РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Аннуитеты.

Князева М.А.,
доцент, канд. техн. наук

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

# Основные параметры аннуитета

**Аннуитет** – регулярный поток платежей.

Параметры:

- размер платежа;
- число платежей;
- число платежей в год;
- интервал платежа — период времени между двумя последовательными платежами;
- срок аннуитета — период времени от начала первого до конца последнего интервала платежа;
- процентная ставка;
- число периодов начисления процентов в год;
- настоящая (приведенная) стоимость — консолидированный платеж аннуитета на начало его срока;
- итоговая сумма — консолидированный платеж аннуитета на конец его срока.

# Классификация аннуитетов

- **По определенности срока аннуитета**:
  - Определенный (верная рента)
  - Случайный (условная рента)
- **По определению времени**:
  - Дискретный
  - Непрерывный
- **По выбору моментов платежей**
  - Обыкновенный (рента постнумерандо)
  - Полагающийся (рента пренумерандо)
- **По соотношению интервала платежа и периода начисления процентов**:
  - простой
  - общий

# Классификация аннуитетов (продолжение)

- **По величине платежей**:
  - Постоянный
  - Переменный
- **По числу платежей**:
  - Срочный (ограниченная рента)
  - Бессрочный (вечная рента)
- **По соотношению начала срока аннуитета и даты заключения сделки**:
  - Немедленный
  - Отсроченный

# Простейший аннуитет

**Простейший аннуитет**:

- ✔ определенный,
- ✔ дискретный,
- ✔ срочный,
- ✔ постоянный,
- ✔ немедленный,
- ✔ простой,
- ✔ обыкновенный,

аннуитет.

# Оценка параметров простейшего аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$ – размер платежа;

$n$ – число платежей;

$i$ – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму $S$ и настоящую стоимость $A$ простейшего аннуитета.

# Оценка параметров простейшего аннуитета (продолжение)

▶▶ *Решение задачи*

Временна́я диаграмма платежей простейшего аннуитета имеет вид

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | ... | $n-2$ | $n-1$ | $n$ |
| | $R$ | $R$ | ... | $R$ | $R$ | $R$ |
| | | | | | | $S$ |
| $A$ | | | | | | |

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

или $S = Rs(n, i)$, где

$$s(n,i) = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Функция $s(n, i)$ табулирована для целых значений $n$ и $i > 5$ (см. приложение). Она называется ***функцией наращения***.

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

# Оценка параметров простейшего аннуитета (окончание)

Величины $A$ и $S$ эквивалентны по ставке $i$. Они связаны соотношением

$$A = S(1+i)^{-n}.$$

С использованием выражения для $S$ получаем искомое выражение для $A$:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

или $A = Ra(n, i)$, где

$$a(n,i) = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Функция $a(n, i)$ табулирована для целых значений $n$ и $i > 5$ (см. приложение). Она называется ***функцией дисконтирования***. ◄◄

# Пример 1

Для обеспечения будущих расходов создается фонд. Средства в фонд поступают в виде постоянного обыкновенного аннуитета в течение пяти лет. Размер разового платежа 4 млн руб. На взносы ежегодно начисляются проценты по ставке 18,5%. Определим итоговую стоимость фонда. Какую сумму следовало бы поместить на депозит в момент начала срока аннуитета под 18,5% годовых, чтобы через пять лет накопилось сумма, равная итоговой стоимости фонда?

Дано: $t = 5$; $R = 4$; $j_1 = 0{,}185$.

Найти: $S$, $A$.

*Решение*

Имеем $n = 5$, $i = 0{,}185$. Тогда

$$S = 4\frac{(1+0{,}185)^5-1}{0{,}185} = 28{,}936 \text{ (млн руб.)};$$

$$A = 28{,}936(1 + 0{,}185)^{-5} = 12{,}368 \text{ (млн руб.)}.$$

# Пример 2

Владелец малого предприятия предусматривает создание в течение трех лет фонда развития. Для этого ассигнуется ежегодно 41,2 тыс. руб., которые помещаются в банк под 20% годовых. Какая сумма потребовалась бы фирме для создания фонда, если бы она была помещена в банк на три года под 20% годовых?

