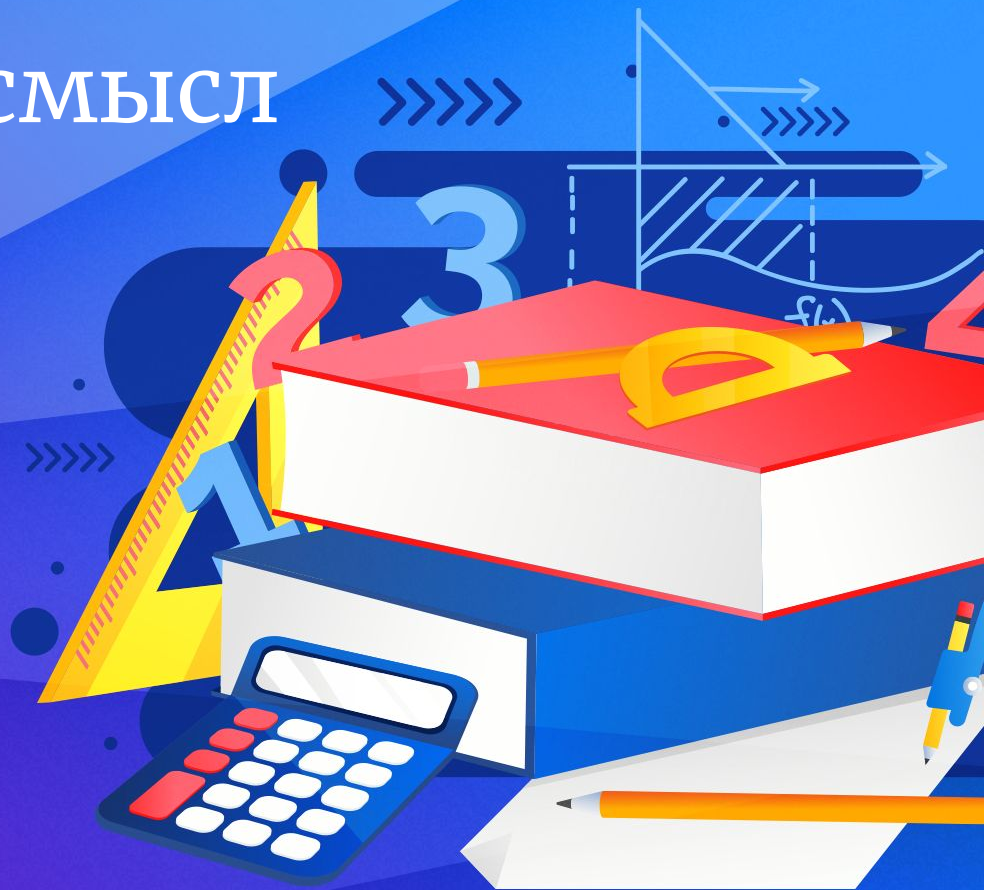


# Геометрический смысл производной

Производная  
и её геометрический смысл



## Сегодня на уроке

1. Выясним геометрический смысл производной функции.
2. Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.
3. Познакомимся со способом построения касательной к параболе.

## Вспомним

Функция вида  $y = kx + b$ , где  $k$  и  $b$  – любые действительные числа, называется **линейной**.

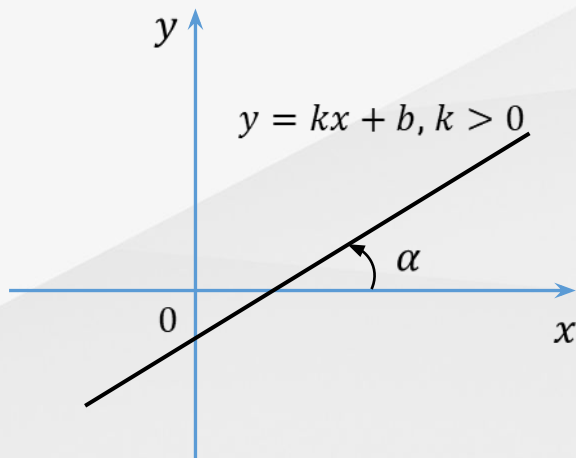
Графиком этой функции является **прямая**.

Число  $k = \operatorname{tg} \alpha$  называют **угловым коэффициентом** прямой, угол  $\alpha$  – угол, который эта прямая образует с осью  $Ox$ .

