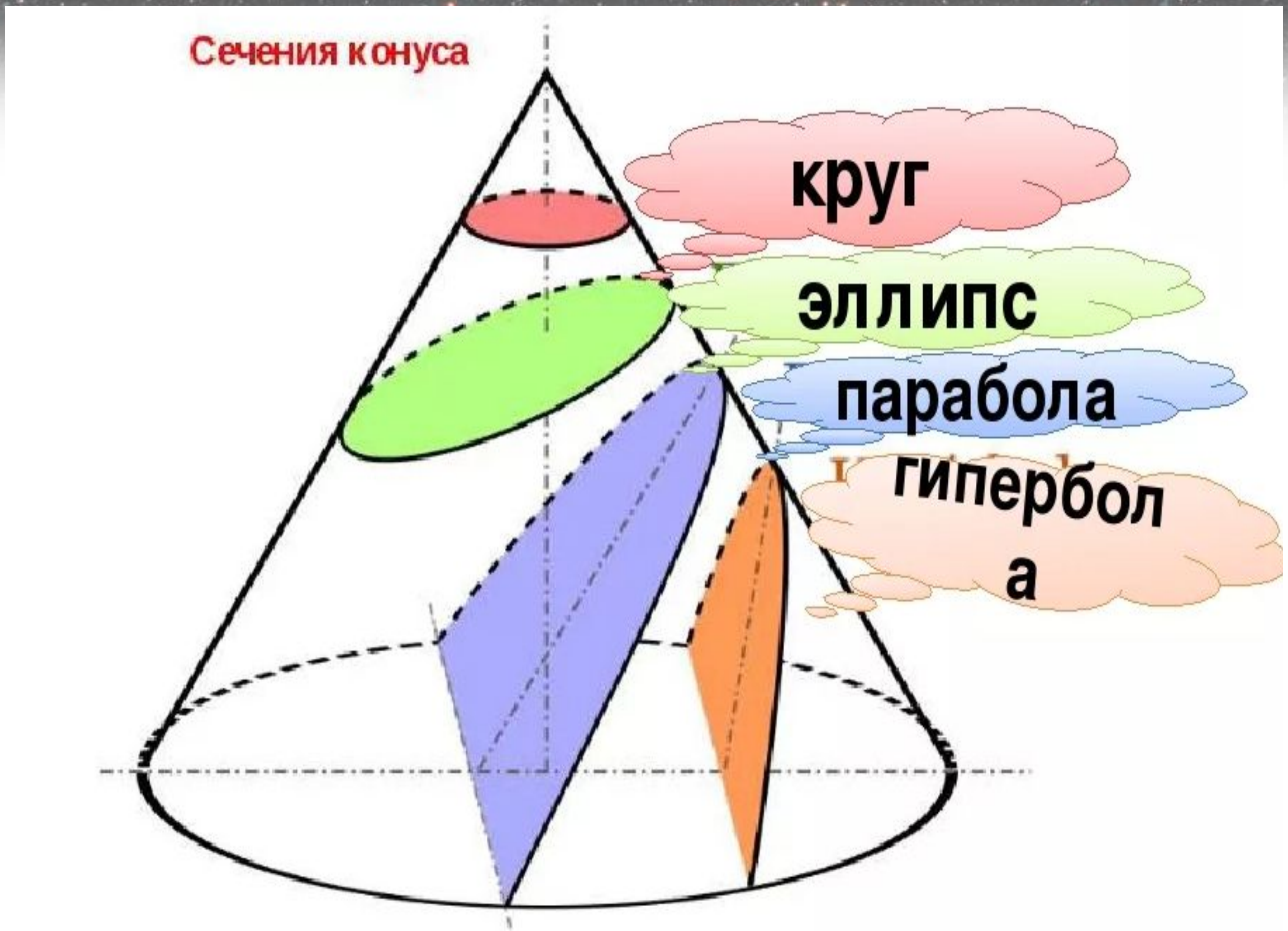
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
"САМАРСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ АКАДЕМИКА С.П. КОРОЛЕВА»
(САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Лекция 11