Дано: $t = 3$; $j_1 = 0{,}2$; $R = 41{,}2$.

Найти: $A$.

*Решение*

Имеем $n = 3$, $i = 0{,}2$. Тогда

$$A = 41{,}2\frac{1-(1+0{,}2)^{-3}}{0{,}2} = 86{,}79 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Пример 3

Товар стоит 500 тыс. руб. Он может быть приобретен в рассрочку путем начального платежа в сумме 200 тыс. руб. и одинаковых ежемесячных взносов в течение двух лет. Найдем величину ежемесячного платежа, чтобы обеспечить эквивалентность выплат с учетом ставки 12% при начислении процентов ежемесячно.

Дано: $F = 500$; $t = 2$; $R_0 = 200$; $j_{12} = 0{,}12$.

Найти: $R$.

*Решение*

Требуется определить платежи простейшего аннуитета, настоящая стоимость которого равна стоимости товара, подлежащей выплате в рассрочку. Из формулы $A = R\dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ выражаем $R = \dfrac{Ai}{1-(1+i)^{-n}}$. Имеем $A = F - R_0 = 500 - 200 = 300$, $n = 24$, $i = 0{,}01$. Тогда

$$R = \frac{300 \cdot 0{,}01}{1-(1+0{,}01)^{-24}} = 14{,}122 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Полагающийся аннуитет

**Полагающийся аннуитет** – аннуитет, платежи которого относятся к начальным моментам интервалов платежа.

# Оценка параметров полагающегося аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$ – размер платежа;

$n$ – число платежей;

$i$ – сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется найти итоговую сумму $S$ и настоящую стоимость $A$ полагающегося аннуитета.

# Оценка параметров полагающегося аннуитета (продолжение)

▶▶ *Решение задачи*

Временна́я диаграмма платежей полагающегося аннуитета имеет вид

| 0 | 1 | 2 | ... | $n-2$ | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $R$ | $R$ | $R$ | ... | $R$ | $R$ | |
| | | | | | | $S$ |
| $A$ | | | | | | |

Для определения итоговой суммы $S$ данный аннуитет можно представить в виде обыкновенного аннуитета с итоговой суммой $S_{(-1)}$, который начинается на один период времени раньше исходного полагающегося аннуитета:

| $-1$ | 0 | 1 | 2 | ... | $n-2$ | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R$ | $R$ | $R$ | ... | $R$ | $R$ | |
| | | | | | | $S_{(-1)}$ | |
| | | | | | | | $S$ |

# Оценка параметров полагающегося аннуитета (окончание)

Составим уравнение эквивалентности с датой сравнения на конец срока аннуитета с учетом вспомогательной суммы $S_{(-1)}$:

$$S = S_{(-1)}(1 + i),\ S_{(-1)} = Rs(n, i).$$

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$S = Rs(n, i)(1 + i).$$

Для определения настоящей стоимости $A$ данный аннуитет можно представить как совокупность первого платежа и обыкновенного аннуитета из остальных платежей с настоящей стоимостью $A^{(n-1)}$:

Искомая сумма находится из этих соотношений:

$$A = R + Ra(n - 1, i). ◀◀$$

# Пример 4

Товар куплен в рассрочку ежемесячными платежами по 200 тыс. руб. в течение полутора лет. Первый платеж был сделан в момент покупки. Найдем эквивалентную стоимость товара в момент покупки с учетом годовой номинальной ставки 6% при начислении процентов ежемесячно.

*Решение*

Имеем $n = 18$, $i = 0{,}005$. Тогда $A = 200 + 200a(18 - 1; 0{,}005) = 3451{,}726$ (тыс. руб.).

# Общий аннуитет

*Общий аннуитет* — это аннуитет, число интервалов платежа которого может не совпадать с числом периодов начисления процентов.

Параметры общего аннуитета находят путем перехода от заданного общего аннуитета к эквивалентному ему простому аннуитету по определенной процентной ставке.