## Вспомним

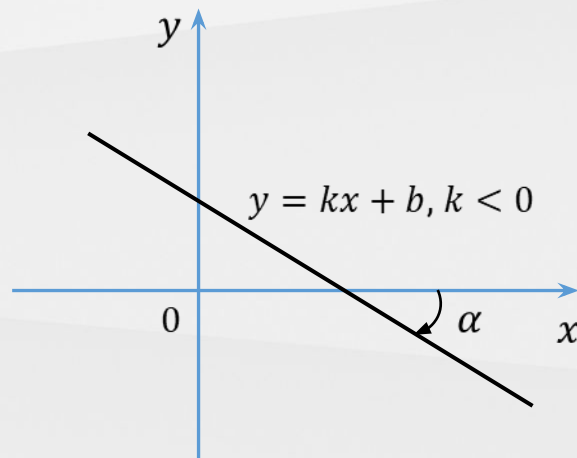
Если  $k > 0$ , то  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

Функция возрастает.



Если  $k < 0$ , то  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ .

Функция убывает.

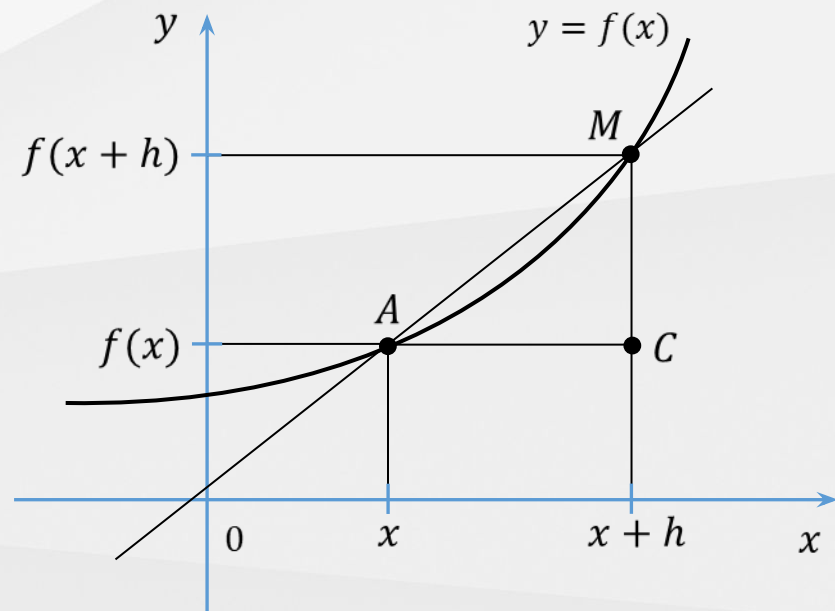


# Геометрический смысл производной

$A(x; f(x)), M(x + h; f(x + h))$ .

$\triangle ACM$  – прямоугольный.

$C(x + h; f(x))$



Он прямоугольный.



# Геометрический смысл производной

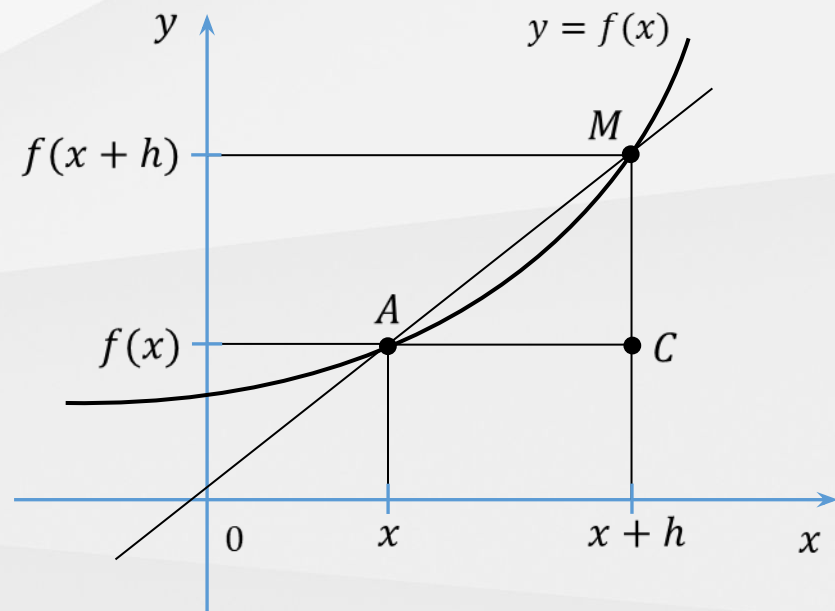
$A(x; f(x)), M(x + h; f(x + h))$ .

