ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ
ЧАСТЬ 3

Практическое занятие

Неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$

Если под знаком предела стоит дробно-рациональная функция, то для того чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$, необходимо числитель и знаменатель дроби разделить на старшую степень переменной x.

Примеры

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+21}{2x^2+x+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}+\frac{21}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5-\frac{1}{x}+\frac{21}{x^2}}{2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0, a=const,$ получим

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5-0+0}{2+0+0}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-x+21}{2x^3+x+1}=\left|\frac{\infty}{\infty}\right|=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{21}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{21}{x^3}}{2+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}=$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x}=0, a=const,$ получим

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{0-0+0}{2+0+0}=\frac{0}{2}=0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^6-x+21}{2x^3+x+1} = \left|\dfrac{\infty}{\infty}\right| = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{5x^6}{x^6}-\frac{x}{x^6}+\frac{21}{x^6}}{\frac{2x^3}{x^6}+\frac{x}{x^6}+\frac{1}{x^6}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5-\frac{1}{x^5}+\frac{21}{x^6}}{\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}+\frac{1}{x^6}} =$

Учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{a}{x} = 0, a = const,$ получим

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5-0+0}{0+0+0} = \infty.$$

$$\mathbf{4.}\ \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x^3-1\right)^5}{x^3(5x^4-1)^3} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(2x^3\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)\right)^5}{x^3\left(5x^4\left(1-\frac{1}{5x^4}\right)\right)^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{2^5x^{15}\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^5}{x^3\cdot5^3\cdot x^{12}\left(1-\frac{1}{5x^4}\right)^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{32x^{15}\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^5}{125\cdot x^{15}\left(1-\frac{1}{5x^4}\right)^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{32\left(1-\frac{1}{2x^3}\right)^5}{125\left(1-\frac{1}{5x^4}\right)^3} =$$ учитывая, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{x} = 0, a = const,$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{32\cdot(1-0)^5}{125\cdot(1-0)^3} = \frac{32}{125}$$