

ЛОГИКА

"Логику уже затем учить надо,
что она ум в порядок приводит"
(Подражание М.В. Ломоносову)

Мирончик Ел.А., Мирончик Ек.А.
МБ НОУ "Лицей №111"
г. Новокузнецк



10010111

ГИА ЕГЭ



Логические операции

0	1
1	0

0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	1	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0
1	1	1	1	1	0	1

Приоритет

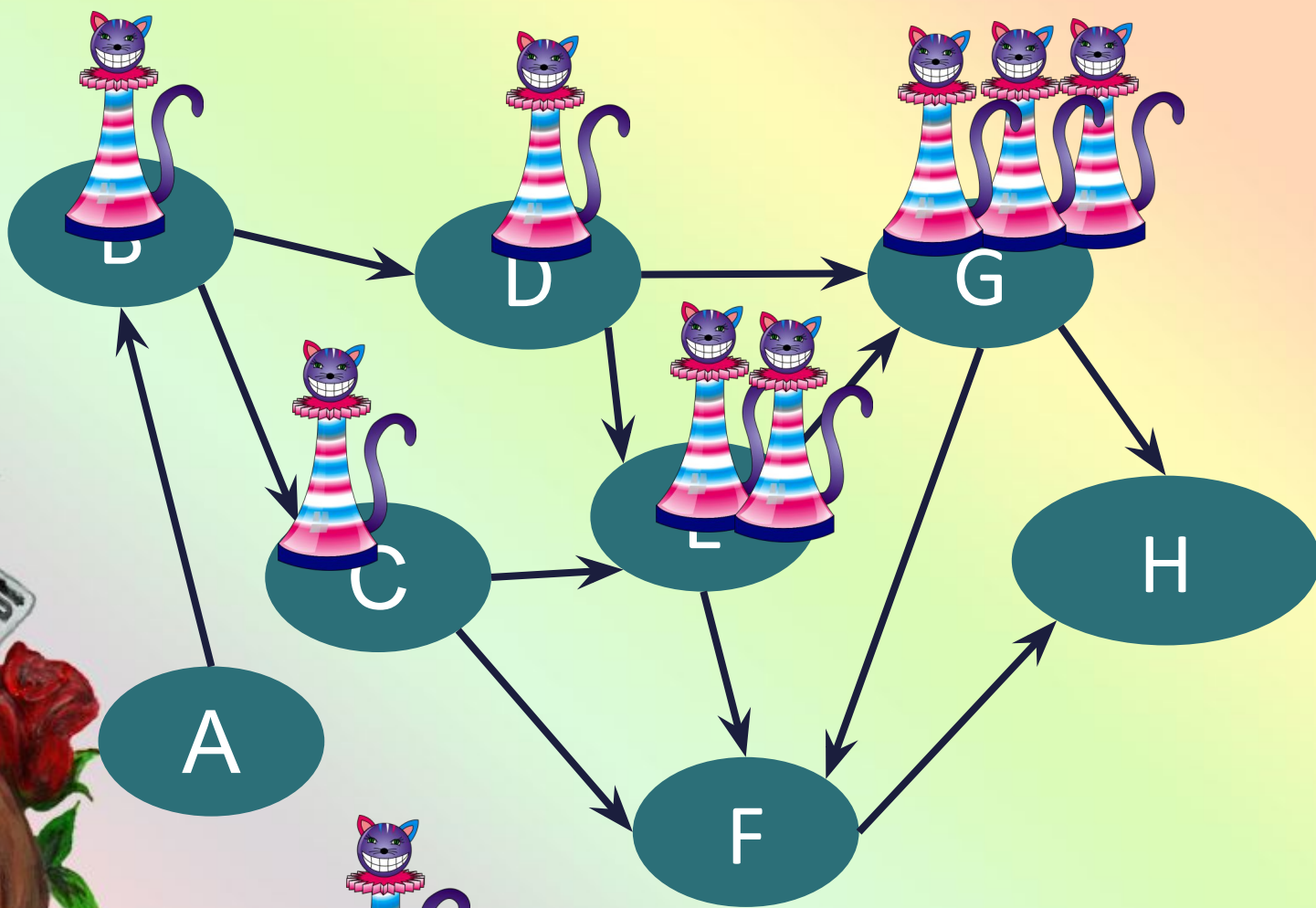
Не

И

Или
Либо

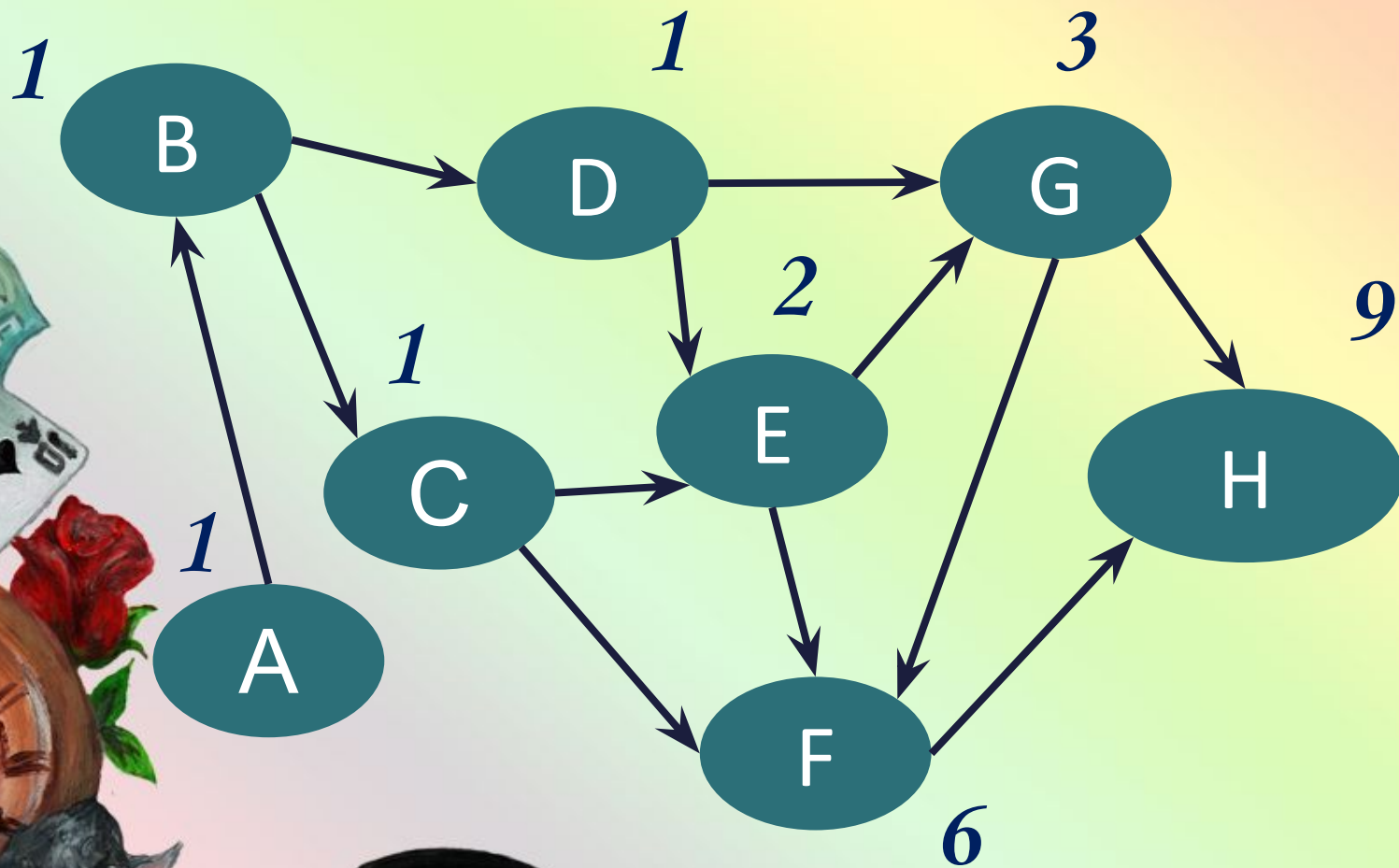
