§ 13. Поверхности второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка имеет следующий вид:

$$F(x, y, z) = Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Kyz + 2Gx + 2Ly + 2Mz + N = 0,$$

где $A, B, ..., N$ – любые заданные числа, но A, B, C, D, E, K одновременно не равны нулю $\left(A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + E^2 + K^2 \neq 0\right)$.

Как и для кривых второго порядка, можно показать, что для каждого уравнения указанного вида легко найти специальную декартову систему координат, в которой оно примет наиболее простой, так называемый, канонический вид, позволяющий исследовать форму этой поверхности.

После полного исследования всех возможных канонических уравнений можно убедиться, что существуют различные типы поверхностей второго порядка, среди которых есть мнимые, а также распадающиеся на пару плоскостей. Ограничимся изучением вещественных поверхностей второго порядка.

1⁰. Сфера. Точками сферы являются те, и только те точки пространства, расстояние от которых до заданной точки M равно R. В декартовой системе координат сфера, имеющая центр в точке $M(a; b; c)$ и радиус R, определяется уравнением

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2. \qquad (1)$$

Если центр сферы находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \qquad (1')$$

2^0. Цилиндрические поверхности. Поверхность, описываемая прямой (образующей), движущейся вдоль некоторой линии (направляющей) и остающейся параллельной некоторому заданному направлению, называется цилиндрической.

Уравнение вида $F(x,y)=0$ в декартовой системе координат в пространстве определяет цилиндрическую поверхность, у которой образующие параллельны оси Oz. Аналогично, уравнение $F(x,z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси Oy, а $F(y,z)=0$ – цилиндрическую поверхность с образующими параллельными оси Ox.

Канонические уравнения цилиндров второго порядка:

эллиптический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

гиперболический цилиндр

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (3)$$

параболический цилиндр

$$y^2=2px. \qquad (4)$$

Образующие всех трех цилиндров, определяемых уравнениями (2), (3), (4), параллельны оси Oz, а направляющей служит соответствующая кривая второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), лежащая в плоскости Oxy.

Отметим, что кривую в пространстве можно задать либо параметрически, либо в виде линии пересечения двух поверхностей. Например, уравнения направляющей эллиптического цилиндра, т.е. уравнения эллипса в плоскости Oxy, имеют вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad z=0 .$$

Поверхности (2), (3), (4) схематически изображены на рисунках 1, 2, 3.