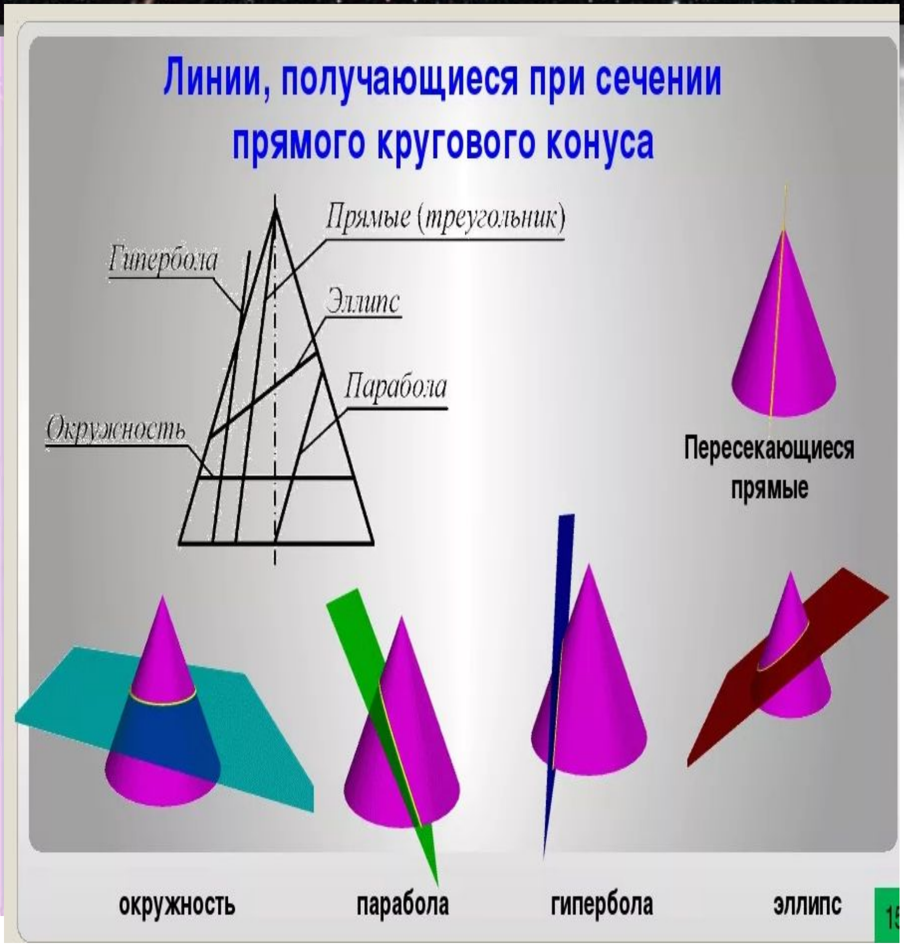
Пересечение поверхности вращения плоскостью. Развертка нижней отсеченной части конуса.

САМАРСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
SAMARA UNIVERSITY

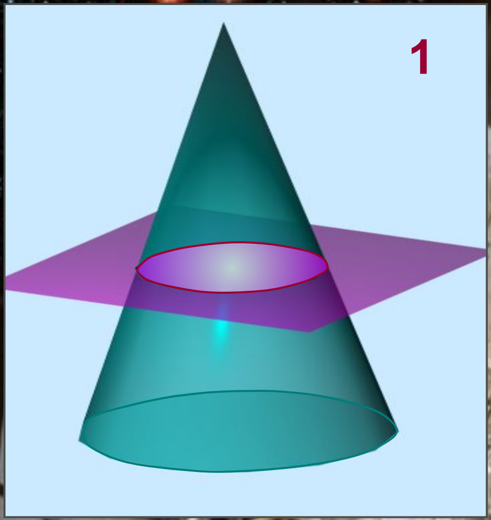


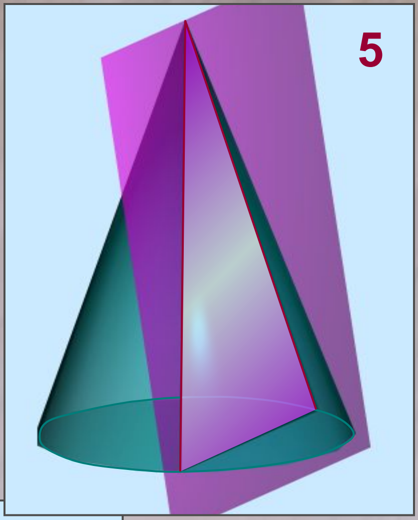
- Форма сечения поверхности вращения плоскостью зависит от угла наклона секущей плоскости к оси вращения поверхности

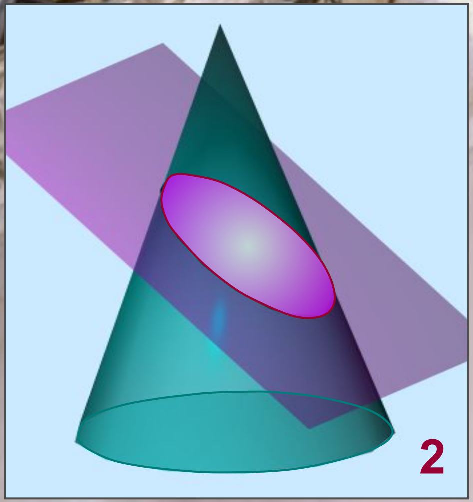
Вся совокупность линий, может быть получена при пересечении конуса плоскостью. Поэтому их называют коническими сечениями, или кониками.