Следует
Равносильно

Законы логики



*Куда-нибудь ты обязательно дойдешь,
конечно, если не остановишься на полпути.
Чеширский кот «Алиса в стране чудес»*

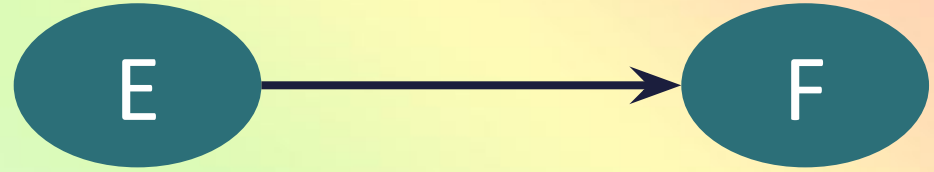
Графический способ



Вопросы:

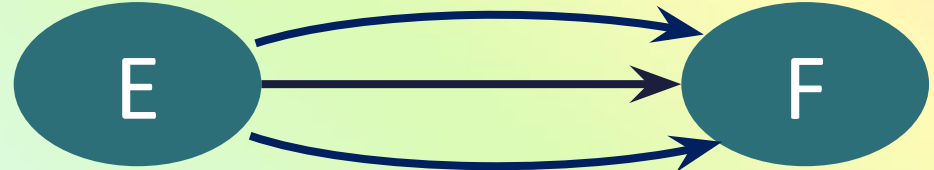


8



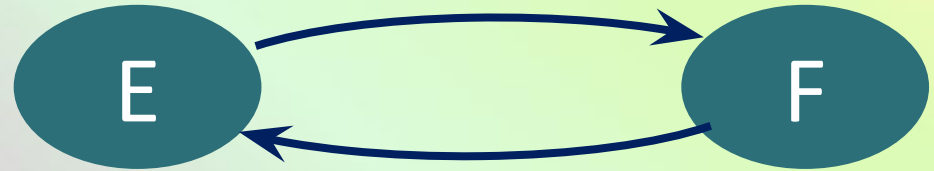
?

8



?

8



?

Вопросы:

Можно ли нарисовать **пять** дорог так, чтобы от **A** до **D** можно было добраться **двумя** способами?

