S$ , после чего восстановим путь перемещаясь по предкам из вершины  $F$ .

# Реализация

Структура графа



Алгоритм Дейкстры →

```
const int INF = 1e9;
struct Node
{
    vector<pair<int, int>> to;
    int dist = INF;
    int parent = -1;
};
vector<Node> g;
```

```
void dijkstra(int s)
{
    priority_queue<pair<int, int>> q;
    q.push(make_pair(0, s));
    g[s].dist = 0;
    while (!q.empty())
    {
        int d = -q.top().first;
        int v = q.top().second;
        q.pop();
        if (g[v].dist < d)
            continue;
        for (int i = 0; i < g[v].to.size(); ++i)
        {
            int u = g[v].to[i].first;
            int new_d = d + g[v].to[i].second;
            if (new_d < g[u].dist)
            {
                g[u].dist = new_d;
                g[u].parent = v;
                q.push(make_pair(-new_d, u));
            }
        }
    }
}
```

# Реализация

Ввод графа и запуск  
алгоритма

```
int main()
{
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    g.resize(n);
    for (int i = 0; i < m; ++i)
    {
        int u, v, d;
        cin >> u >> v >> d;
        --u; --v;
        g[u].to.push_back(make_pair(v, d));
        g[v].to.push_back(make_pair(u, d));
    }
    int s, f;
    cin >> s >> f;
    --s; --f;
    dijkstra(s);
}
```

Восстановление пути

```
if (g[f].dist == INF)
{
    cout << -1 << endl;
    return 0;
}
vector<int> path;
path.push_back(f);
while (g[path.back()].parent != -1)
    path.push_back(g[path.back()].parent);
reverse(path.begin(), path.end());
for (int i = 0; i < path.size(); ++i)
    cout << path[i] + 1 << ' ';

return 0;
```

# Алгоритм Флойда-Уоршелла

- Будем хранить матрицу расстояний между всеми парами вершин  $d[N][N]$ .
- Если в графе есть ребро из вершины  $i$  в вершину  $j$  длиной  $L$ , то  $d[i][j] = L$ . Расстояние от любой вершины до самой себя равно 0, т.е.  $d[i][i] = 0$ , если  $i = j$ . Для всех остальных пар  $i$  и  $j$   $d[i][j] = INF$ .
- Алгоритм состоит из  $N$  фаз. Перед  $k$ -ой фазой в  $d[i][j]$  хранится минимальный путь, проходящий через вершины с номерами, меньшими  $k$ , или  $INF$ , если пути между данными вершинами не найдено.
- Во время  $k$ -ой фазы путь между вершинами  $i$  и  $j$  может либо сохраниться, либо пройти через вершину с номером  $k$ , если суммарный путь от вершины  $i$  в вершину  $k$  и из вершины  $k$  в вершину  $j$  меньше, чем  $d[i][j]$ . То есть на  $k$ -ой фазе  $d[i][j] = \min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j])$ .
- Алгоритм работает как с ориентированными так и с неориентированными графами. Алгоритм не работает, если в графе есть циклы с отрицательным весом.

# Реализация

- Пусть дан взвешенный ориентированный граф из  $N$  вершин и  $M$  рёбер. Требуется найти кратчайшее расстояние между всеми парами вершин. Веса рёбер положительны.

```
int main()
{
    int n, m;
    cin >> n >> m;
    vector<vector<int>> d(n, vector<int>(n, INF));
    for (int i = 0; i < m; ++i)
    {
        int u, v, l;
        cin >> u >> v >> l;
        --u; --v;
        d[u][v] = l;
    }
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        d[i][i] = 0;
    for (int k = 0; k < n; ++k)
        for (int i = 0; i < n; ++i)
            for (int j = 0; j < n; ++j)
                d[i][j] = min(d[i][j], d[i][k] + d[k][j]);
    for (int i = 0; i < n; ++i)
    {
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            if (d[i][j] != INF)
                cout << d[i][j] << ' ';
            else
                cout << -1 << ' ';
        cout << '\n';
    }
}
```

# Восстановление пути в алгоритме Флойда-Уоршелла

- Заведём дополнительную матрицу  $p[N][N]$ , заполненную -1. Когда расстояние между вершинами  $i$  и  $j$  обновляется благодаря проходу через вершину  $k$  запомним это ( $p[i][j] = k$ ).
- Если  $d[i][j] = INF$ , то пути не существует, а значит восстанавливать нечего.
- Теперь мы знаем, что если путь существует  $p[i][j] = -1$ , то кратчайший путь между этими вершинами – непосредственный переход из  $i$  в  $j$ . Иначе следует восстановить пути из  $i$  в  $p[i][j]$  и из  $p[i][j]$  в  $j$ , объединение которых и будет восстановленным путём из  $i$  в  $j$ .
- Восстановление удобно реализуется рекурсивной функцией.

# Реализация

```
vector<int> path;
void restore_path(int u, int v, vector<vector<int>>& p)
{
    if (p[u][v] == -1)
    {
        path.push_back(u);
        path.push_back(v);
        return;
    }
    restore_path(u, p[u][v], p);
    path.pop_back();
    restore_path(p[u][v], v, p);
}
```

↑  
Функция для восстановления

Изменения в алгоритме

↓

```
vector<vector<int>> p(n, vector<int>(n, -1));
for (int k = 0; k < n; ++k)
    for (int i = 0; i < n; ++i)
        for (int j = 0; j < n; ++j)
            if (d[i][j] > d[i][k] + d[k][j])
            {
                d[i][j] = d[i][k] + d[k][j];
                p[i][j] = k;
            }

int s, f;
cin >> s >> f;
--s; --f;
restore_path(s, f, p);
for(int i = 0; i < path.size(); ++i)
    cout << path[i] + 1 << ' ';
```