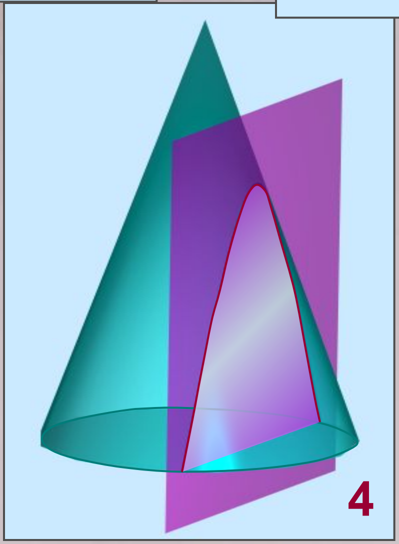


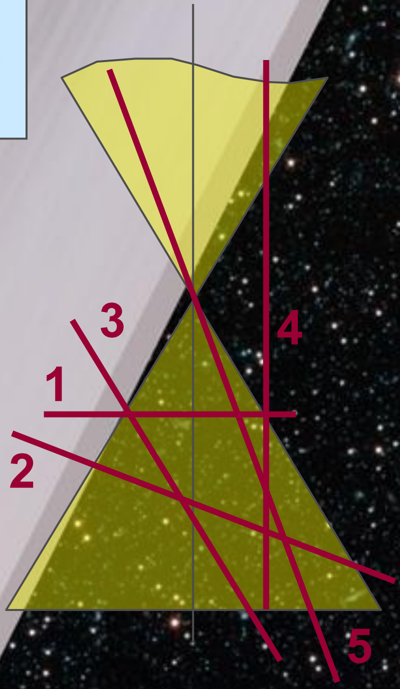
Сечения прямого кругового конуса





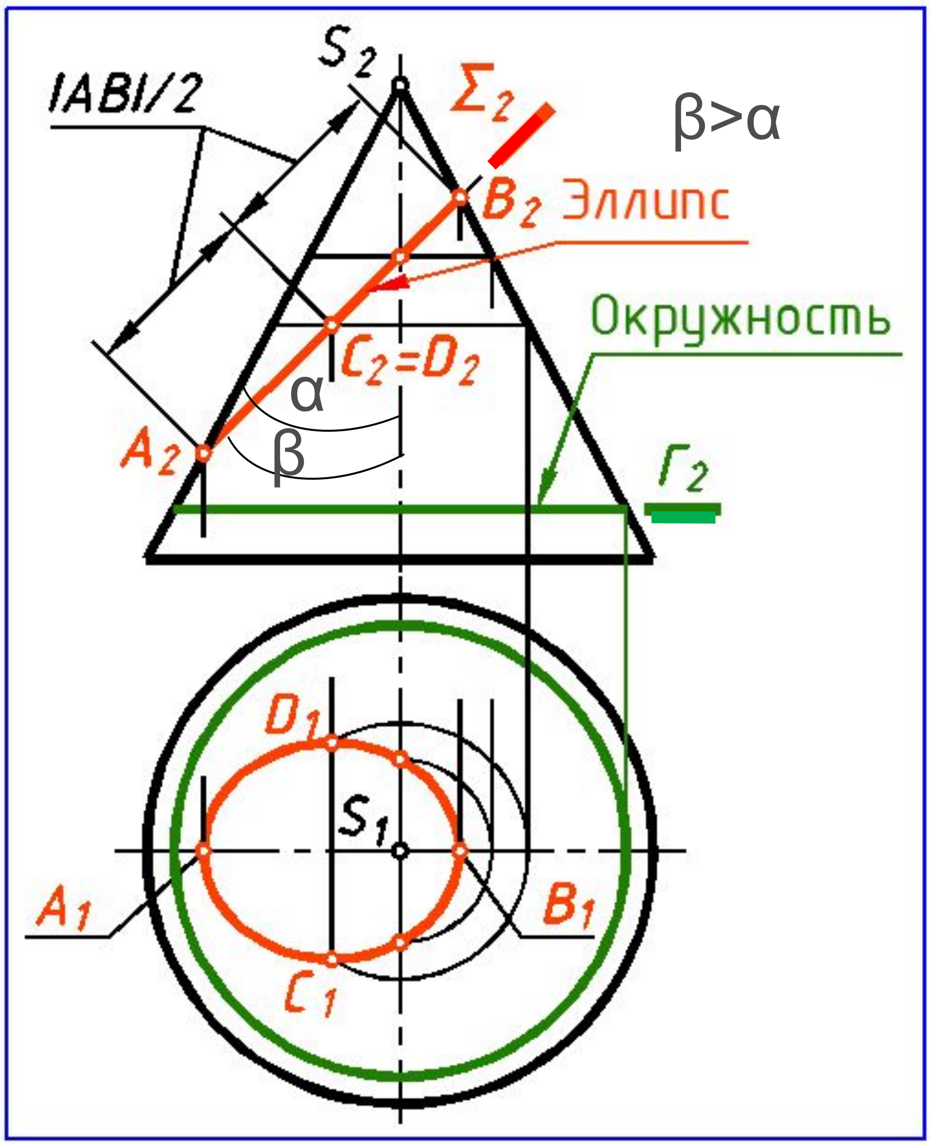






При пересечении прямого кругового конуса с плоскостью в зависимости от ее расположения получаются:
1 – окружность; 2 – эллипс; 3 – парабола; 4 – гипербола; 5 – прямые линии

Конические сечения