# Оценка параметров общего аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R_p$ — размер платежа общего аннуитета;

$p$ — число интервалов платежа в год;

$i_m$ — процентная ставка за период начисления;

$m$ — число периодов начисления процентов в год.

Требуется найти размер платежа $R_m$ простого аннуитета, эквивалентного исходному общему аннуитету по ставке $i_m$, если этот общий аннуитет является: 1) обыкновенным; 2) полагающимся.

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

# Оценка параметров общего аннуитета (продолжение)

*Случай 1.* Общий аннуитет — обыкновенный.
Совмещенная временна́я диаграмма за год имеет вид

| 0 | 1 | 2 | ... | $p-1$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $R_p$ | $R_p$ | ... | $R_p$ | $R_p$<br>$S_p$ |

| 0 | 1 | 2 | ... | $m-1$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $R_m$ | $R_m$ | ... | $R_m$ | $R_m$<br>$S_m$ |

$$R_m = R_p \frac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1},$$

или с учетом *функции наращения* $s(n, i)$

$$R_m = \frac{R_p}{s\left(\frac{m}{p}, i_m\right)},$$

где $s\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}{i_m}$.

# Оценка параметров общего аннуитета (окончание)

*Случай 2.* Общий аннуитет — полагающийся.
Совмещенная временна́я диаграмма за год имеет вид

| 0 | 1 | 2 | ... | $p-1$ | $p$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $R_p$ | $R_p$ | $R_p$ | ... | $R_p$ | |
| | | | | | $S_p$ |

| 0 | 1 | 2 | ... | $m-1$ | $m$ |
|---|---|---|---|---|---|
| | $R_m$ | $R_m$ | ... | $R_m$ | $R_m$ |
| | | | | | $S_m$ |

$$R_m = R_p \frac{i_m}{1-(1+i_m)^{-\frac{m}{p}}},$$

или с учетом функции дисконтирования $a(n, i)$

$$R_m = \frac{R_p}{a\left(\frac{m}{p}, i_m\right)},$$

где $a\left(\frac{m}{p}, i_m\right) = \frac{1-(1+i_m)^{-\frac{m}{p}}}{i_m}$. ◀◀

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Пример 6

Работник получает премию 50 тыс. руб. в конце каждого года. Какие ежемесячные выплаты эквивалентны этой сумме при ежемесячном начислении процентов по ставке 6%?

Дано: $R_1 = 50$; $p = 1$; $j_{12} = 0{,}06$; $m = 12$.

Найти: $R_{12}$.

*Решение*

Имеем $i_{12} = \dfrac{0{,}06}{12} = 0{,}005$. Тогда

$$R_{12} = R_1 \frac{i_{12}}{(1+i_{12})^{\frac{12}{1}} - 1} = 50 \frac{0{,}005}{(1+0{,}005)^{\frac{12}{1}} - 1} = 4{,}05 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Годовой платеж в данном случае играет роль итоговой стоимости простейшего ежемесячного аннуитета, осуществляемого в течение года.

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Пример 7

Определим, как заменить ежеквартальные платежи по 500 тыс. руб. на полугодовые платежи, если применяется процентная ставка 5% при начислении процентов два раза в год и выплаты осуществляются: а) в конце кварталов, б) в начале кварталов.

Дано: $R_4 = 500$; $p = 4$; $j_2 = 0{,}05$; $m = 2$.

Найти: $R_2$.

*Решение*

Имеем $i_2 = \dfrac{0{,}05}{2} = 0{,}025$. Тогда:

а) $R_2 = R_4 \dfrac{i_2}{(1+i_2)^{\frac{2}{4}} - 1} = 500 \dfrac{0{,}025}{(1+0{,}025)^{\frac{2}{4}} - 1} = 1006{,}20$ (тыс. руб.);

б) $R_2 = R_4 \dfrac{i_2}{1-(1+i_2)^{-\frac{2}{4}}} = 500 \dfrac{0{,}025}{1-(1+0{,}025)^{-\frac{2}{4}}} = 1018{,}711$ (тыс. руб.).

# Пример 8

Инвестиции в производство пять лет назад составили 800 тыс. руб. Оценим эффективность вложения этих средств с учетом начисления процентов, если средний размер ежемесячных дивидендов по этим инвестициям составил 15 тыс. руб., а эффективная ставка равна 8%.