1

A

C

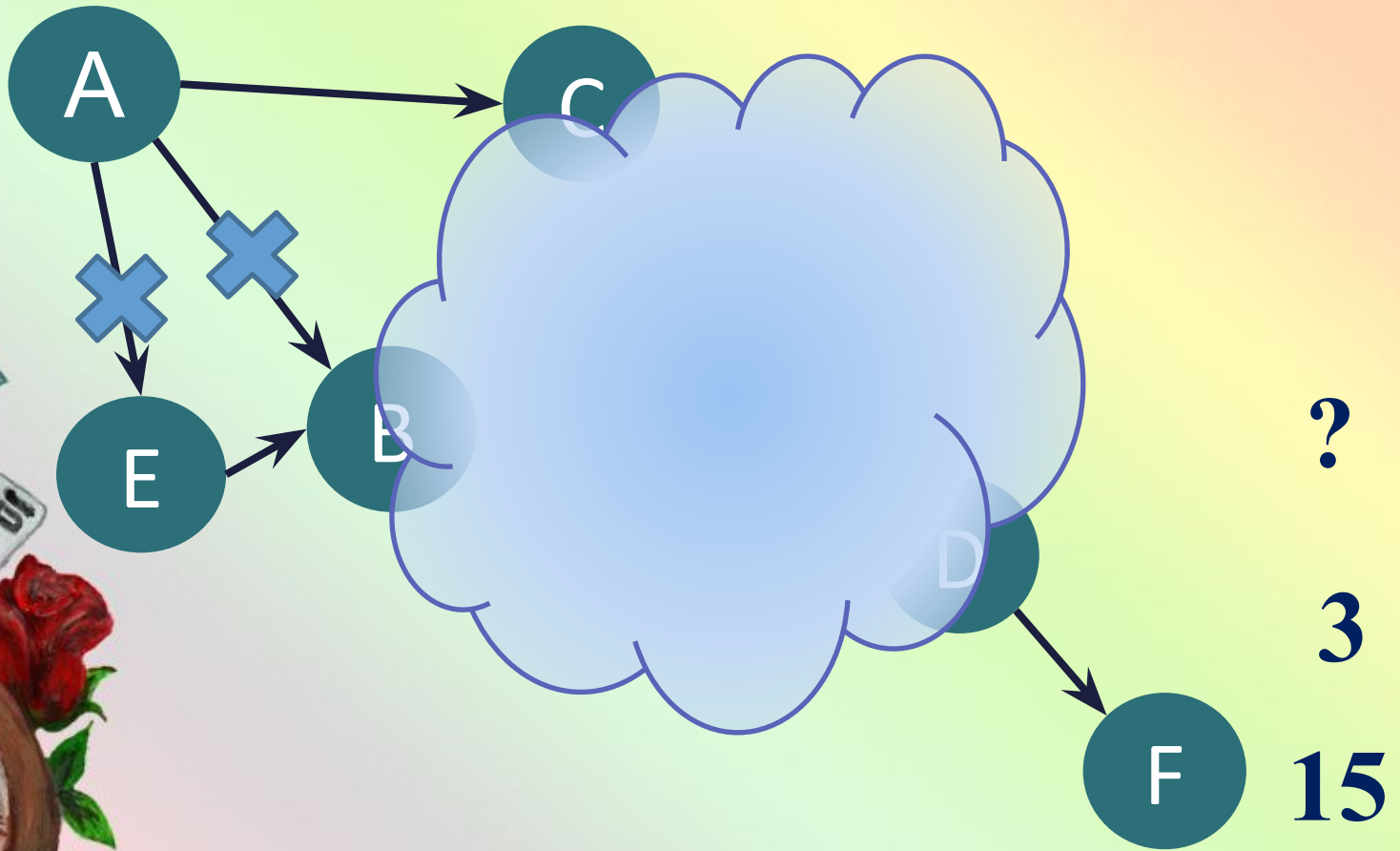
B

D

2



Вопросы:



Метод отображения

Системы логических уравнений

- Простая система
- Решение однородных систем (граф)
- Решение однородных систем (матрица смежности)
- Решение неоднородных систем (особые условия)

Логические уравнения

- Решение логического уравнения

Задача о «чайнике»

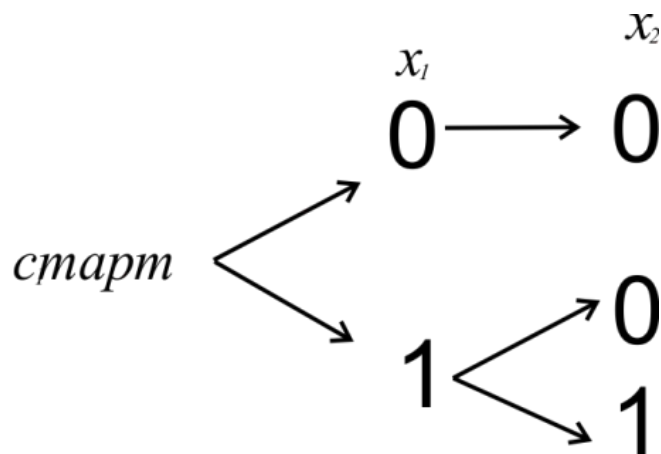
Литература



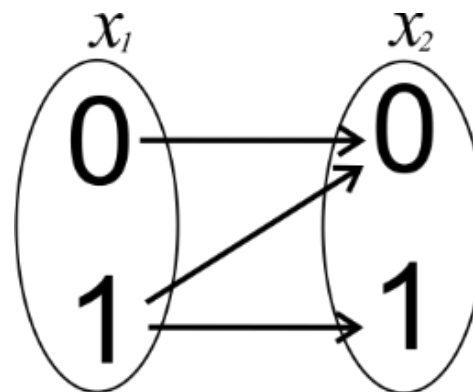
Простая система

$$\begin{cases} x_2 \rightarrow x_1 = 1 \\ x_3 \rightarrow x_2 = 1 \\ x_4 \rightarrow x_3 = 1 \\ x_5 \rightarrow x_4 = 1 \\ x_6 \rightarrow x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_1 \Rightarrow x_2$$



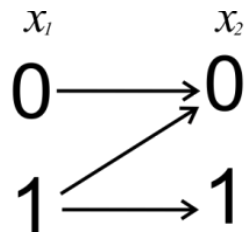
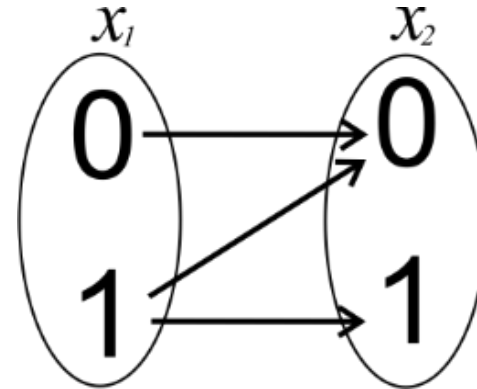
x_1	x_2
0	0
1	0
	1



Простая система

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2 \rightarrow x_1 = 1 \\ x_3 \rightarrow x_2 = 1 \\ x_4 \rightarrow x_3 = 1 \\ x_5 \rightarrow x_4 = 1 \\ x_6 \rightarrow x_5 = 1 \end{array} \right.$$

x_1	x_2
0	0
1	0
	1



Значения	старт	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	финиш
0								
1								

Простая система. (Тренировка)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 \rightarrow x_3 = 1 \\ x_4 \cdot x_3 = 0 \\ x_5 \equiv x_4 = 1 \\ x_6 \equiv \overline{x_5} = 1 \end{cases}$$

5

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_2 = 1 \\ x_2 \rightarrow x_3 = 0 \\ x_3 \rightarrow x_4 = 1 \\ x_4 \rightarrow x_5 = 0 \\ x_5 \rightarrow x_6 = 1 \end{cases}$$