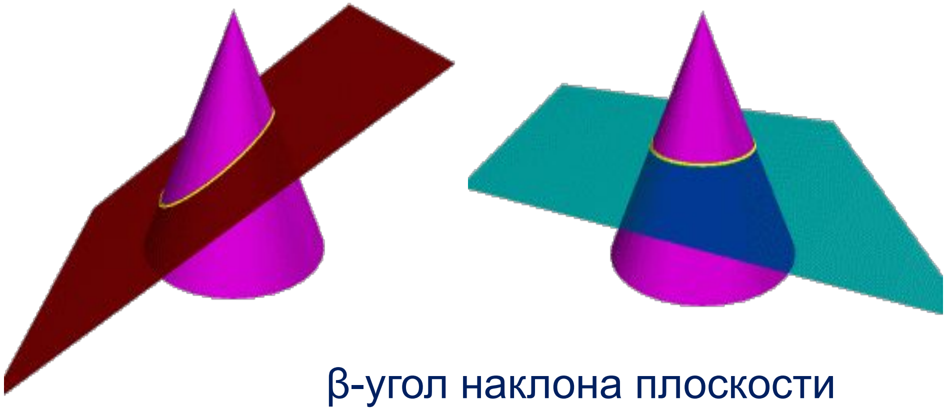


•Плоскость Σ пересекает все образующие конуса.

Линия сечения - эллипс

Эллипс получается в том случае, когда угол между секущей плоскостью и осью вращения (β) больше, чем угол между осью вращения и образующей конуса (α)

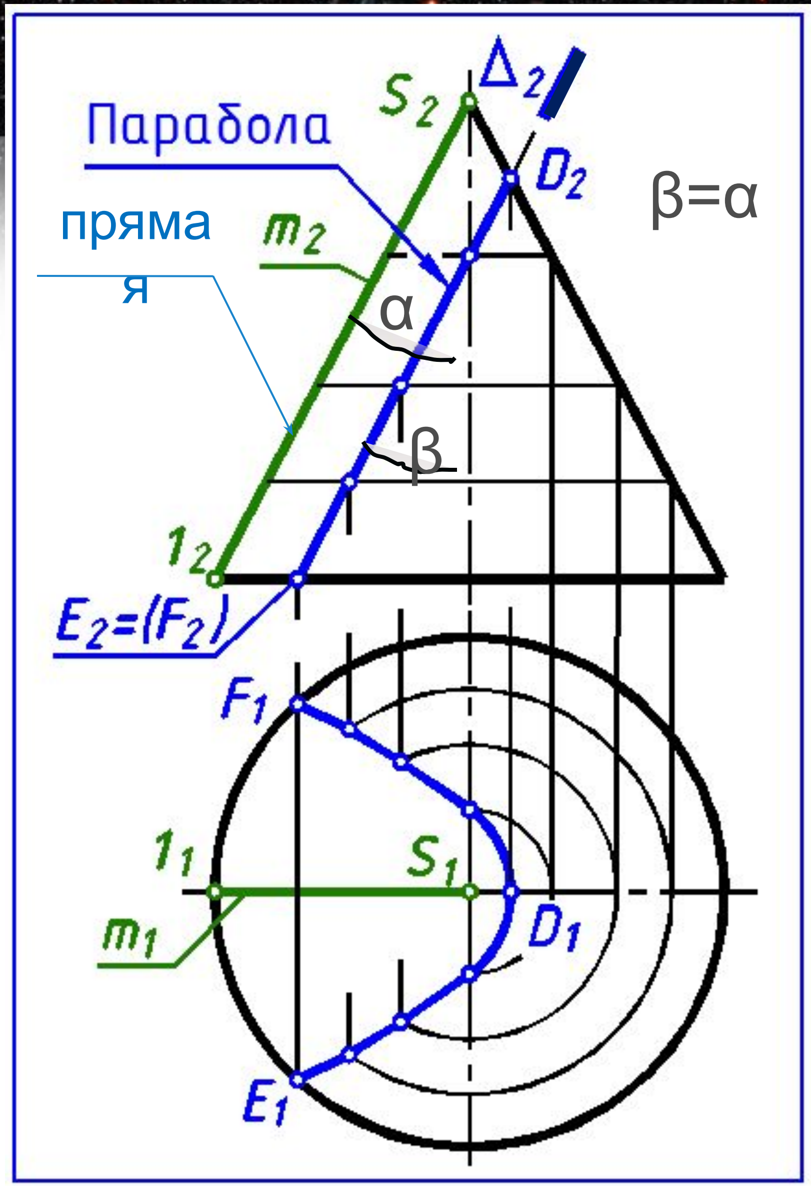
• Плоскость Г перпендикулярна оси конуса. Линия сечения - окружность.