Дано: $F = 800$; $R_{12} = 15$; $p = 12$; $t = 5$; $j_1 = 0{,}08$; $m = 1$.

Найти: $A$.

*Решение*

Требуется определить настоящую стоимость $A$ общего ежемесячного аннуитета и сравнить ее с вложенной суммой $F$. Имеем $n = 5$, $i = i_1 = 0{,}08$.

Годовой платеж:

$$R_1 = 15 \cdot \frac{0{,}08}{(1+0{,}08)^{\frac{1}{12}} - 1} = 184{,}656 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Настоящая стоимость:

$$A = R_1 \frac{1-(1+i_1)^{-n}}{i_1} = 184{,}656 \frac{1-(1+0{,}08)^{-5}}{0{,}08} = 737{,}277 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Поскольку $A < F$, то инвестиции использовались неэффективно — выгоднее было деньги положить в банк на депозит под 8% годовых.

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Пример 9

Определим, сколько ежемесячных платежей по 5 тыс. руб. нужно перечислить на счет в банке, чтобы погасить задолженность в сумме 100 тыс. руб., включающую проценты при полугодовом начислении, если первая выплата делается через месяц после займа и годовая номинальная ставка равна 18%.

Дано: $R_{12} = 5$; $j_2 = 0{,}18$; $A = 100$.

Найти: $n$.

*Решение*

Сначала перейдем от данного общего к простому аннуитету с полугодовыми выплатами, затем найдем, сколько понадобится полугодий для выплаты долга, и пересчитаем их в месяцы:

$$R_2 = R_{12}\frac{i_2}{(1+i_2)^{\frac{2}{12}}-1} = 5\frac{0{,}09}{(1+0{,}09)^{\frac{1}{6}}-1} = 31{,}106 \text{ (тыс. руб.);}$$

$$A = R_2\frac{1-(1+i_2)^{-n}}{i_2};\; n = -\log_{1+i_2}\left(1-\frac{Ai_2}{R_2}\right);$$

$$n = -\log_{1,09}\left(1-\frac{100\cdot 0{,}09}{31{,}106}\right) = -\log_{1,09}0{,}711 = -\frac{\ln 0{,}711}{\ln 1{,}09} = 3{,}958 \text{ полугодий, или } 23{,}747 \text{ мес.}$$

# Отсроченный аннуитет

*Отсроченный аннуитет* — аннуитет, который начинается позднее по отношению к началу включающей его финансовой операции.

Число интервалов платежа от начала финансовой операции до начала аннуитета называется *периодом отсрочки*.

*Приведенная стоимость отсроченного аннуитета* — это платеж, отнесенный на начало финансовой операции и эквивалентный данному отсроченному аннуитету по определенной ставке.

Основной задачей при анализе отсроченного аннуитета является определение его приведенной стоимости.

# Оценка параметров отсроченного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$ — размер платежа;

$n$ — число платежей;

$k$ — число интервалов платежа в периоде отсрочки;

$i$ — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить приведенную стоимость отсроченного аннуитета $A$.

# Оценка параметров отсроченного аннуитета (окончание)

►► *Решение задачи*

Временнáя диаграмма платежей отсроченного аннуитета имеет вид

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | ... | $k$ | $k+1$ | $k+2$ | ... | $k+n-1$ | $k+n$ |
| | | | | | 1 | 2 | ... | $n-1$ | $n$ |
| | | | | | $R$ | $R$ | ... | $R$ | $R$ |
| | | | | $A_0$ | | | | | |
| $A$ | | | | | | | | | |

$$A = Ra(n, i)(1+i)^{-k}$$

# Пример 10

Компания получила ссуду, которую она будет возмещать, выплачивая по 500 тыс. руб. в год. Первая выплата будет сделана через три года, последняя — через 10 лет от даты заключения сделки. Определим сумму ссуды, если применяется годовая номинальная ставка 16%.

Дано: $R = 500$; $t_1 = 3$; $t_n = 10$; $j_1 = 16\%$.

