



17.3. СВЕДЕНИЕ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА К ПОВТОРНОМУ

Рассмотрим способ вычисления двойных интегралов путем сведения их к повторному интегралу.

Сформулируем теорему.





ТЕОРЕМА.


Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и интегрируема в области D , ограниченную снизу и сверху двумя непрерывными кривыми $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$, причем

$$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$$

$$a \leq x \leq b$$

Пусть для любого x из отрезка $[a,b]$ существует определенный интеграл



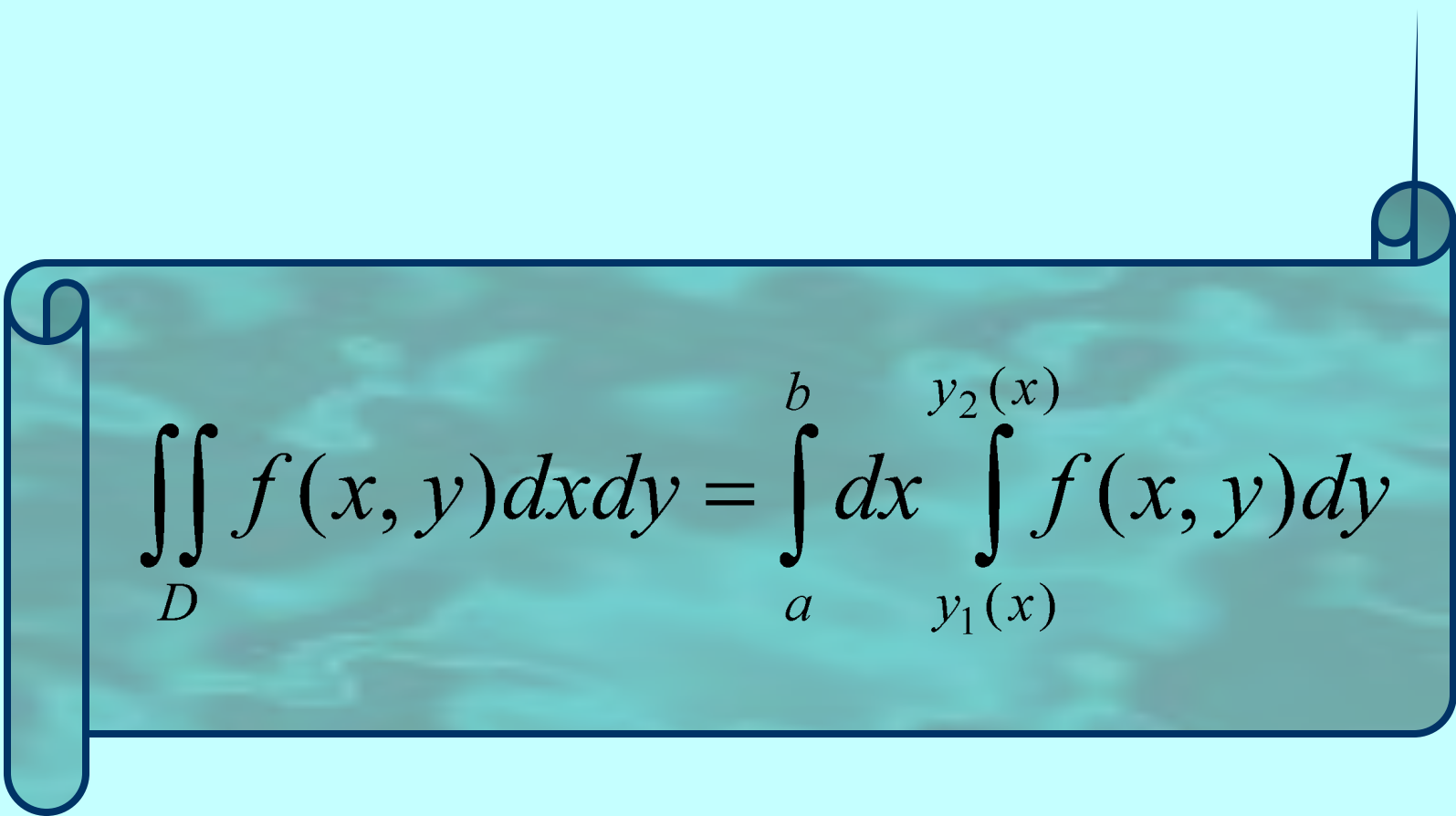



$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

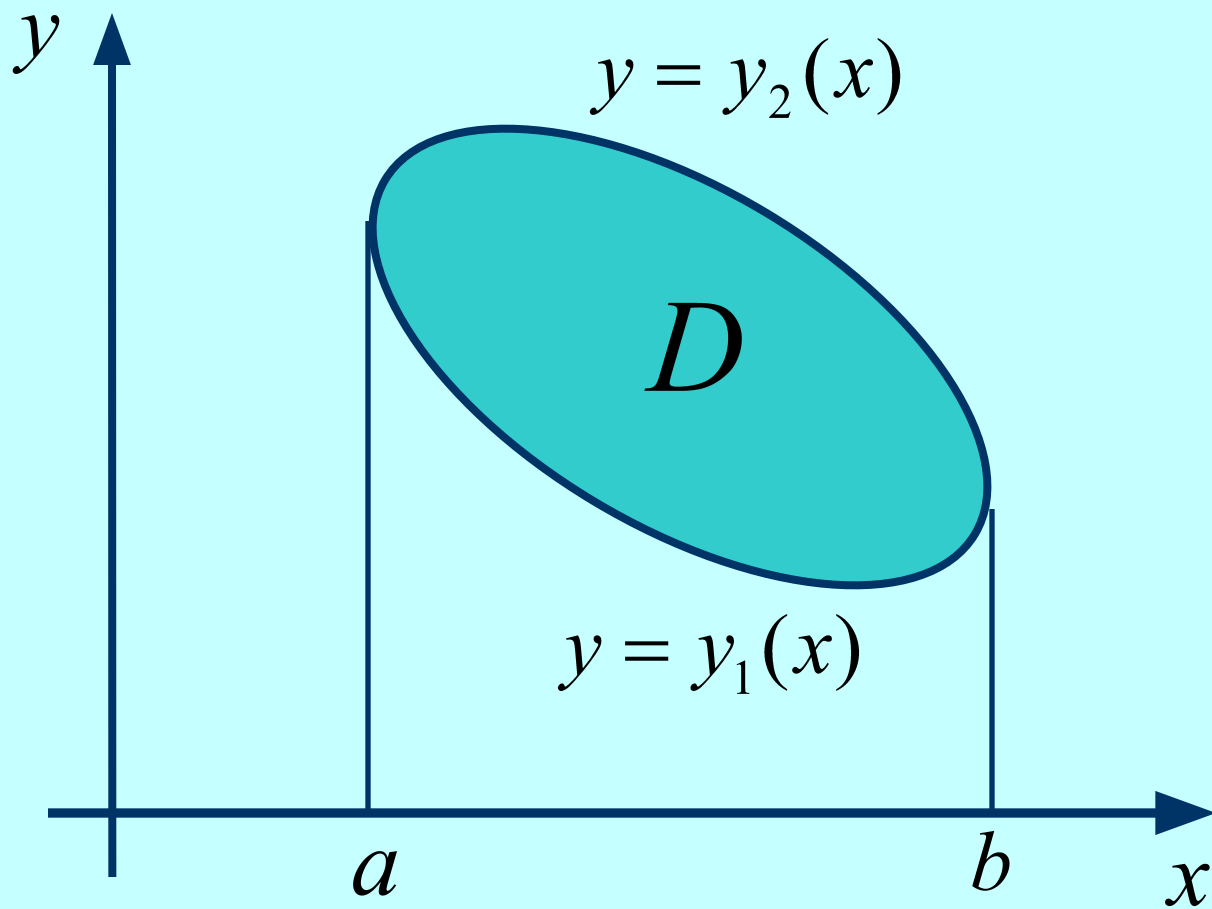
Тогда существует повторный интеграл

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

и выполняется равенство:




