ТЕМА: «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Дисциплина: «Математика»

Специальность: «Лечебное дело»

Курс: 1

Первообразная функции

Функция F(x) называется первообразной для функции f(x), если выполняется равенство F′(x)=f(x)

Нахождение первообразной для данной функции называется интегрированием функции

Свойства первообразной

1. Если F(x) является первообразной для функции f(x), то и функции F(x)+c тоже является первообразной для f(x), где c–это константа.
2. Если F_1 (x) и F2(x) первообразные функции f(x), то они отличаются на константу, т.е.

Неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных называется неопределенным интегралом

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Свойства неопределенного интеграла:

1. $$\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$$

2.

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

3.

$$\int F'(x)dx = F(x) + c$$

4.

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx$$

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$
1	x
c	cx
x^2	$x3/3$
x^n	$x^{n+1}/n+1$, при
$1/x$	$\ln \lvert x \rvert$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$ax+b$	$ax^2/2+bx$
$1/ax+b$	$\ln \lvert ax+b \rvert /a$
$\ln x$	$x \ln x – x$
a^x	$a^x /\ln a$
e^x	e^x

f(x)	F(x)
sin x	**- cos x**
cos x	**sin x**
$1/\sin^2 x$	**- ctg x**
$1/\cos^2 x$	**tg x**

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Интегралы вычисляются с помощью свойств и табличных формул

Пример:

$$\int (3\sin x + 5x^9 - e^x)dx =$$

2. Замена переменной

Для вычисления интегралов вводится новая переменная t, через которую выражается исходная функция f(x) и исходный дифференциал dx. Вычисляется интеграл относительно новой переменной t, получается первообразная F(t) и делается обратная замена – выражаем t через выражение содержащее x

Пример:

$$\int (5x-8)^7 dx =$$

3. Интегрирование по частям

Для вычисления интегралов используется формула:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

где u и dv части исходного интеграла. Чтобы применить формулу необходимо найти v и du, применяя формулы для нахождения дифференциала и интеграла

Пусть $u = f(x)$, тогда $du = f'(x)dx$;

$dv = g(x)dx$, следовательно $v = \int g(x)dx$

Пример: $\int e^x \cdot \sin x dx =$

u = sin x | du = (sin x)′dx = cos x dx

dv = e^xdx | v = ∫e^xdx = e^x

Определённый интеграл

Интеграл взятый на определенном отрезке называется определенным интегралом

$$\int_a^b f(x)dx$$

а и b – пределы интегрирования, а – нижний предел, b – верхний предел (a < b)

Для решения определенного интеграла применяется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Свойства определенного интеграла

1. $$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

2. $$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3. $$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

4. Если f(x) ≤ g(x) на интервале [a; b], то

$$\int_a^b f(x) \le \int_a^b g(x)$$

Применение определённого интеграла

1. Нахождение площади фигуры, ограниченной функцией (функциями):

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

$$S = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

где f(x) ограничивает фигуру сверху, g(x) ограничивает фигуру снизу

2. Нахождение объёма тела вращения, ограниченного функцией:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

3. Нахождение длины дуги кривой:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 - 1}$$

Дифференциальные уравнения

Уравнения содержащие аргумент, функцию и её производные называются дифференциальными уравнениями

Решением дифференциального уравнения является функция y = φ (x; c), где c – константа.

При решении дифференциального уравнения производная заменяется на отношение дифференциалов:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Чтобы выразить функцию через аргумент необходимо избавиться от дифференциалов. Для этого необходимо проинтегрировать выражение. Результатом будет функция $y = \varphi(x; c)$, которая называется общим решением дифференциального уравнения (т.к. вместо с можно подставить любое число). Если константа принимает конкретное числовое значение, то из общего решения выделяется частное решение дифференциального уравнения. Для этого необходимо знать начальные условия: $y = y_0$ при $x = x_0$ или $y_0 = f(x_0)$