$\triangle ACM$  – прямоугольный.

$C(x + h; f(x))$

Найдём угловой коэффициент  $k$   
прямой  $AM$ .

Коэффициент  $k$  зависит от  $h$ ,  
т. е. его можно рассматривать  
как функцию  $k(h)$ .



# Геометрический смысл производной

$A(x; f(x)), M(x+h; f(x+h))$ .

$\triangle ACM$  – прямоугольный.

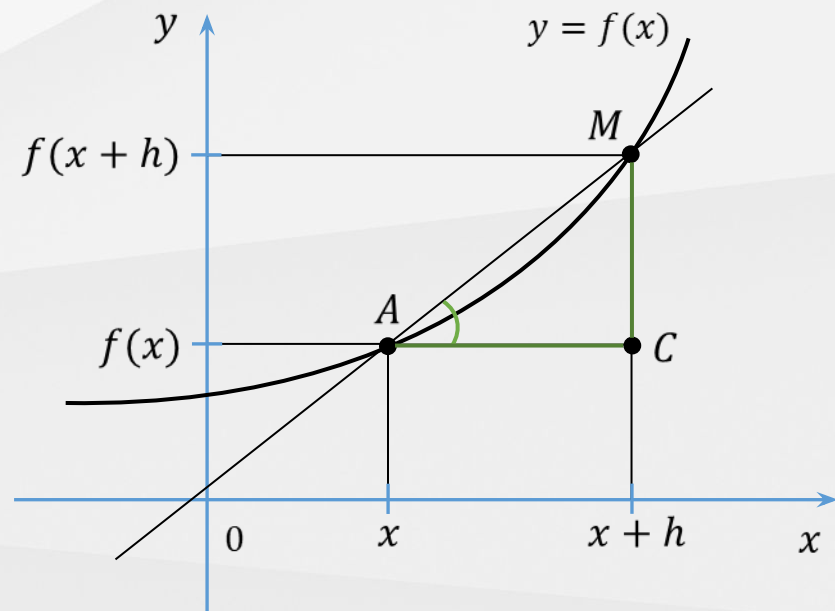
$C(x+h; f(x))$

$$k(h) = \operatorname{tg} \angle CAM = \frac{MC}{AC},$$

$$MC = f(x+h) - f(x),$$

$$AC = (x+h) - x = h.$$

$$\text{Тогда } k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$



# Геометрический смысл производной

$A(x; f(x)), M(x + h; f(x + h))$ .

$\triangle ACM$  – прямоугольный.

$C(x + h; f(x))$

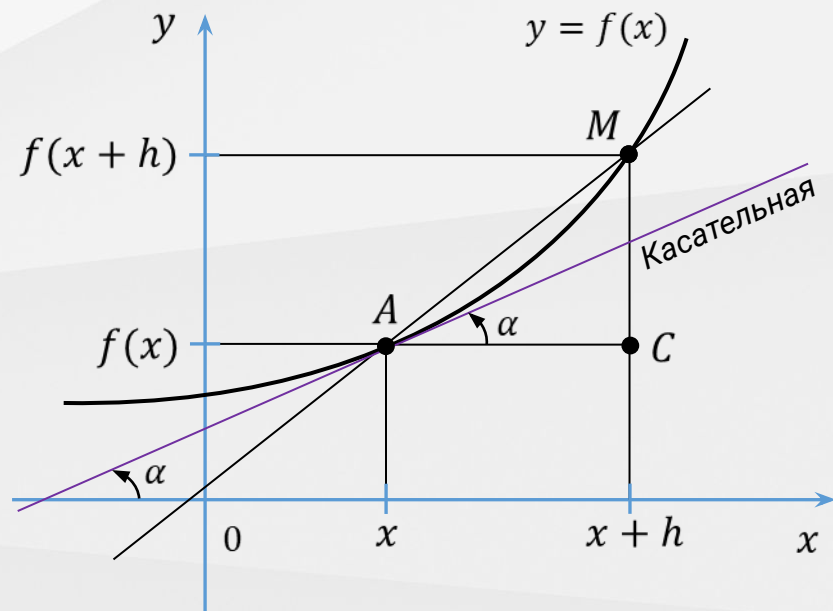
$$k(h) = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Пусть число  $x$  фиксировано,  $h \rightarrow 0$ .

