

ТЕМА: «ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Дисциплина: «Математика»

Специальность: «Лечебное дело»

Курс: 1

Первообразная функции

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, если выполняется равенство $F'(x) = f(x)$

Нахождение первообразной для данной функции называется интегрированием функции

Свойства первообразной

1. Если $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то и функции $F(x) + c$ тоже является первообразной для $f(x)$, где c — это константа.
2. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ первообразные функции $f(x)$, то они отличаются на константу c .

Неопределенный интеграл

Совокупность всех первообразных называется неопределенным интегралом

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Свойства неопределенного интеграла:

1.
$$\int cf(x)dx = c \int f(x)dx$$

2.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

3.

$$\int F'(x) dx = F(x) + c$$

4.

$$d\left(\int f(x) dx\right) = f(x) dx$$

Таблица первообразных

$f(x)$	$F(x)$
1	x
c	cx
x^2	$x^3/3$
x^n	$x^{n+1}/n+1$, при
$1/x$	$\ln x$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$
$ax+b$	$ax^2/2+bx$
$1/ax+b$	$\ln ax+b /a$
$\ln x$	$x \ln x - x$
a^x	$a^x / \ln a$
e^x	e^x

$f(x)$	$F(x)$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$1/\sin^2 x$	$-\operatorname{ctg} x$
$1/\cos^2 x$	$\operatorname{tg} x$

Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование

Интегралы вычисляются с помощью свойств и табличных формул

Пример:

$$\int (3 \sin x + 5x^9 - e^x) dx =$$

2. Замена переменной

Для вычисления интегралов вводится новая переменная t , через которую выражается исходная функция $f(x)$ и исходный дифференциал dx . Вычисляется интеграл относительно новой переменной t , получается первообразная $F(t)$ и делается обратная замена – выражаем t через выражение содержащее x

Пример:

$$\int (5x - 8)^7 dx =$$

3. Интегрирование по частям

Для вычисления интегралов используется формула:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

где u и dv части исходного интеграла. Чтобы применить формулу необходимо найти v и du , применяя формулы для нахождения дифференциала и интеграла

Пусть $u = f(x)$, тогда $du = f'(x)dx$;

$dv = g(x)dx$, следовательно $v = \int g(x)dx$

Пример:

$$\int e^x \cdot \sin x dx =$$

$$u = \sin x \quad | \quad du = (\sin x)' dx = \cos x dx$$

$$dv = e^x dx \quad | \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Определённый интеграл

Интеграл взятый на определенном отрезке называется определенным интегралом

$$\int_a^b f(x) dx$$

a и b – пределы интегрирования, a – нижний предел, b – верхний предел ($a < b$)

Для решения определенного интеграла применяется формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Свойства определенного интеграла

1.
$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$$

2.
$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

3.
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

4. Если $f(x) \leq g(x)$ на интервале $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) \leq \int_a^b g(x)$$

Применение определённого интеграла

1. Нахождение площади фигуры, ограниченной функцией (функциями):

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

где $f(x)$ ограничивает фигуру сверху, $g(x)$ ограничивает фигуру снизу

2. Нахождение объёма тела вращения, ограниченного функцией:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

3. Нахождение длины дуги кривой:

$$L = \int_a^b \sqrt{(f'(x))^2 + 1}$$

Дифференциальные уравнения

Уравнения содержащие аргумент, функцию и её производные называются дифференциальными уравнениями

Решением дифференциального уравнения является функция $y = \varphi(x; c)$, где c – константа.

При решении дифференциального уравнения производная заменяется на отношение дифференциалов:

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Чтобы выразить функцию через аргумент необходимо избавиться от дифференциалов. Для этого необходимо проинтегрировать выражение. Результатом будет функция $y = \varphi(x; c)$, которая называется общим решением дифференциального уравнения (т.к. вместо c можно подставить любое число). Если константа принимает конкретное числовое значение, то из общего решения выделяется частное решение дифференциального уравнения. Для этого необходимо знать начальные условия: $y = y_0$ при $x = x_0$ или $y_0 = f(x_0)$