4

Метод отображения

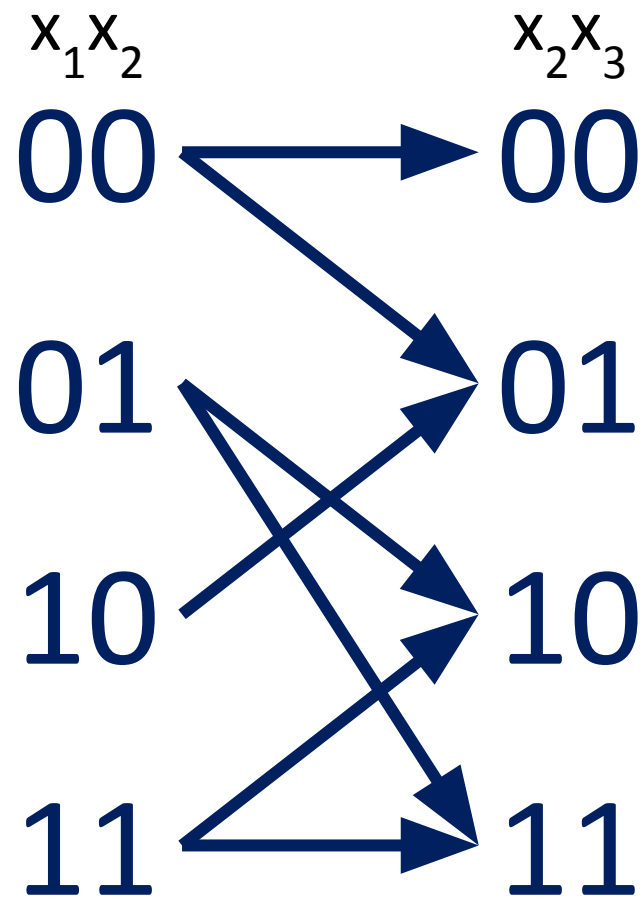
$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_1 \rightarrow x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_2 \rightarrow x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_8 \rightarrow x_{10}) = 1 \end{array} \right.$$

x_1	x_2	x_3
0	0	0
		1
	1	0
		1
1	0	
	1	1

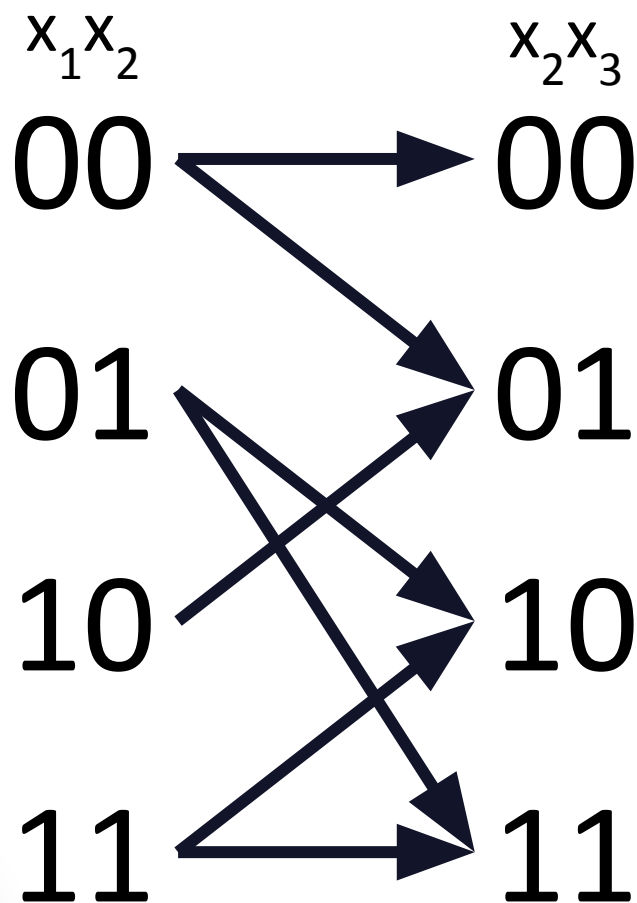


Метод отображения

x_1	x_2	x_3
0	0	0
		1
	1	0
		1
1	0	1
	1	0
		1



Метод отображения



$$F(00) = F(00)$$

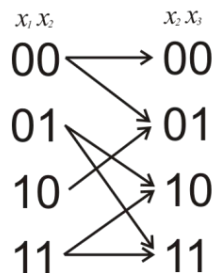
$$F(01) = F(00) + F(10)$$

$$F(10) = F(01) + F(11)$$

$$F(11) = F(01) + F(11)$$



Метод отображения



Пара	Количество пар								
	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	1	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	2	3	5	8	13	21	34	55
10	1	2	4	7	12	20	33	54	88
11	1	2	4	7	12	20	33	54	88

232



Задания для тренировки:

Задание 1.

$$\begin{cases} \bar{x}_1 \cdot (x_2 \rightarrow x_3) + (x_1 \oplus x_3) = 1 \\ \bar{x}_2 \cdot (x_3 \rightarrow x_4) + (x_2 \oplus x_4) = 1 \\ \bar{x}_3 \cdot (x_4 \rightarrow x_5) + (x_3 \oplus x_5) = 1 \\ \dots \\ \bar{x}_8 \cdot (x_9 \rightarrow x_{10}) + (x_8 \oplus x_{10}) = 1 \end{cases}$$

Задание 2.

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow (x_2 \equiv x_3) = 1 \\ x_2 \rightarrow (x_3 \equiv x_4) = 1 \\ x_3 \rightarrow (x_4 \equiv x_5) = 1 \\ \dots \\ x_8 \rightarrow (x_9 \equiv x_{10}) = 1 \end{cases}$$

Задание 3*.

В таблицу выписали все решения уравнения

$$F(x_1, x_2, x_3) = 1$$

x_1	x_2	x_3
0	0	0
		1
	1	1
1	0	0
		1
	1	0

Сколько решений имеет система уравнений:

$$\begin{cases} F(x_1, x_2, x_3) = 0 \\ F(x_2, x_3, x_4) = 0 \\ F(x_3, x_4, x_5) = 0 \\ \dots \\ F(x_8, x_9, x_{10}) = 0 \end{cases}$$

50

100

1



Метод отображения и матрица смежности



Решение первого уравнения

$$\overline{x_1} \cdot (\overline{x_2} + x_3) + x_1 \cdot x_4 = 1$$

x_1	x_2	x_3	x_4	00	01	10	11	
0	0	0	0	+	+	+	+	
			1					
		1	0					
			1					
	1	0	X			+	+	
			1					0
		1						
1	0	0	1		+		+	
		1	1					
	1	0	0	1		+		+
			1	1				
		1	0	1				
			1	1				