Прямая  $AM$  будет стремиться занять положение прямой, которую называют

касательной к графику функции  $y = f(x)$ ,

т. к.  $\lim_{h \rightarrow 0} k(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f'(x)$ .



$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$



# Геометрический смысл производной

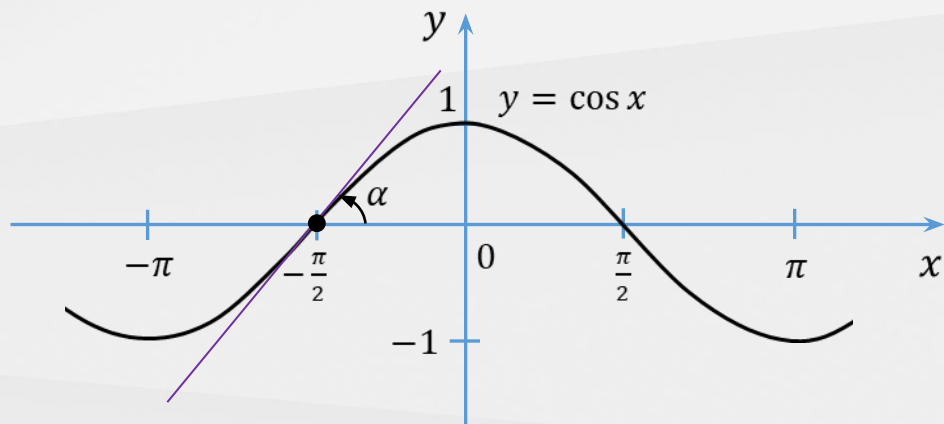
Значение производной функции  $f(x)$  в точке  $x$  равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке  $(x; f(x))$ .

# Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции  $y = \cos x$  в точке  $(-\frac{\pi}{2}; 0)$  и осью  $Ox$ .

Найдём значение производной данной функции при  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

Для этого найдём угловой коэффициент касательной к графику этой функции в точке  $(-\frac{\pi}{2}; 0)$ .



# Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции  $y = \cos x$  в точке  $(-\frac{\pi}{2}; 0)$  и осью  $Ox$ .

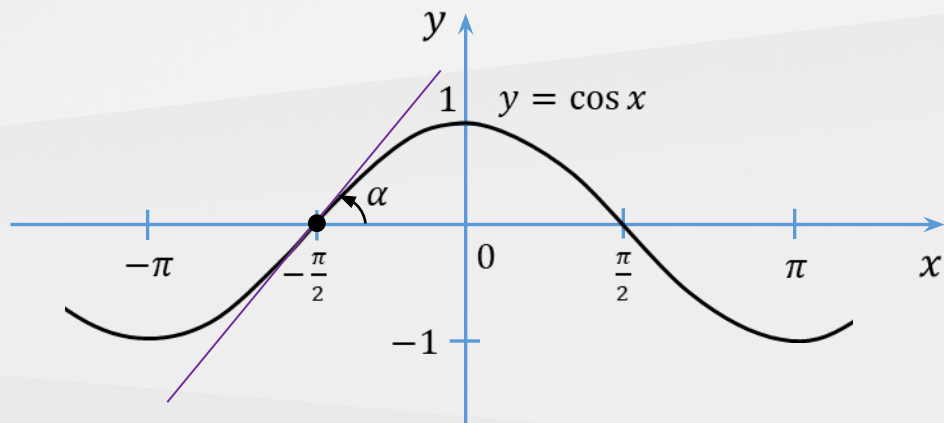
Найдём значение производной данной функции при  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

$$f(x) = \cos x,$$

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f'(-\frac{\pi}{2}) = -\sin(-\frac{\pi}{2}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$



$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

# Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции  $y = \cos x$  в точке  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  и осью  $Ox$ .

Найдём значение производной данной функции при  $x = -\frac{\pi}{2}$ .