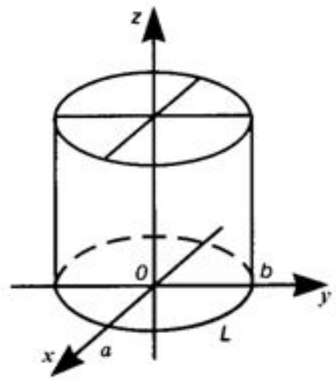

Рис. 1

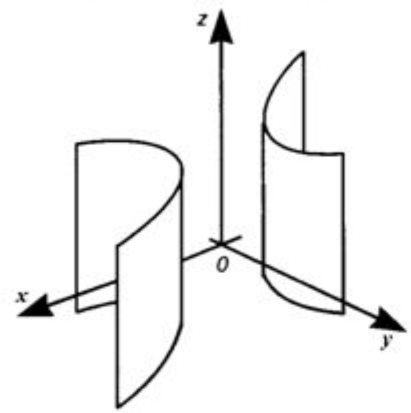

Рис. 2

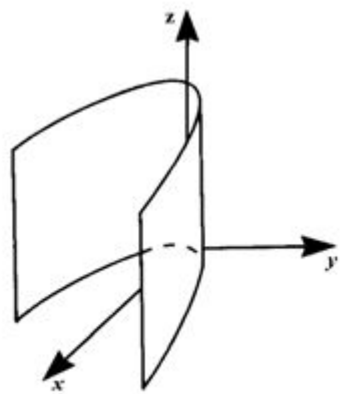

Рис. 3

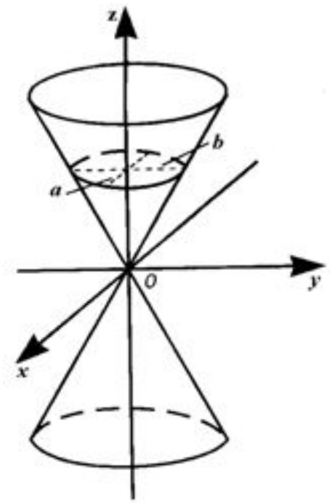

Рис. 4

3⁰. Конические поверхности. *Конической* называется поверхность, описываемая прямой (образующей), движущейся вдоль некоторой линии (направляющей) и проходящей через некоторую точку (вершину). Уравнение конуса второго порядка с вершиной в начале координат, осью которого служит ось Oz, записывается в виде

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,. \qquad (5)$$

Геометрически коническую поверхность можно изобразить, как показано на рис. 4.

Аналогично, уравнения $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$, $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ являются уравнениями конусов второго порядка с вершиной в начале координат, осями которых служат соответственно оси Oy, Ox.

4⁰. Пары плоскостей. *Пара пересекающихся плоскостей* задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\,, \qquad (6)$$

пара *параллельных* плоскостей задается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}=1, \qquad (7)$$

а пара *совпадающих* плоскостей –

$$x^2=0\,. \qquad (8)$$

5^0. Эллипсоид

Эллипсоидом (рис. 1) называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

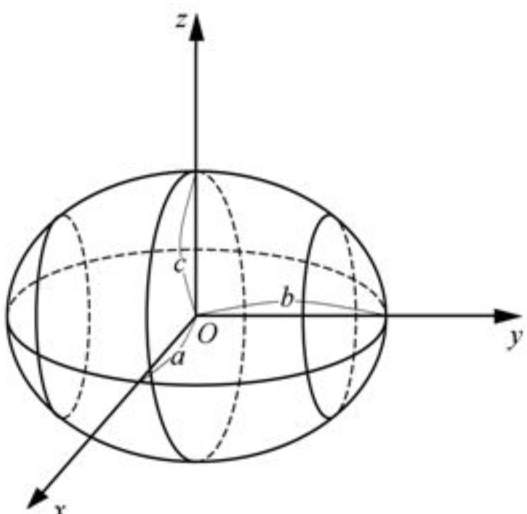

Рис. 1

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

где величины a, b, c называют *полуосями* эллипсоида.

Из уравнения (1) вытекает, что координатные плоскости являются плоскостями симметрии эллипсоида, а начало координат – центром симметрии.

Точки пересечения осей координат с эллипсоидом называют *вершинами эллипсоида*.

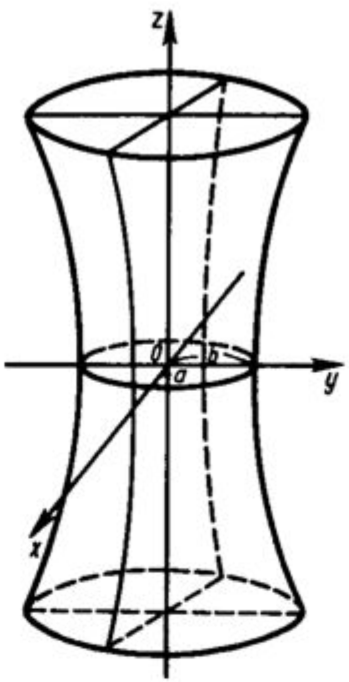

Рис. 1

6⁰. Однополостный гиперболоид. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, которая в декартовой системе координат *Oxyz* определяется каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (1)$$

Онополостный гиперболоид изображается в виде бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся в обе стороны по мере удаления от плоскости *Oxy* (рис. 1).

