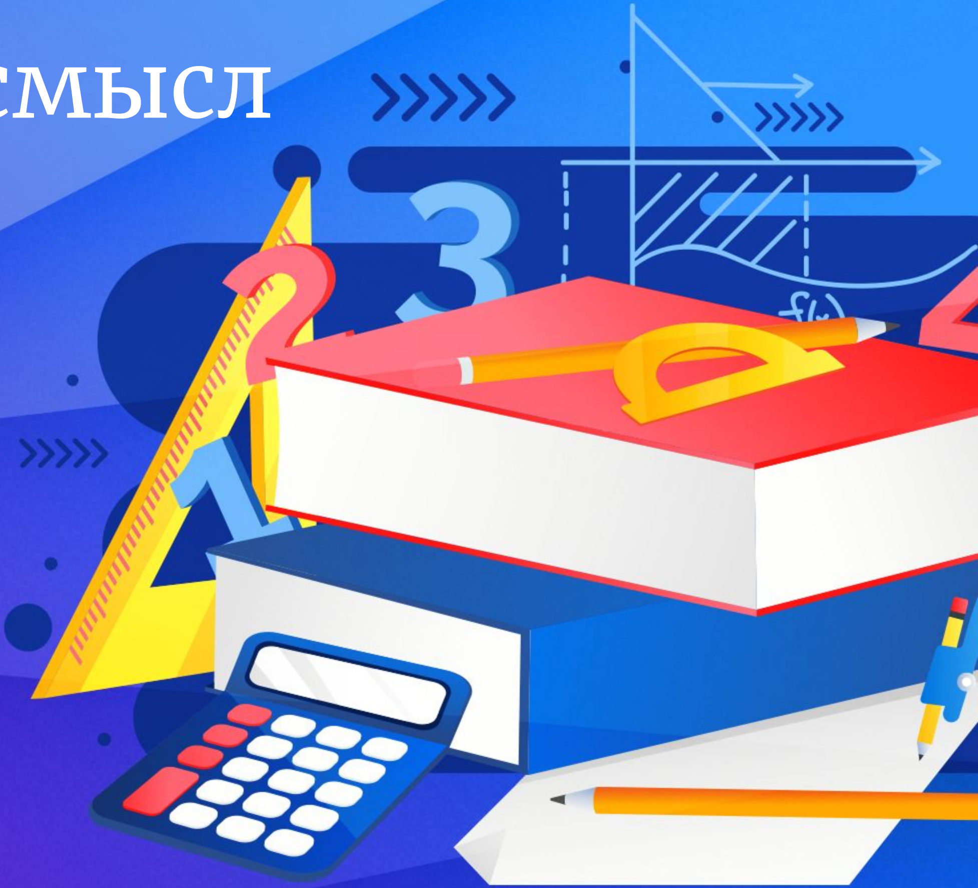
Геометрический смысл производной



Производная
и её геометрический смысл

Сегодня на уроке

1. Выясним геометрический смысл производной функции.
2. Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции.
3. Познакомимся со способом построения касательной к параболе.

Вспомним

Функция вида $y = kx + b$, где k и b – любые действительные числа, называется линейной.

Графиком этой функции является прямая.

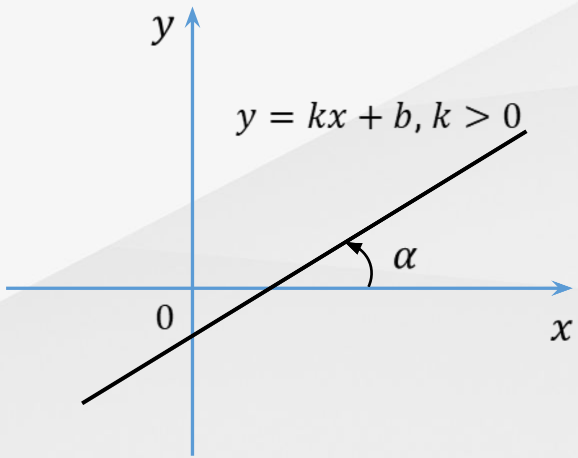
Число $k = \operatorname{tg} \alpha$ называют угловым коэффициентом прямой,

угол α – угол, который эта прямая образует с осью Ox.