Найти: $A$.

*Решение*

Временнáя диаграмма имеет вид

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| | | | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 | 500 |
| $A$ | | | | | | | | | | |

Имеем $i = 0{,}16$; $n = 8$; $k = 2$. Тогда

$$a(8, 0{,}16) = \frac{1-(1+0{,}16)^{-8}}{0{,}16} = 4{,}344;$$

$$A = 500a(8,\ 0{,}16)(1 + 0{,}16)^{-2} = 1613{,}999 \text{ (тыс. руб.).}$$

# Пример 11

Ссуду 200 тыс. руб. с начисляемыми на нее процентами в конце каждого полугодия по ставке 14% годовых требуется погасить десятью полугодовыми взносами. Первая выплата будет сделана через три года после получения ссуды. Какими должны быть эти взносы?

Дано: $A = 200$; $n = 10$; $t_1 = 3$; $j_1 = 0{,}14$.

Найти: $R$.

*Решение*

Временна́я диаграмма по полугодиям имеет вид

| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | ... | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | 1 | 2 | ... | 9 | 10 |
| | | | | | | $R$ | $R$ | ... | $R$ | $R$ |
| 200 | | | | | | | | | | |

Имеем $k = 5$, $i = 0{,}07$. Тогда

$$200(1+0{,}07)^5 = Ra(10, 0{,}07), \quad a(10, 0{,}07) = \frac{1-(1+0{,}07)^{-10}}{0{,}07} = 7{,}024;$$

$$R = \frac{200(1+0{,}07)^5}{a(10, 0{,}07)} = 39{,}938 \text{ (тыс. руб.).}$$

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Бессрочный аннуитет

*Бессрочный аннуитет* – аннуитет, срок которого неограничен.

Итоговая сумма вечной ренты не имеет смысла, так как платежи продолжаются неограниченно долго.

# Оценка параметров бессрочного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$ — размер платежа;

$i$ — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость бессрочного аннуитета $A$.

►► *Решение задачи*

Временна́я диаграмма платежей бессрочного аннуитета имеет вид

| 0 | 1 | 2 | ... | $n$ | ... |
|---|---|---|---|---|---|
| | $R$ | $R$ | ... | $R$ | ... |
| $A$ | | | | | |

Настоящую стоимость $A$ находят путем предельного перехода, неограниченно увеличивая число интервалов платежа $n$:

$$A = \lim_{n \to \infty} R \frac{1-(1+i)^{-n}}{i},$$

или

$$A = \frac{R}{i}.$$

# Пример 12

Компания гарантирует выплату дивидендов в размере 60 тыс. руб. на акцию в конце каждого года в течение неопределенно долгого времени. Имеет ли смысл покупать акции этой компании по цене 700 тыс. руб., если можно поместить деньги в банк на депозит под 8% годовых?

Дано: $F = 700$; $R = 60$; $j_1 = 0{,}08$.

Найти: $A$.

*Решение*

Требуется определить настоящую стоимость данных платежей $A$ и сравнить ее с их заданной начальной стоимостью $F$. Имеем $i = 0{,}08$,

$$A = \frac{R}{i} = \frac{60}{0{,}08} = 750 \text{ (тыс. руб.)}.$$

Поскольку $A > F$, то акции покупать стоит.

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

# Пример 13

Для обслуживания переезда требуется 10 тыс. руб. в конце каждого месяца. Какую сумму следует инвестировать компании, чтобы на получаемые проценты поддерживать обслуживание переезда? Эффективная ставка равна 6%.

Дано: $R_{12} = 10$; $r = 0{,}06$.

Найти: $A$.

*Решение*

Здесь имеет место общий аннуитет. Сначала найдем эквивалентный данному месячному годовой платеж по формуле $R_m = R_p \dfrac{i_m}{(1+i_m)^{\frac{m}{p}} - 1}$, а затем используем формулу для вычисления бессрочного аннуитета. Имеем $m = 1$, $p = 12$, $i_1 = 0{,}06$,

$$R_1 = 10 \frac{0{,}06}{(1+0{,}06)^{\frac{1}{12}} - 1} = 123{,}265;\ A = \frac{123{,}265}{0{,}06} = 2054{,}421 \text{ (тыс. руб.).}$$

# Непрерывный аннуитет

*Непрерывный аннуитет* – это аннуитет, платежи которого производятся непрерывно.