$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$




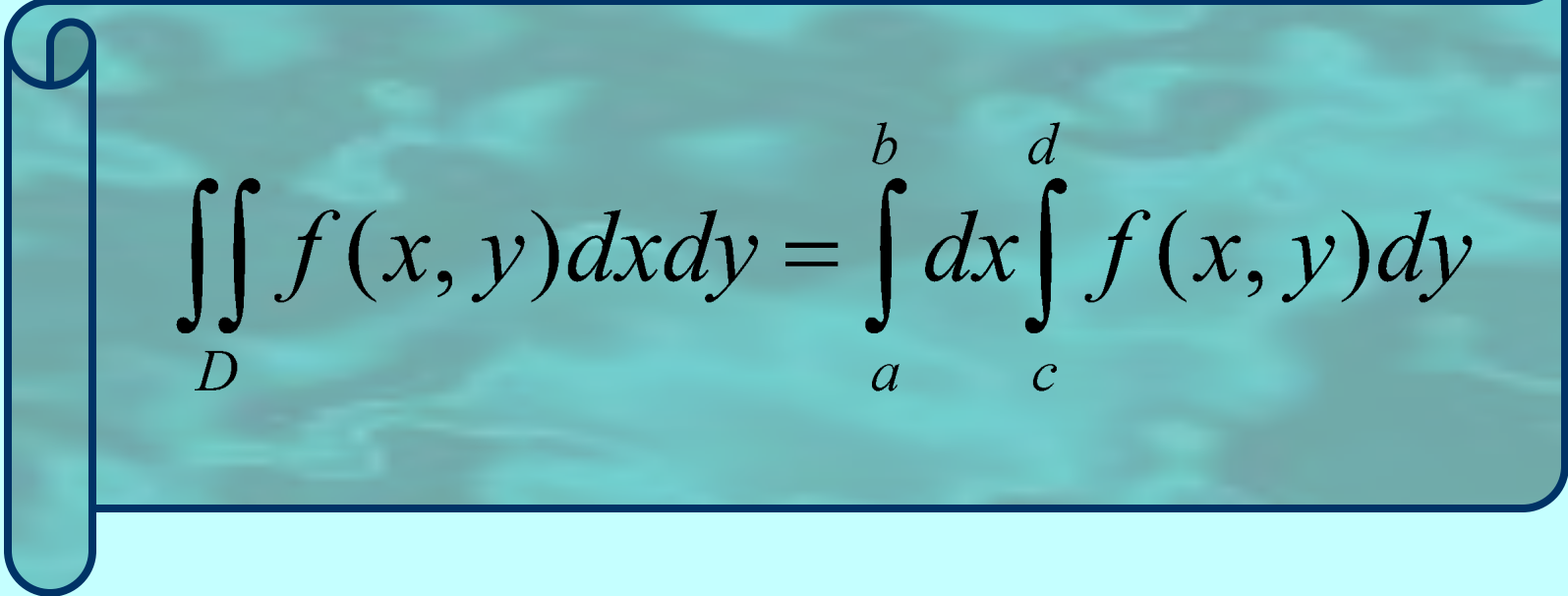


Если D –прямоугольная область, т.е.

$$y_1(x) = c$$

$$y_2(x) = d$$

тогда


$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$$






ПРИМЕРЫ.

1

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D (3x^2 \cdot y - 2x^3) dx dy$$


$$D = \{0 \leq x \leq 1, \quad 1 \leq y \leq 2\}$$




РЕШЕНИЕ.

$$\iint_D (3x^2 \cdot y - 2x^3) dx dy = \int_0^1 dx \int_1^2 (3x^2 \cdot y - 2x^3) dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left[\frac{3}{2} x^2 y^2 - 2x^3 y \right]_1^2 = \int_0^1 \left(\frac{9}{2} x^2 - 2x^3 \right) dx =$$

$$= \left(\frac{3}{2} x^3 - \frac{1}{2} x^4 \right) \Big|_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$