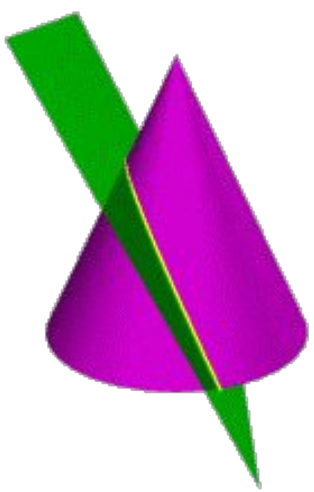


β-угол наклона плоскости

α-угол наклона образующей

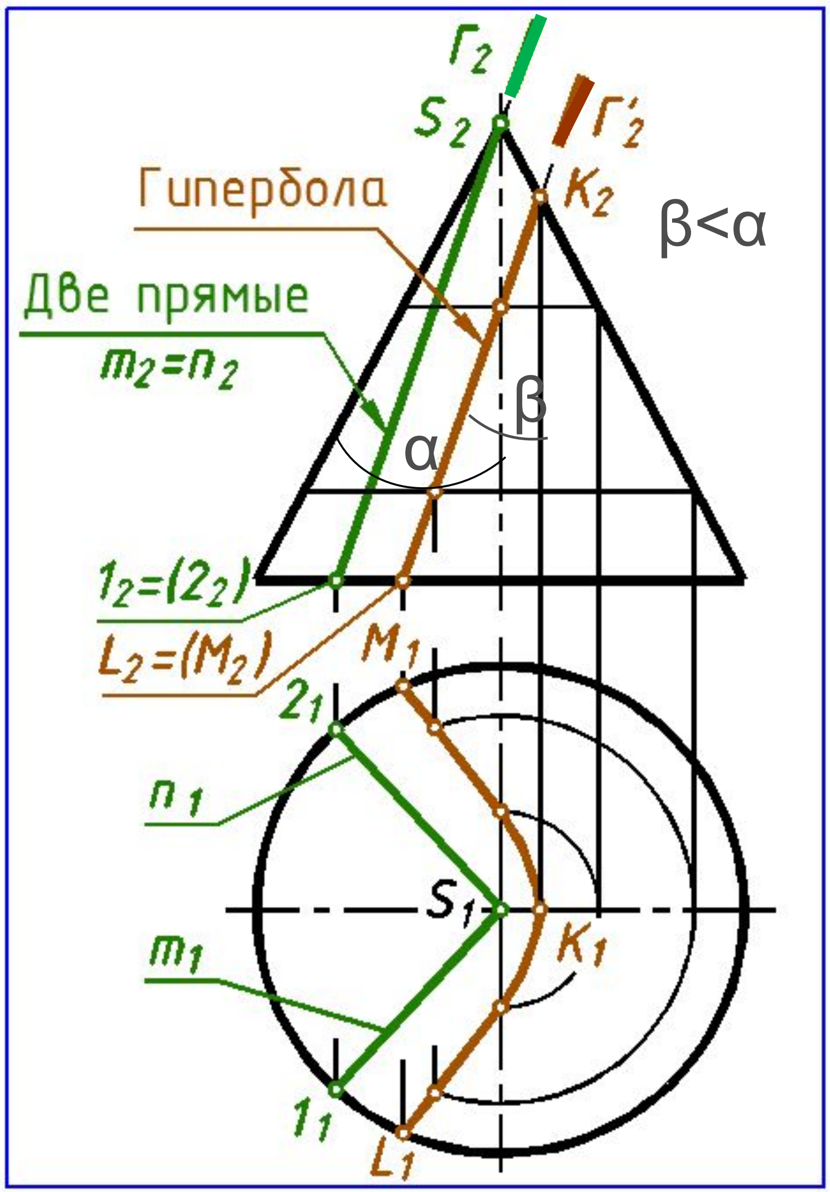
Конические сечения





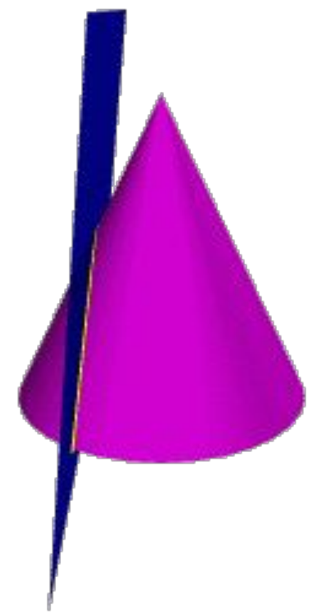
- Плоскость Δ параллельна одной образующей конуса $m(S_1)$. Если углы α и β равны Линия сечения - парабола.
- Касается поверхности- прямая.

Конические сечения

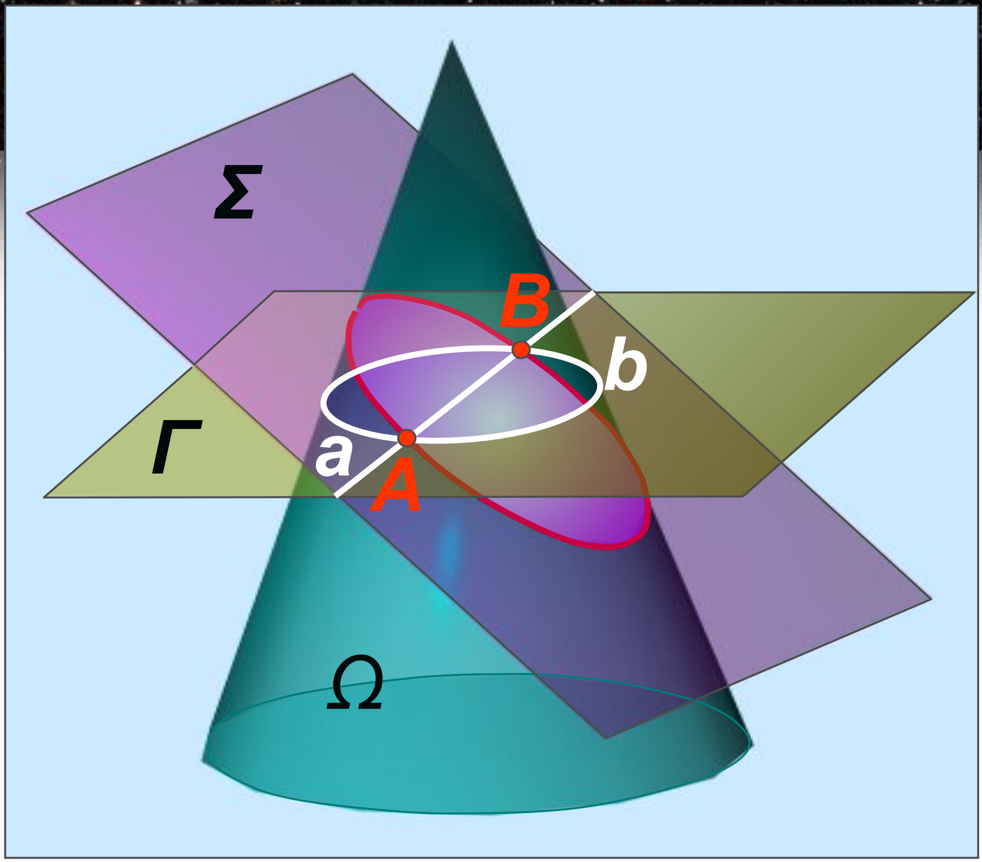


β<α

- Плоскость Г проходит через вершину конуса S. Линия сечения - две пересекающиеся прямые m(S1) и n(S2)
- Плоскость Г' параллельна двум образующим m и n. Угол β будет меньше угла α, Линия сечения - гипербола.



Алгоритм решения задачи



1. Объекты (Ω и Σ) рассекают вспомогательной секущей плоскостью Г

2. Находят линию пересечения вспомогательной плоскости с каждым из объектов

$$Г \cap \Sigma \rightarrow a\ ; \quad Г \cap \Omega \rightarrow b$$

3. На полученных линиях пересечения определяют общие точки, принадлежащие заданным поверхностям