Величины a, b, c называются *полуосями* однополостного гиперболоида.

7^0. Двуполостный гиперболоид. *Двуполостным гиперболоидом* называют поверхность, определяемую в декартовой системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1. \qquad (4)$$

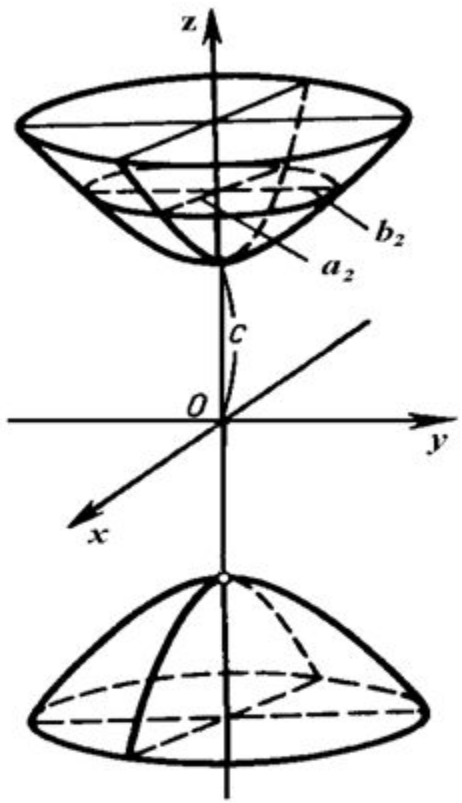

Рис. 2

Дуполостный гиперболоид имеет вид поверхности, состоящей из двух отдельных «полостей», каждая из которых имеет вид бесконечной выпуклой чаши (рис. 2).

Величины a, b, c называют *полуосями* двуполостного гиперболоида. Если полуоси a и b гиперболоида (однополостного или двуполостного) равны, то он называется гиперболоидом вращения и получается вращением вокруг оси Oz гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1, y=0$ в случае однополостного гиперболоида и гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1, y=0$ в случае двуполостного гиперболоида.

8^0. Параболоиды

Эллиптическим параболоидом (рис. 1) называется поверхность, определяемая в декартовой системе координат $Oxyz$ каноническим уравнением

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \qquad (1)$$

Гиперболическим параболоидом (рис. 2) называется поверхность, определяемая каноническим уравнением

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \qquad (2)$$

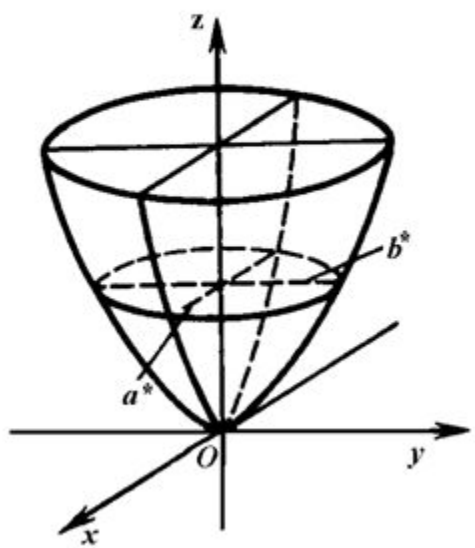

Рис. 1.

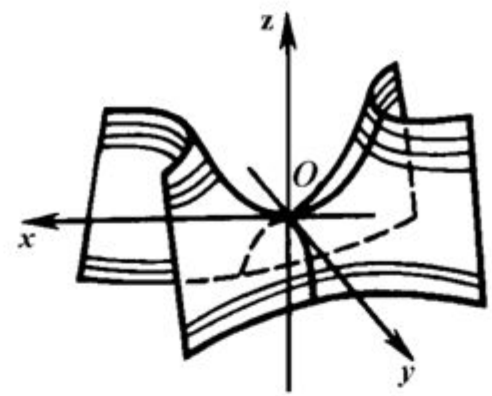

Рис. 2.