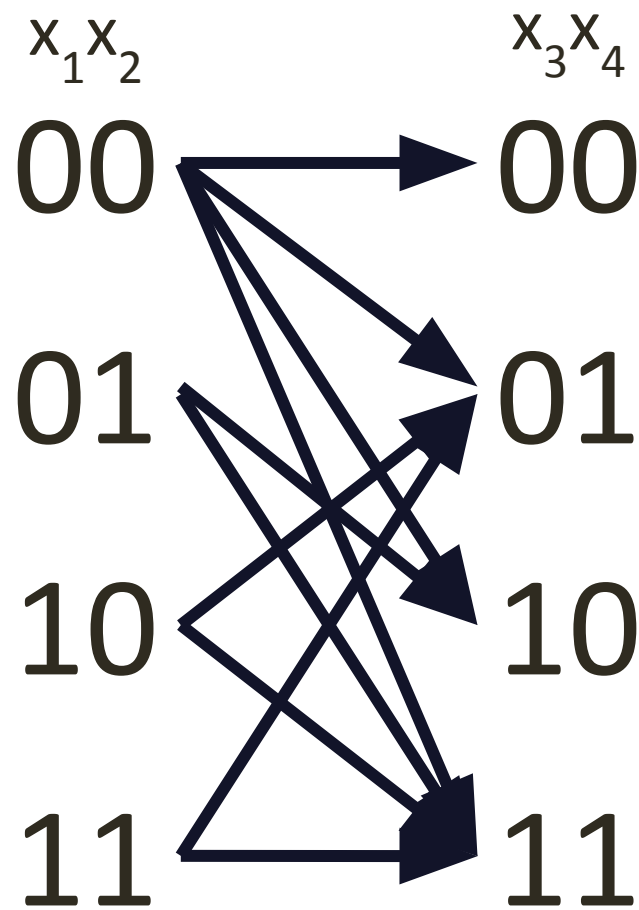
Матрица смежности

Приемни

	00	01 ^к	10	11
00	+	+	+	+
01			+	+
10 ^к		+		+
11		+		+

Источни

Отображение



Формулы отображения

		Приемни			
		к			
		00	01	10	11
Источни	к 00	+	+	+	+
	01			+	+
	к 10		+		+
	11		+		+

$$F(00) = F(00)$$

$$F(01) = F(00) + F(10) + F(11)$$

$$F(10) = F(00) + F(01)$$

$$F(11) = F(00) + F(01) + F(10) + F(11)$$

Для отображения поясняющих стрелок нажмите пары, отмеченные серым цветом



Вычисления

	Матрица				Количество пар				
	00	01	10	11	x_1, x_2	x_3, x_4	x_5, x_6	x_7, x_8	x_9, x_{10}
00	+	+	+	+	1	1	1	1	1
01			+	+	1	3	7	15	31
10		+		+	1	2	4	8	16
11		+		+	1	4	10	22	46

94



Случай быстрого перехода к матрице

$$\begin{cases} \overline{x_1} \cdot x_2 + (x_3 \rightarrow x_4) = 1 \\ \overline{x_3} \cdot x_4 + (x_5 \rightarrow x_6) = 1 \\ \dots \\ \overline{x_7} \cdot x_8 + (x_9 \rightarrow x_{10}) = 1 \end{cases}$$

0	0	
	1	
1	0	
	1	



Вычисления

	Матрица				Количество пар				
	00	01	10	11	x_1, x_2	x_3, x_4	x_5, x_6	x_7, x_8	x_9, x_{10}
00	+	+		+					
01	+	+	+	+					
10	+	+		+					
11	+	+		+					

469



Задания для самостоятельного решения:

192

Задание 2.

$$\begin{cases} (x_1 \equiv x_2) + (x_3 \rightarrow x_4) = 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) + (x_5 \oplus x_6) = 1 \\ (x_5 \equiv x_6) + (x_7 \rightarrow x_8) = 1 \\ (x_7 \rightarrow x_8) + (x_9 \cdot x_{10}) = 1 \end{cases}$$

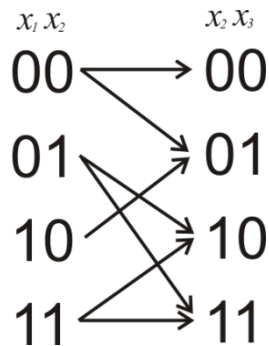
648

Метод отображения для систем с особыми случаями



Дополнительные условия

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_1 \rightarrow x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_2 \rightarrow x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_8 \rightarrow x_{10}) = 1 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

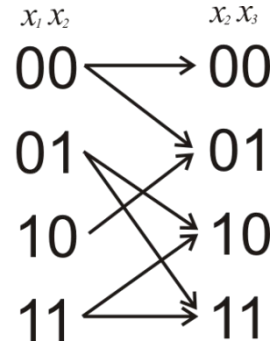


Пара	Количество пар								
	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	1	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	1	2	3	5	8	13	21	34
10	0	1	2	4	7	12	20	33	54
11	0	1	2	4	7	12	20	33	54



Дополнительные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_1 \rightarrow x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_2 \rightarrow x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_8 \rightarrow x_{10}) = 1 \\ x_5 \oplus x_6 = 1 \end{array} \right.$$

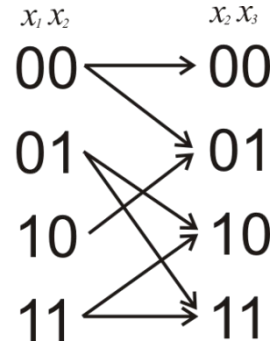


Пара	Количество пар								
	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	1	1	1	1	0	0	0	0	0
01	1	2	3	5	8	12	8	20	28
10	1	2	4	7	12	8	20	28	48
11	1	2	4	7	0	8	20	28	48



Дополнительные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_1 \rightarrow x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_2 \rightarrow x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_8 \rightarrow x_{10}) = 1 \\ x_9 = 0 \end{array} \right.$$



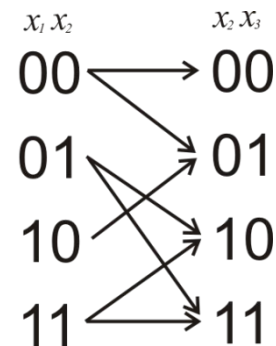
Пара	Количество пар								
	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	1	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	2	3	5	8	13	21	0	55
10	1	2	4	7	12	20	33	54	0
11	1	2	4	7	12	20	33	0	0

56



Дополнительные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_1 \rightarrow x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_2 \rightarrow x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_8 \rightarrow x_{10}) = 1 \\ x_1 = x_5 \end{array} \right.$$



Пара	Количество пар								
	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	1	1	1	1	1	1	1	1	1
01	1	1	2	0	5	1	6	7	13
10	0	1	2	4	0	5	6	12	19
11	0	1	2	0	0	5	6	12	19

$$x_1 = 0 \text{ и } x_5 = 0$$



Дополнительные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_1 \rightarrow x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_2 \rightarrow x_4) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_8 \rightarrow x_{10}) = 1 \\ x_1 = x_5 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_1 = 0 \text{ и } x_5 = 0 \quad 52 \\ \text{решения} \\ x_1 = 1 \text{ и } x_5 = 1 \quad 65 \\ \text{решений} \end{array}$$

Ответ: 117 решений

Пара	Количество пар								
	x_1, x_2	x_2, x_3	x_3, x_4	x_4, x_5	x_5, x_6	x_6, x_7	x_7, x_8	x_8, x_9	x_9, x_{10}
00	0	0	0	0	0	0	0	0	0
01	0	1	1	2	0	5	5	10	15
10	1	1	2	0	5	5	10	15	25
11	1	1	2	3	5	5	10	15	25

65



Задания для тренировки

Задание 1.