Вспомним

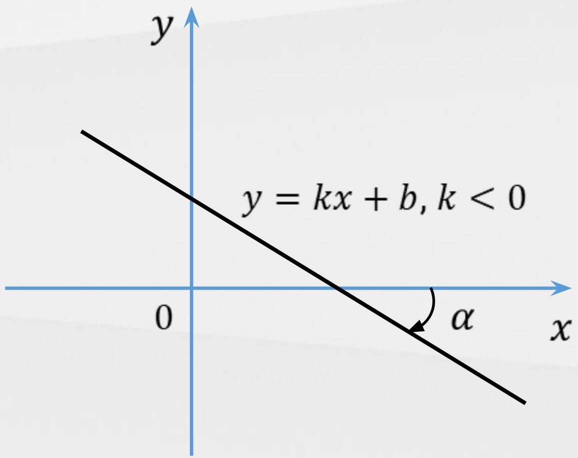
Если $k > 0$, то $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Функция <u>возрастает</u>.



Если $k < 0$, то $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Функция <u>убывает</u>.

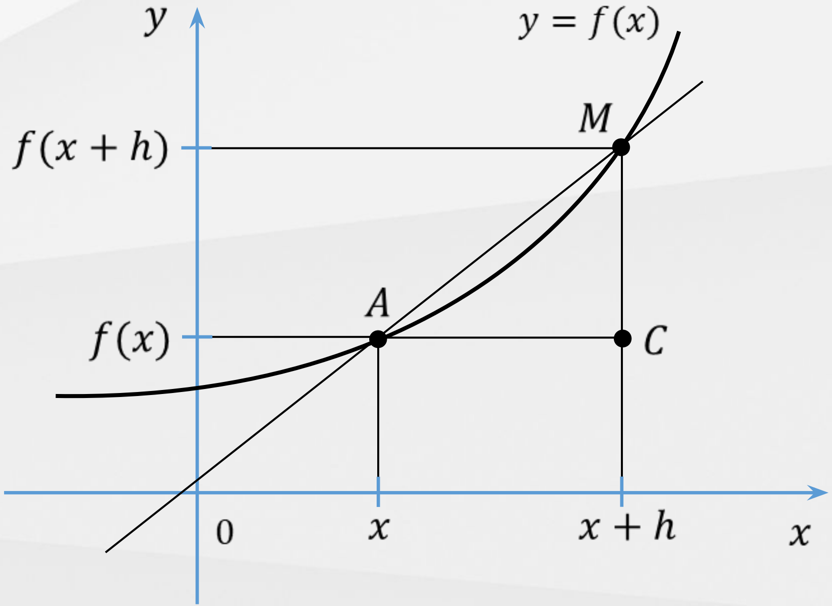


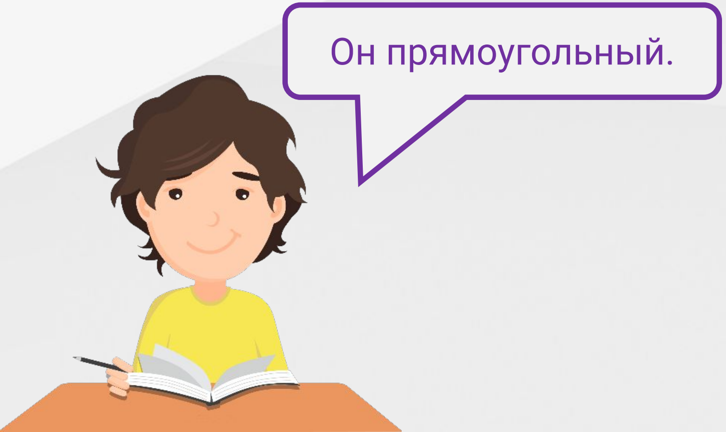
Геометрический смысл производной

$A\ (x; f(x))$, $M\ (x+h; f(x+h))$.

ΔACM – прямоугольный.