# Оценка параметров непрерывного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$W$ – размер суммарного годового платежа;

$\delta$ – непрерывная процентная ставка (сила роста);

$t$ – время (в годах).

Требуется определить настоящую стоимость $A$ и итоговую сумму $S$ непрерывного аннуитета за $t$ лет.

# Оценка параметров непрерывного аннуитета

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$W$ – размер суммарного годового платежа;

$\delta$ – непрерывная процентная ставка (сила роста);

$t$ – время (в годах).

Требуется определить настоящую стоимость $A$ и итоговую сумму $S$ непрерывного аннуитета за $t$ лет.

▶▶ *Решение задачи*

$$S = W\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta};\ A = W\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}.$$ ◀◀

# Пример 14

Ожидается, что доходы от инвестиционного проекта будут поступать непрерывно и равномерно в течение 10 лет, составляя 1 млн руб. в год. Определим стоимость доходов на начало проекта с учетом силы роста 10%.

Дано: $W = 1000$; $t = 10$; $\delta = 0{,}1$.

Найти: $A$.

*Решение*

$$A = W\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} = 1000\frac{1-e^{-0{,}1\cdot 10}}{0{,}1} = 6321{,}206 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Переменный аннуитет

*Переменный аннуитет* — аннуитет, платежи которого имеют неодинаковый размер.

Если нет явной закономерности при изменении размера платежей, вычисление искомых параметров переменного аннуитета производят с помощью уравнений эквивалентности.

# Оценка параметров переменного аннуитета. Случай арифметической прогрессии

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$ — размер первого платежа;

z — разность арифметической прогрессии;

$i$ — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость $A$ и итоговую сумму $S$ переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону арифметической прогрессии.

РАНХиГС
РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА И ГОСУДАРСТВЕННОЙ СЛУЖБЫ ПРИ ПРЕЗИДЕНТЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

# Оценка параметров переменного аннуитета. Случай арифметической прогрессии

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$ — размер первого платежа;

z — разность арифметической прогрессии;

$i$ — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость $A$ и итоговую сумму $S$ переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону арифметической прогрессии.

▶▶ *Решение задачи*

Временна́я диаграмма аннуитета имеет вид

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | ... | $n-2$ | $n-1$ | $n$ |
| | $R$ | $R+z$ | $R+2z$ | ... | $R+(n-3)z$ | $R+(n-2)z$ | $R+(n-1)z$ |
| | | | | | | | $S$ |
| $A$ | | | | | | | |

$$S=\left(R+\frac{z}{i}\right)s(n,i)-\frac{zn}{i};\ A=\left(R+\frac{z}{i}\right)a(n,i)-\frac{zn}{i(1+i)^n}.$$

# Пример 15

На счет в банке в течение шести лет в конце года будут поступать денежные суммы, первая из которых равна 5 тыс. руб., а каждая следующая будет увеличиваться на 400 руб. Найдем настоящую стоимость и итоговую сумму этого аннуитета, если проценты начисляются по ставке 10% один раз в конце года.

Дано: $R = 5$; $z = 0,4$; $t = 6$; $j_1 = 0,1$.

Найти: $S$, $A$.

*Решение*

Имеем $i = 0,1$, $n = 6$. Тогда

$$S = \left(5 + \frac{0,4}{0,1}\right) s(6, 0,1) - \frac{0,4 \cdot 6}{0,1} = 45,441 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = \left(5 + \frac{0,4}{0,1}\right) a(6, 0,1) - \frac{0,4 \cdot 6}{0,1(1 + 0,1)^6} = 25,650 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Оценка параметров переменного аннуитета. Случай геометрической прогрессии

▷▷ *Постановка задачи*

Дано:

$R$ — размер первого платежа;

$q$ — знаменатель геометрической прогрессии;

$i$ — сложная процентная ставка при начислении процентов за интервал платежа.