2

Вычислить двойной интеграл

$$\iint_D \sin(x + y) dx dy$$

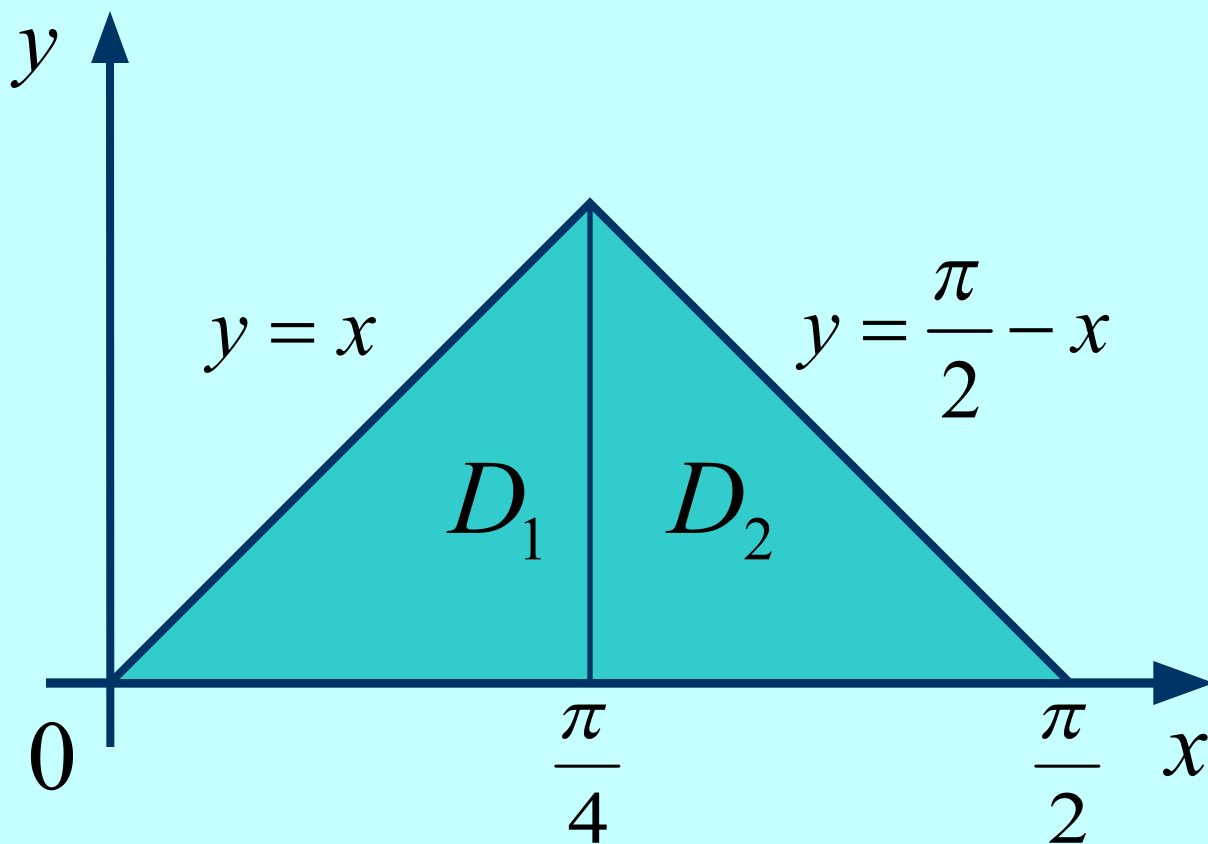
где область D ограничена линиями


$$x = y, \quad x + y = \frac{\pi}{2}, \quad y = 0$$




РЕШЕНИЕ.


Область D –треугольник:





$$\iint_D \sin(x+y) \, dx dy = \iint_{D_1} \sin(x+y) \, dx dy + \iint_{D_2} \sin(x+y) \, dx dy =$$

$$= \int_0^{\pi/4} dx \int_0^x \sin(x+y) \, dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_0^{\pi/2-x} \sin(x+y) \, dy =$$

$$= - \int_0^{\pi/4} dx \cdot \cos(x+y) \Big|_0^x - \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \cdot \cos(x+y) \Big|_0^{\pi/2-x} =$$

$$= - \int_0^{\pi/4} dx \cdot (\cos 2x - \cos x) - \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \cdot (\cos \frac{\pi}{2} - \cos x) =$$



$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{1}{2} \sin 2x + \sin x \right) \Big|_0^{\pi/4} + \sin x \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