$C\ (x+h; f(x))$





Геометрический смысл производной

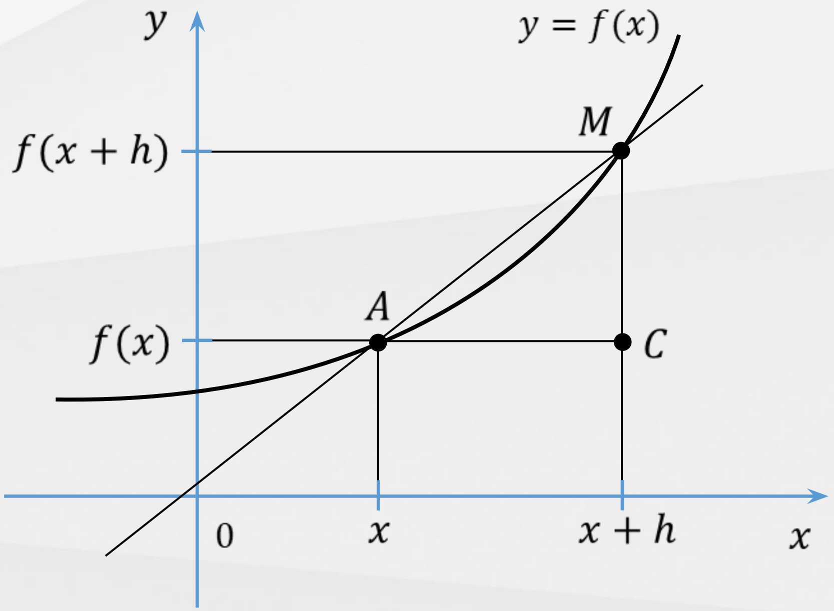
$A\ (x; f(x)),\ M\ (x+h; f(x+h)).$

ΔACM – прямоугольный.

$C\ (x+h; f(x))$

Найдём угловой коэффициент k прямой AM.

Коэффициент k зависит от h, т. е. его можно рассматривать как функцию $k(h)$.



Геометрический смысл производной

$A\ (x; f(x)),\ M\ (x+h; f(x+h)).$

ΔACM – прямоугольный.