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_2 \cdot x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_3 \cdot x_4) = 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) + (x_4 \cdot x_5) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_9 \cdot x_{10}) = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

4

Задание 2.

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_2 \cdot x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_3 \cdot x_4) = 1 \\ (x_3 \rightarrow x_4) + (x_4 \cdot x_5) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_9 \cdot x_{10}) = 1 \\ x_6 \equiv x_7 = 1 \end{cases}$$

18

Задание 3*.

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_2 \cdot x_3) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) + (x_3 \cdot x_4) = 0 \\ (x_3 \rightarrow x_4) + (x_4 \cdot x_5) = 1 \\ \dots \\ (x_8 \rightarrow x_9) + (x_9 \cdot x_{10}) = 0 \end{cases}$$

4



Метод отображения для одного уравнения

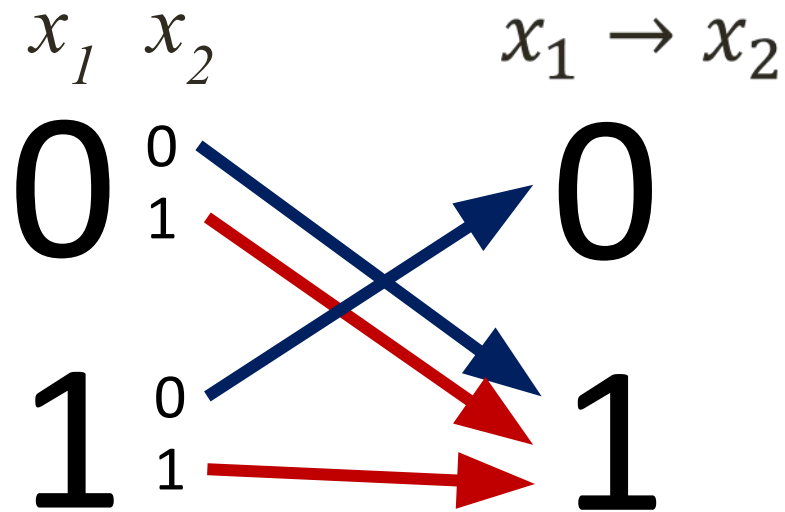


Метод отображения для одного уравнения

$$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4 \rightarrow x_5 = 1$$

Таблица

ИСТИННОСТИ		
x_1	x_2	
0	0	1
	1	1
1	0	0
	1	1



Метод отображения для одного уравнения

$$x_1 \xrightarrow{\text{I}} x_2 \xrightarrow{\text{II}} x_3 \xrightarrow{\text{III}} x_4 \xrightarrow{\text{IV}} x_5 = 1$$

x_1	x_2
0	1

$x_1 \rightarrow x_2$	0
1	1

	Старт	→	→	→	→
		I	II	III	IV
0					
1					

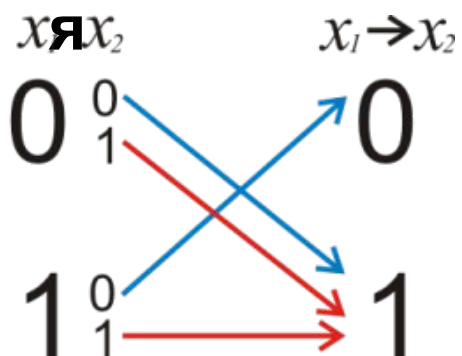
Ответ:



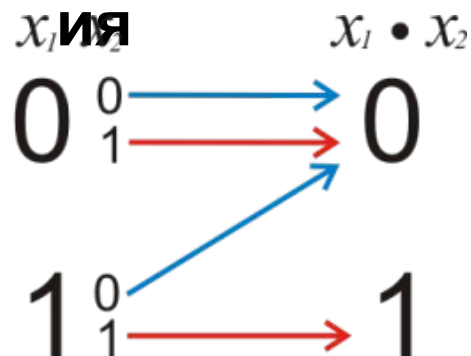
Метод отображения для одного уравнения

$$\overset{\text{I}}{((x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3)) \cdot x_4} \overset{\text{IV}}{\rightarrow} \overset{\text{V}}{x_5} \overset{\text{VI}}{\cdot} x_6 \rightarrow x_7 = 1$$

Импликаци



Конъюнкц



	Старт	·	→	·	→	·	→
		I	II	III	IV	V	VI
0							
1							



Решить уравнения:

$$\left(\left((x_1 \rightarrow x_2) \cdot x_3 \rightarrow x_4 \right) \cdot x_5 \rightarrow x_6 \right) \cdot x_7 \rightarrow x_8 = 1$$

205

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot x_3 + x_4 \oplus x_5 = 1$$

16

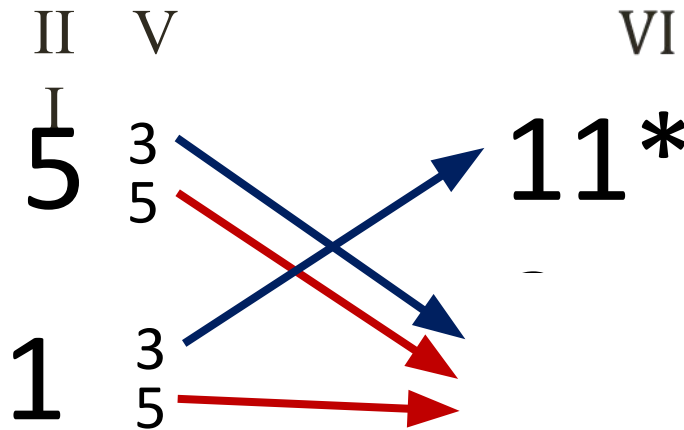
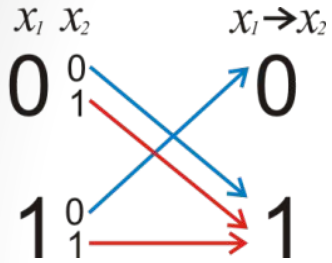
$$\left((x_1 \rightarrow x_2) \cdot x_3 \rightarrow x_4 \right) \rightarrow \left((x_5 \rightarrow x_6) \cdot x_7 \right) = 1$$