$$a \cap b \rightarrow A, B$$

4. Выбирают следующую секущую плоскость и повторяют алгоритм

5. Полученные точки соединяют с учетом видимости искомой линии пересечения

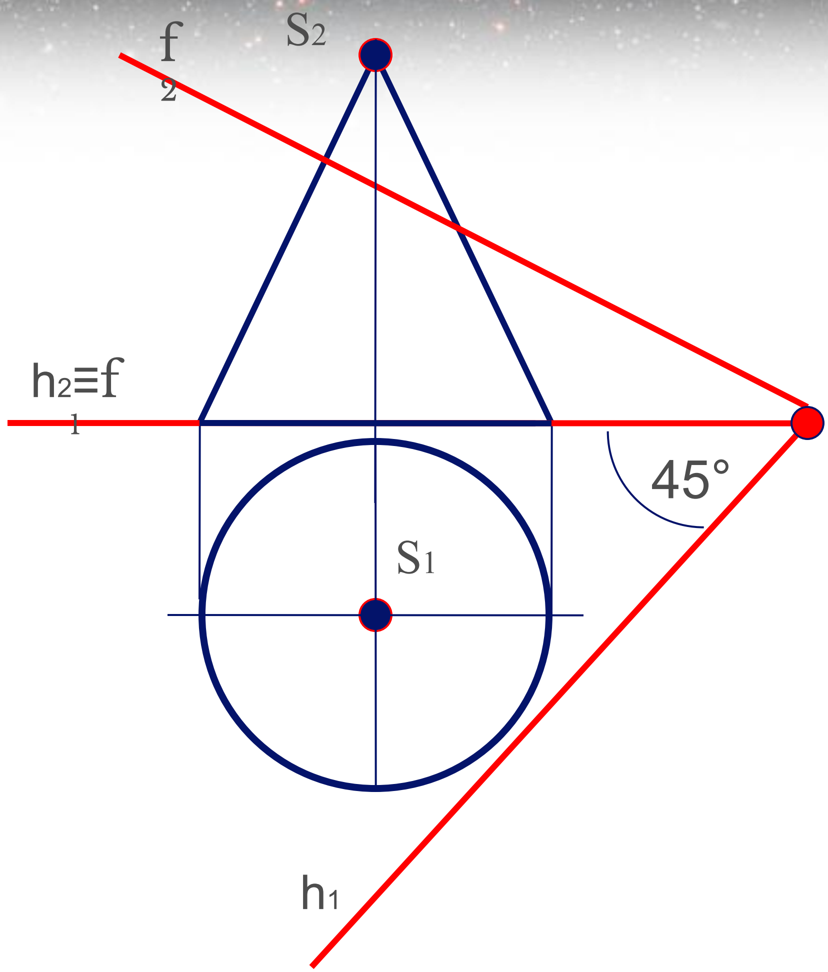
- Для построения линии пересечения необходимо найти общие точки поверхности и заданной плоскости. Для определения этих точек необходимо ввести дополнительные секущие плоскости, которые дают наиболее простые линии сечения – окружности или ломаные прямые.

Построение линии сечения начинают с нахождения **характерных точек сечения**, к которым относятся:

1) высшая и низшая точки;
2) крайняя левая и крайняя правая точки, в которых проекции линии сечения касаются очерковых образующих (точки, лежащие на границе видимости);
3) ближайшая и наиболее удаленная точки сечения.

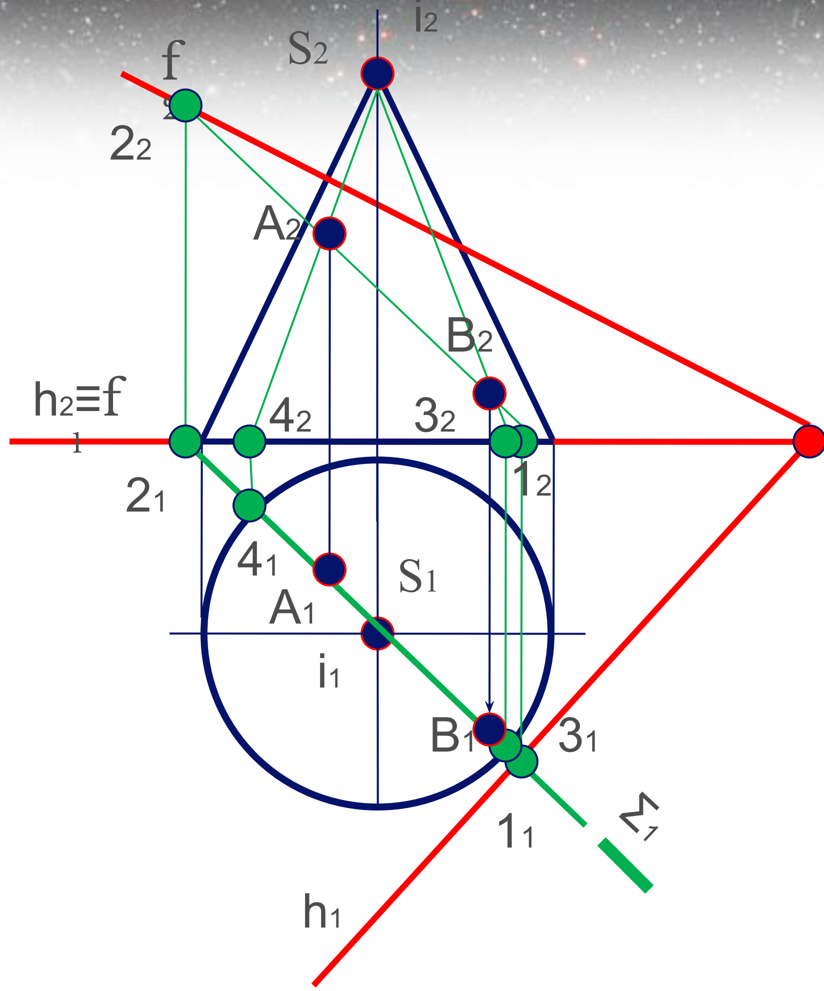
ПРИМЕР: Определить линию пересечения конуса плоскостью общего положения Θ ($h \cap f$).