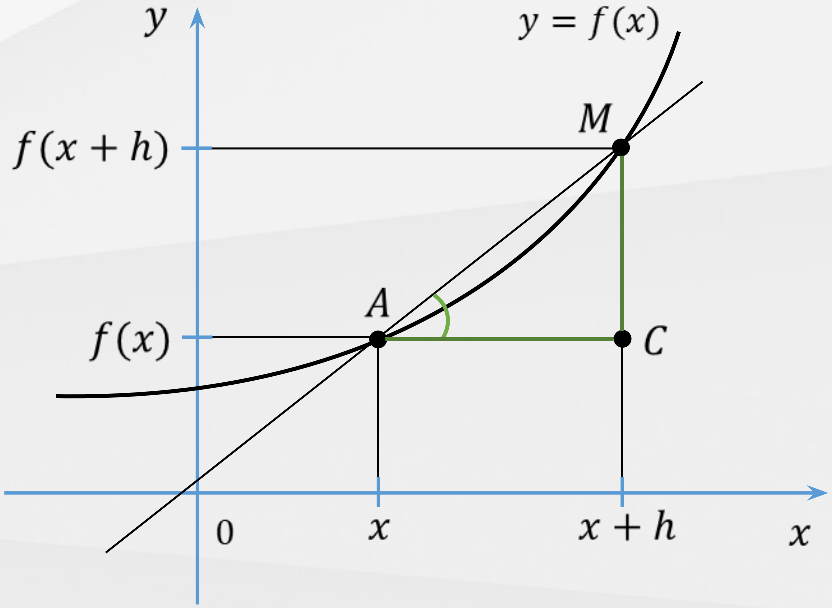
$C\ (x+h; f(x))$

$k(h) = \operatorname{tg} \angle CAM = \frac{MC}{AC},$

$MC = f(x+h) - f(x),$

$AC = (x+h) - x = h.$

Тогда $k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$



Геометрический смысл производной

$A\ (x; f(x)),\ M\ (x+h; f(x+h)).$

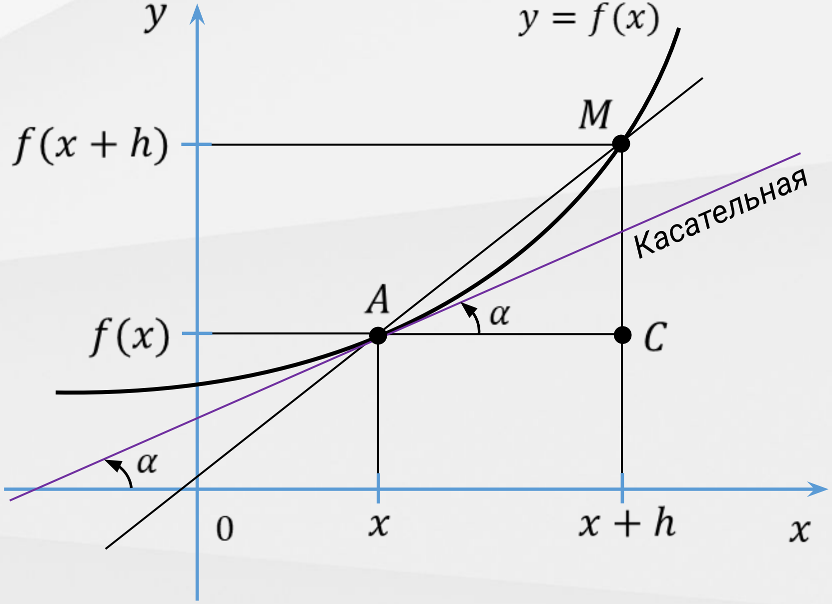
ΔACM – прямоугольный.

$C\ (x+h; f(x))$

$$k(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Пусть число x фиксировано, $h \to 0$.
Прямая AM будет стремиться занять положение прямой, которую называют касательной к графику функции $y = f(x)$,

т. к. $\lim\limits_{h \to 0} k(h) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x).$