63

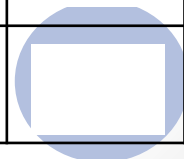


Метод отображения для одного уравнения

$$(x_1 \xrightarrow{I} x_2 \xrightarrow{II} x_3 \xrightarrow{III} x_4) \xrightarrow{VI} (x_5 \xrightarrow{IV} x_6 \xrightarrow{V} x_7) = 1$$

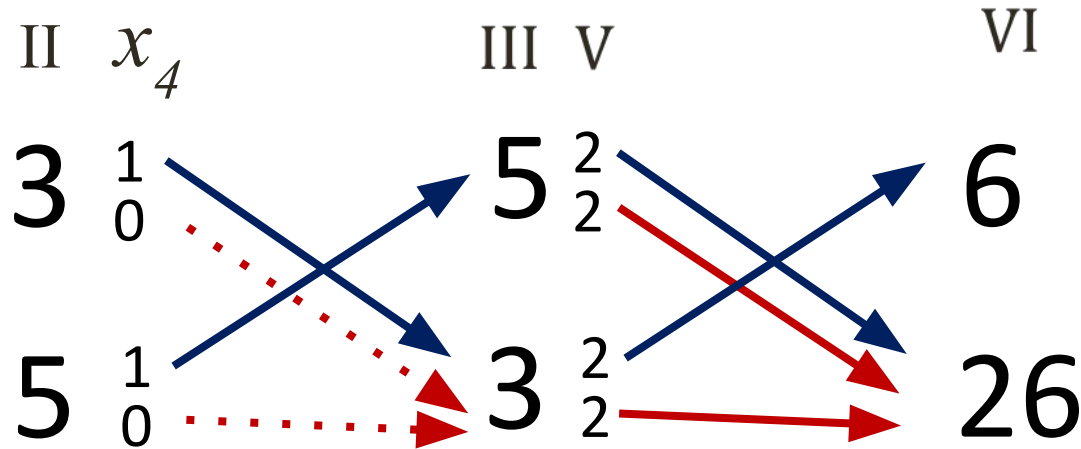
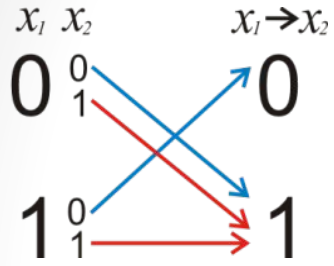


	Старт	1 →	→	→	5 Старт	→	→	→
		I	II	III		IV	V	VI
0								
1								

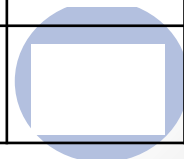


$$X_4 = 0$$

$$(x_1 \xrightarrow{I} x_2 \xrightarrow{II} x_3 \xrightarrow{III} x_4) \xrightarrow{VI} (x_4 \xrightarrow{IV} x_5 \xrightarrow{V} x_6) = 1$$



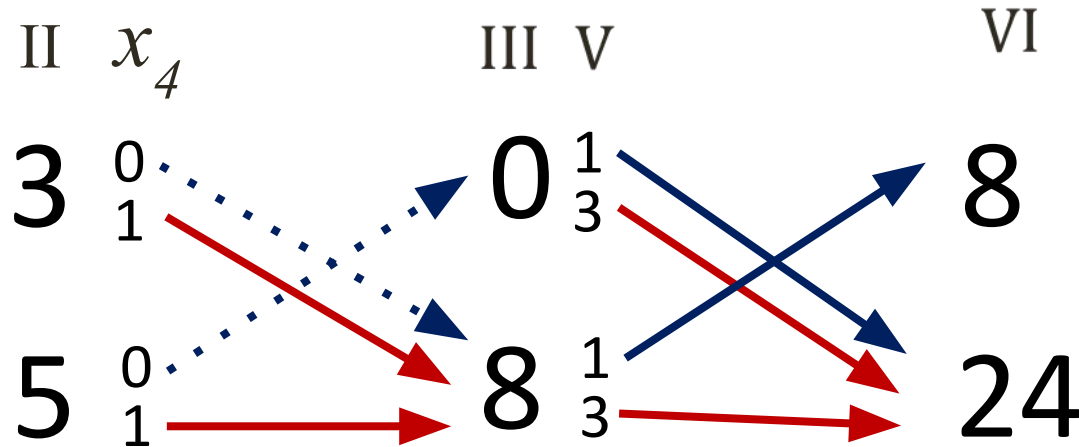
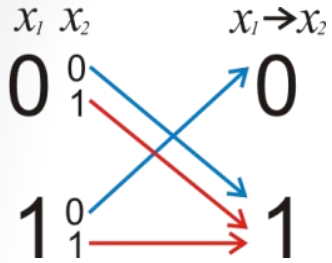
	Старт	→	→	→	Старт	→	→	→
		I	II	III		IV	V	VI
0								
1								



$$X_4 = 1$$

ОТВЕТ: 26+24=50

$$(x_1 \xrightarrow{I} x_2 \xrightarrow{II} x_3 \xrightarrow{III} x_4) \xrightarrow{VI} (x_4 \xrightarrow{IV} x_5 \xrightarrow{V} x_6) = 1$$



	Старт	→	→	→	Старт	→	→	→
		I	II	III		IV	V	VI
0								
1								<input type="text"/>



Определить количество решений:

$$(x_1 + x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_4 + x_5 \rightarrow x_6) \rightarrow x_7 = 1$$

79

$$(x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_4 \cdot (x_5 \rightarrow x_6)) = 1$$

29

$$\begin{cases} (x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_4 \cdot (x_5 \rightarrow x_6)) = 1 \\ (y_1 \cdot y_2 \rightarrow y_3) \rightarrow (y_4 \cdot (y_5 \rightarrow y_6)) = 1 \end{cases}$$