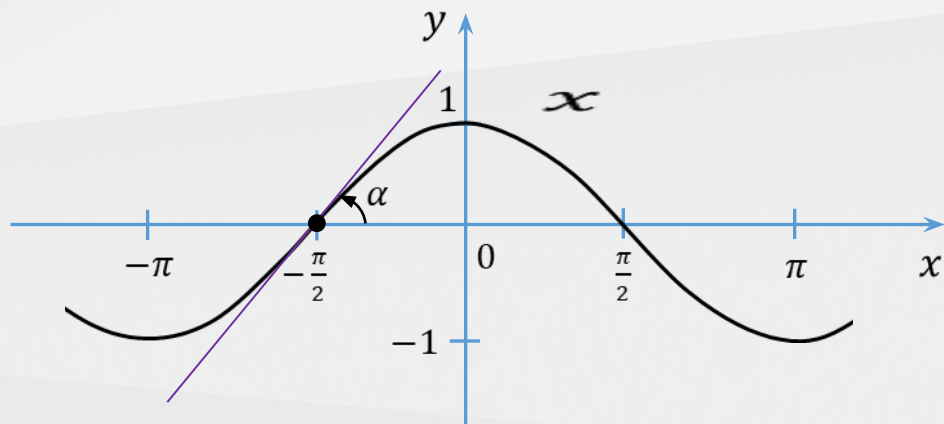
$$f(x) = \cos x,$$

$$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\operatorname{tg} \alpha = f' \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

Угол между касательной к графику функции  $y = \cos x$  в точке  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  и осью абсцисс равен  $\frac{\pi}{4}$ .



# Уравнение касательной

Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции  $f(x)$  в точке  $(x_0; f(x_0))$ .

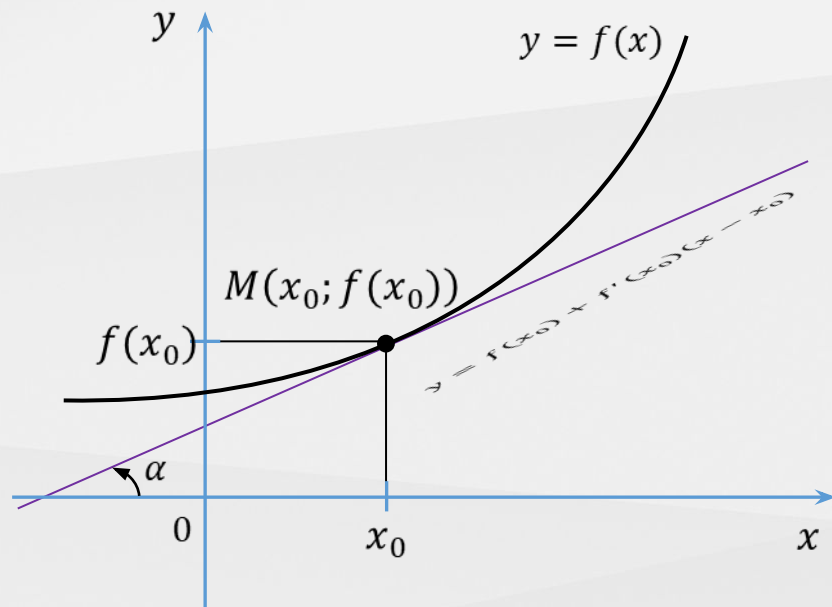
Пусть  $y = kx + b$  – искомое уравнение касательной.

$k = \operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$ , т. е.  $y = f'(x_0)x + b$ .

$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$ ,  $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ .

$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$ ,

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



$$f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$$

Геометрический способ построения касательной к параболе  $y = x^2$  в точке  $A$  с абсциссой  $x_0$ :

прямая, проходящая через точку  $A$  и точку  $\frac{x_0}{2}$  оси абсцисс, касается параболы в точке  $A$ .

# Итоги урока

## Геометрический смысл

### Уравнение касательной

Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции  $f(x)$  в точке  $(x_0; f(x_0))$ .

Пусть  $y = kx + b$  – искомое уравнение касательной.

$y \uparrow$   $y = f(x)$

**Геометрический способ построения касательной к параболе  $y = x^2$  в точке  $A$  с абсциссой  $x_0$ :**

прямая, проходящая через точку  $A$  и точку  $\frac{x_0}{2}$  оси абсцисс, касается параболы в точке  $A$ .

**Геометрический способ построения касательной к параболе  $y = x^2$  в точке  $A$  с абсциссой  $x_0$ :**

прямая, проходящая через точку  $A$  и точку  $\frac{x_0}{2}$  оси абсцисс, касается параболы в точке  $A$ .