$$\boxed{f'(x) = \operatorname{tg}\alpha}$$

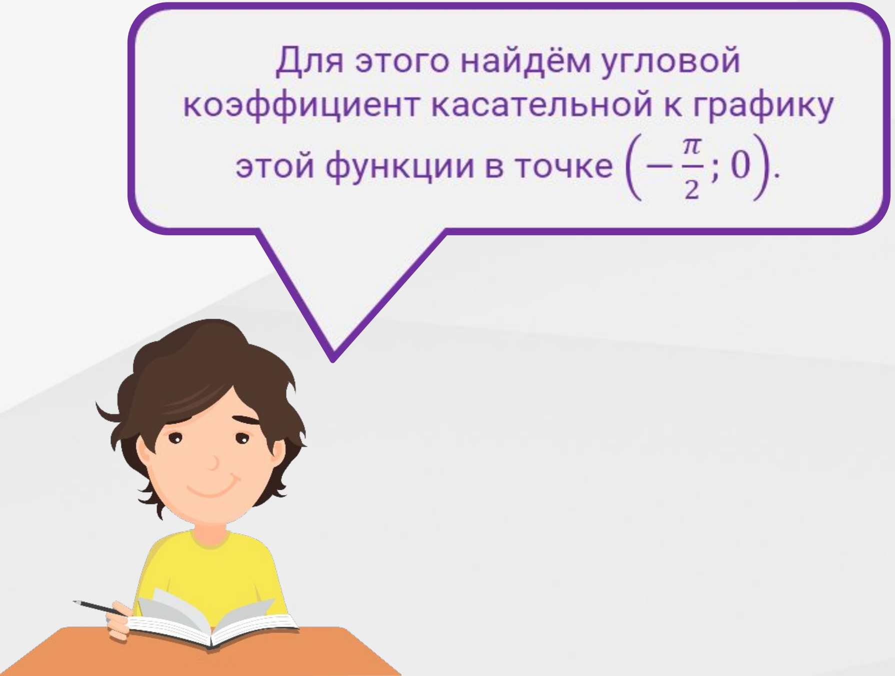
Геометрический смысл производной

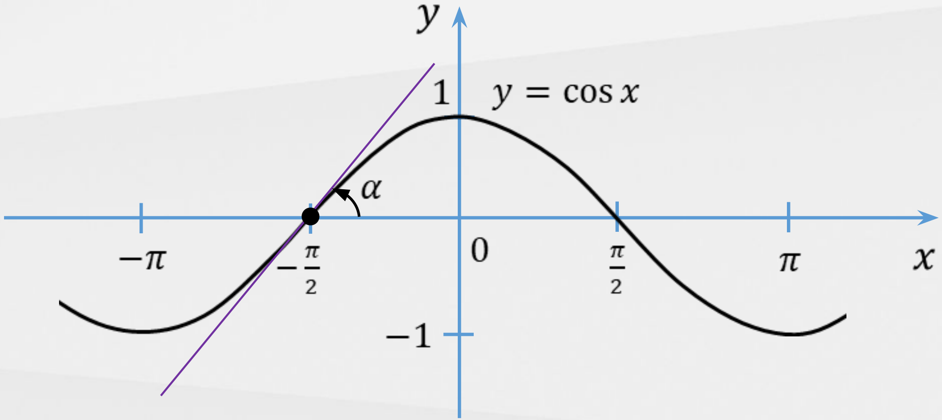
Значение производной функции $f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной к графику в точке $(x; f(x))$.

Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью Ox.

Найдём значение производной данной функции при $x = -\frac{\pi}{2}$.





Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью Ox.

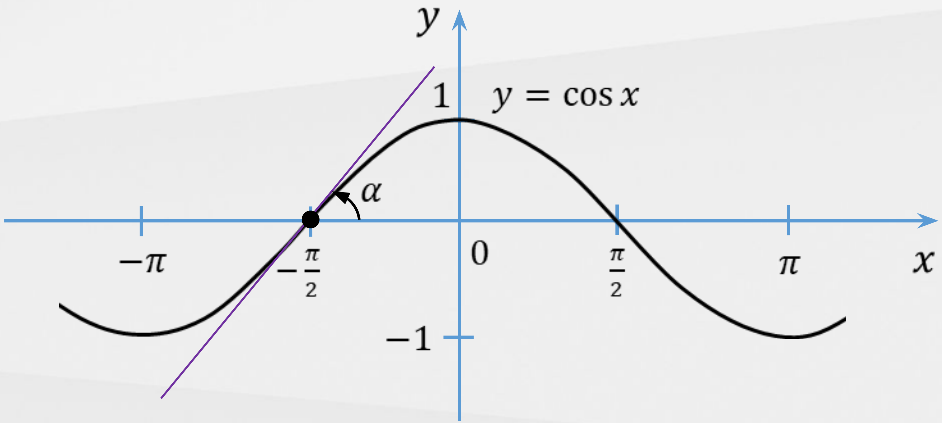
Найдём значение производной данной функции при $x = -\frac{\pi}{2}$.

$f(x) = \cos x,$

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$

$\operatorname{tg}\alpha = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$

$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$



$$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$$

Геометрический смысл производной

Найдём угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью Ox.

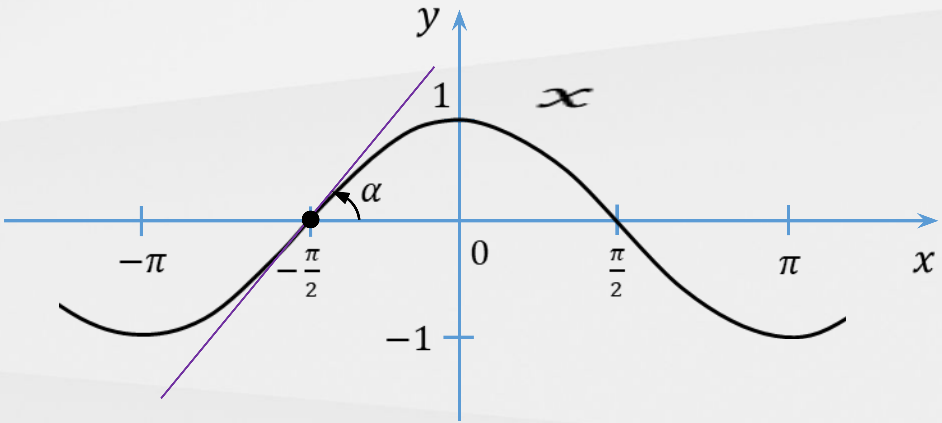
Найдём значение производной данной функции при $x = -\frac{\pi}{2}$.