Требуется определить настоящую стоимость $A$ и итоговую сумму $S$ переменного аннуитета с платежами, изменяющимися по закону геометрической прогрессии.

▶▶ *Решение задачи*

Временна́я диаграмма аннуитета имеет вид

| 0 | 1 | 2 | 3 | ... | $n-2$ | $n-1$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $R$ | $Rq$ | $Rq^2$ | ... | $Rq^{n-3}$ | $Rq^{n-2}$ | $Rq^{n-1}$ |
| | | | | | | | $S$ |
| $A$ | | | | | | | |

$$S = R\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)};\ A = \frac{R}{(1+i)^n}\cdot\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}.$$

РАНХиГС
Российская академия народного хозяйства и государственной службы при Президенте Российской Федерации

# Пример 16

На счет в банке поступают в течение пяти лет в конце года платежи. Первый платеж равен 3 тыс. руб., а каждый следующий по отношению к предыдущему увеличивается на 15%. Определим итоговую сумму и настоящую стоимость этого аннуитета, если банк начисляет в конце каждого года сложные проценты по ставке 12%.

Дано: $R = 3$; $h = 15\%$; $t = 5$; $j_1 = 0{,}12$.

Найти: $S$, $A$.

*Решение*

Имеем $i = 0{,}12$; $n = 5$; $q = 1{,}15$. Тогда

$$S = 3\frac{1{,}15^5 - (1+0{,}12)^5}{1{,}15 - (1+0{,}12)} = 24{,}902 \text{ (тыс. руб.)};$$

$$A = \frac{3}{(1+0{,}12)^5} \cdot \frac{1{,}15^5 - (1+0{,}12)^5}{1{,}15 - (1+0{,}12)} = 14{,}130 \text{ (тыс. руб.)}.$$

# Бессрочный переменный аннуитет. Случай геометрической прогрессии

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{R}{(1+i)^n} \frac{q^n - (1+i)^n}{q - (1+i)} = \lim_{n\to\infty} R \frac{\dfrac{q^n}{(1+i)^n} - 1}{q - (1+i)}.$$

При $q < 1 + i$ искомая величина $A$ определяется выражением

$$A = \frac{R}{(1+i) - q},$$

которое называется ***моделью постоянного роста*** и является обобщением модели настоящей стоимости постоянного бессрочного аннуитета (при $q = 1$).

Модель постоянного роста используется для определения истинной стоимости обыкновенной акции, когда дивиденды растут в геометрической прогрессии.

# Модели аннуитета

| Вид аннуитета | Итоговая сумма | Настоящая стоимость | Исходные показатели |
|---|---|---|---|
| Простейший аннуитет | $S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ | $A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$ | $R$ размер платежа; $i$ — ставка за интервал платежа; $n$ — число интервалов платежа; $k$ — число периодов отсрочки; $\delta$ — сила роста; $W$ — суммарный платеж за год; $z$ — разность арифметической прогрессии; $q$ — знаменатель геометрической прогрессии |
| Полагающийся аннуитет | $S = Rs(n,i)(1+i)$ | $A = R + Ra(n-1, i)$ | |
| Отсроченный аннуитет | $S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ | $A = Ra(n,i)(1+i)^{-k}$ | |
| Бессрочный постоянный аннуитет | — | $A = \frac{R}{i}$ | |
| Непрерывный аннуитет | $S = W\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}$ | $A = W\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta}$ | |
| Переменный аннуитет, арифметическая прогрессия | $S = \left(R + \frac{z}{i}\right)s(n,i) - \frac{zn}{i}$ | $A = \left(R + \frac{z}{i}\right)a(n,i) - \frac{zn}{i(1+i)^n}$ | |
| Переменный аннуитет, геометрическая прогрессия | $S = R\frac{q^n - (1+i)^n}{q-(1+i)}$ | $A = \frac{R}{(1+i)^n}\cdot\frac{q^n-(1+i)^n}{q-(1+i)}$ | |
| Переменный бессрочный аннуитет, геометрическая прогрессия | — | $A = \frac{R}{q-(1+i)}$ | |