841

$$(x_1 \cdot x_2 \rightarrow x_3) \rightarrow (x_3 \cdot (x_4 \rightarrow x_5)) \rightarrow x_6 = 1$$

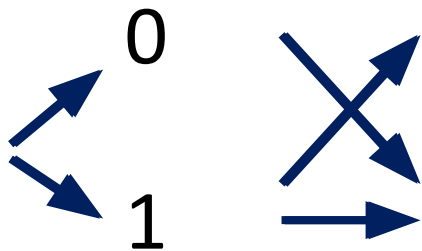
40



Подстановка

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) + (x_3 \equiv x_4) = 1 \\ (x_3 \oplus x_4) \rightarrow (x_5 \cdot x_6) = 1 \end{cases}$$

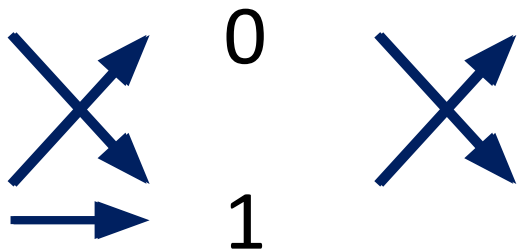
$x_1 \rightarrow x_2$



$\underline{1} * 1$

$\underline{1} * 3$

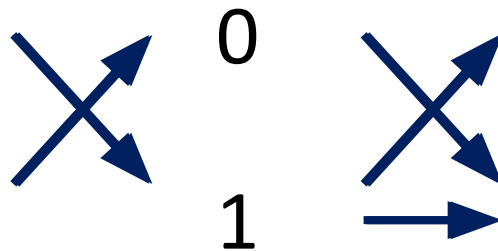
$x_3 \equiv x_4$



$\underline{3} * 2$

$\underline{4} * 2$

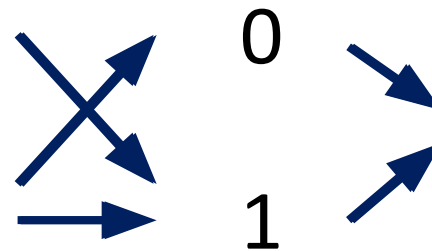
$x_3 \oplus x_4$



$\underline{8}$

$\underline{6}$

$x_5 \cdot x_6$



$\underline{6} * 3$

$\underline{8} * 1$

1

24

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 + y_1) \oplus (x_2 \cdot y_2) = 1 \\ (x_2 \cdot y_2) \cdot (x_3 \rightarrow y_3) = 0 \\ \overline{(x_3 \rightarrow y_3)} + x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = 1 \\ x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 + (y_4 \rightarrow y_5 \rightarrow y_6) = 1 \end{array} \right.$$

Определить количество решений:

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_3 \rightarrow x_4) \cdot (x_4 \rightarrow x_5) \cdot (x_5 \rightarrow x_6) = 1 \\ (x_1 \rightarrow y_1) \cdot (x_2 \rightarrow y_2) \cdot (x_3 \rightarrow y_3) \cdot (x_4 \rightarrow y_4) \cdot (x_5 \rightarrow y_5) \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1 \end{cases}$$

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) \cdot \dots \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1$$

$$(x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) \cdot \dots \cdot (x_5 \rightarrow x_6) \cdot (x_5 \rightarrow y_5) \cdot (x_6 \rightarrow y_6) = 1$$

$$\begin{cases} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (x_1 \rightarrow y_1) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (x_2 \rightarrow y_2) = 1 \end{cases}$$

Ответ: 127

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y_1	y_2
	0	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	1	1	0	0	0	0	0
	0	1	1	1	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	0
	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	x						
	1	1	1	1	1	1	1	1

		приемник			
		00	01	10	11
И	00	+	+	+	+
	01	+	+	+	+
	10				
С					
Т					
О					
Н					



ЕГЭ-2015 (Пробник)

Вариант -
1

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (y_1 \rightarrow y_2) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) = 1 \\ \dots \\ (x_9 \rightarrow x_{10}) \cdot (y_9 \rightarrow y_{10}) = 1 \\ x_1 \rightarrow y_1 = 1 \end{array} \right.$$

Вариант -
2

$$\left\{ \begin{array}{l} (x_1 \rightarrow x_2) \cdot (y_1 \rightarrow y_2) = 1 \\ (x_2 \rightarrow x_3) \cdot (y_2 \rightarrow y_3) = 1 \\ \dots \\ (x_9 \rightarrow x_{10}) \cdot (y_9 \rightarrow y_{10}) = 1 \\ x_1 + y_2 = 1 \end{array} \right.$$

ЕГЭ-2016 (Пробник)

$$\left\{ \begin{array}{l} ((x_1 \equiv x_3) + (x_2 \equiv x_4)) \cdot \overline{((x_1 \equiv x_3) + (x_2 \equiv x_4))} = 0 \\ ((x_2 \equiv x_4) + (x_5 \equiv x_7)) \cdot \overline{((x_2 \equiv x_4) + (x_5 \equiv x_7))} = 0 \\ ((x_5 \equiv x_7) + (x_6 \equiv x_8)) \cdot \overline{((x_5 \equiv x_7) + (x_6 \equiv x_8))} = 0 \\ ((x_6 \equiv x_8) + (x_9 \equiv x_{10})) \cdot \overline{((x_6 \equiv x_8) + (x_9 \equiv x_{10}))} = 0 \\ \quad ((x_1 \equiv x_3) \rightarrow (x_2 \equiv x_4)) \rightarrow x_5 = 1 \\ \quad ((x_5 \equiv x_7) \rightarrow (x_6 \equiv x_8)) \rightarrow x_{10} = 1 \end{array} \right.$$

Список литературы:

- Е.А. Мирончик. Метод отображения — видимая часть айсберга // Информатика, № 10, 2019, с. 43-52.
- Е.А. Мирончик. Графы и системы логических уравнений // Информатика, № 8, 2016, с. 35-39.
- Е.А. Мирончик. Люблю ЕГЭ за В15, или Ещё раз про метод отображения // Информатика, № 8, 2014, с. 26-32.
- Е.А. Мирончик. Метод отображения // Информатика, № 10, 2013, с. 18-26.
- Е.А. Мирончик. Алгебра предикатов и построение геометрических моделей на ЕГЭ по информатике // Информатика, № 3, 2019, с. 40-47.



<https://vk.com/club180658320>