$f(x) = \cos x,$

$f'(x) = (\cos x)' = -\sin x.$

$\operatorname{tg} \alpha = f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$

$\alpha = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$



Угол между касательной к графику функции $y = \cos x$ в точке $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ и осью абсцисс равен $\frac{\pi}{4}$.

Уравнение касательной

Выведем уравнение касательной к графику дифференцируемой функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$.

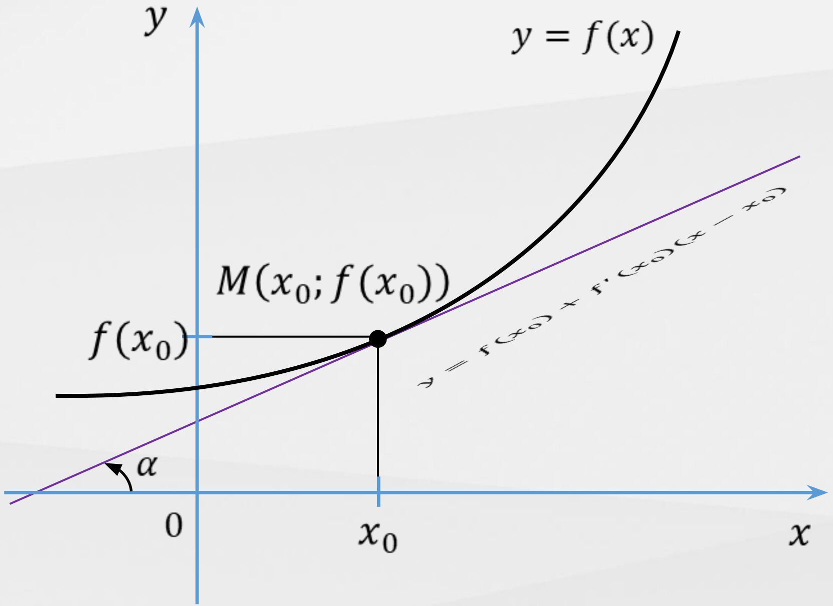
Пусть $y = kx + b$ – искомое уравнение касательной.

$k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$, т. е. $y = f'(x_0)x + b$.

$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$, $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$.

$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$,

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

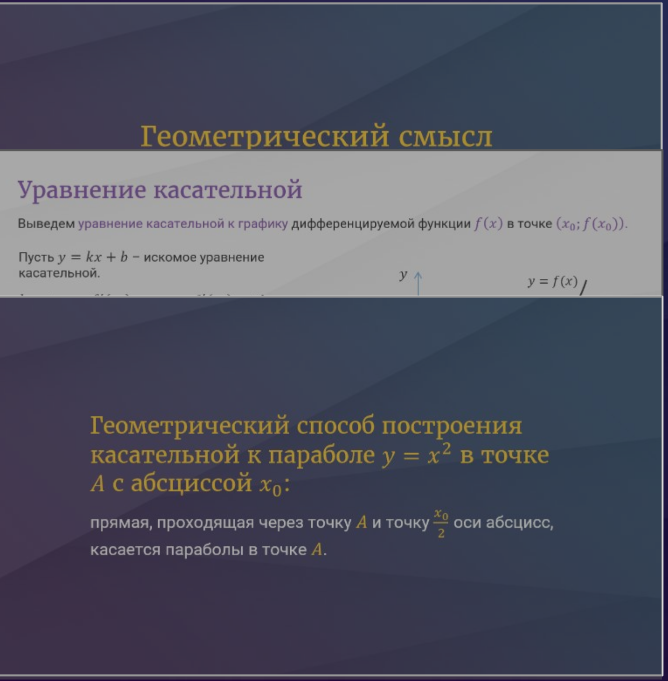


$f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$

Геометрический способ построения касательной к параболе $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0:

прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A.

Итоги урока



Геометрический способ построения касательной к параболе $y = x^2$ в точке A с абсциссой x_0:

прямая, проходящая через точку A и точку $\frac{x_0}{2}$ оси абсцисс, касается параболы в точке A.