Построить развертку нижней отсеченной поверхности конуса.



Анализ формы линии пересечения

Заданная плоскость пересекает только боковую поверхность конуса, следовательно, линией сечения является эллипс.



Высшая и низшая точки сечения (A,B) определяют большую ось эллипса и лежат на линии наибольшего наклона плоскости

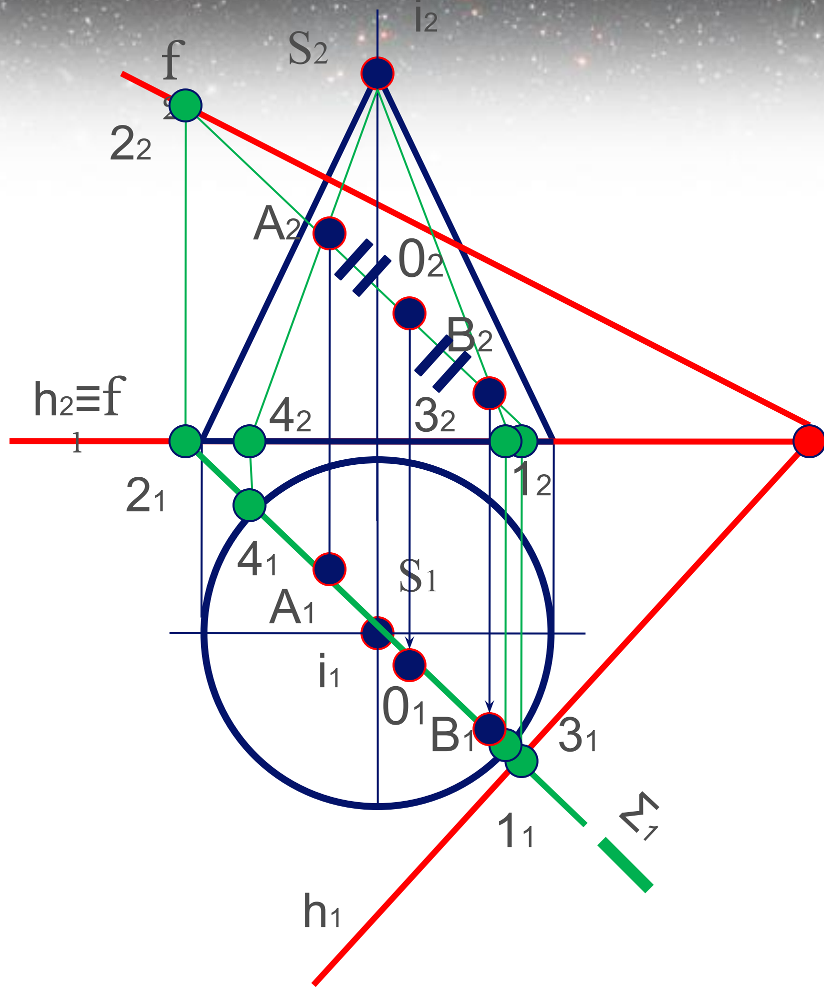
Θ (h∩f) к плоскости основания конуса. Эти точки определяются с помощью дополнительной плоскости Σ, которая одновременно пересекает поверхность и заданную плоскость. Эту плоскость необходимо выбирать таким образом, чтобы она пересекала поверхность вращения по параллелям (окружностям) или образующим.

$i \in \Sigma(\Sigma_1) \perp h \quad (\Sigma_1 \perp h_1)$

$\Theta \cap \Sigma = (1\text{-}2) \supset]AB] \; ((1\text{-}2) \cap \Phi_к = AB)$

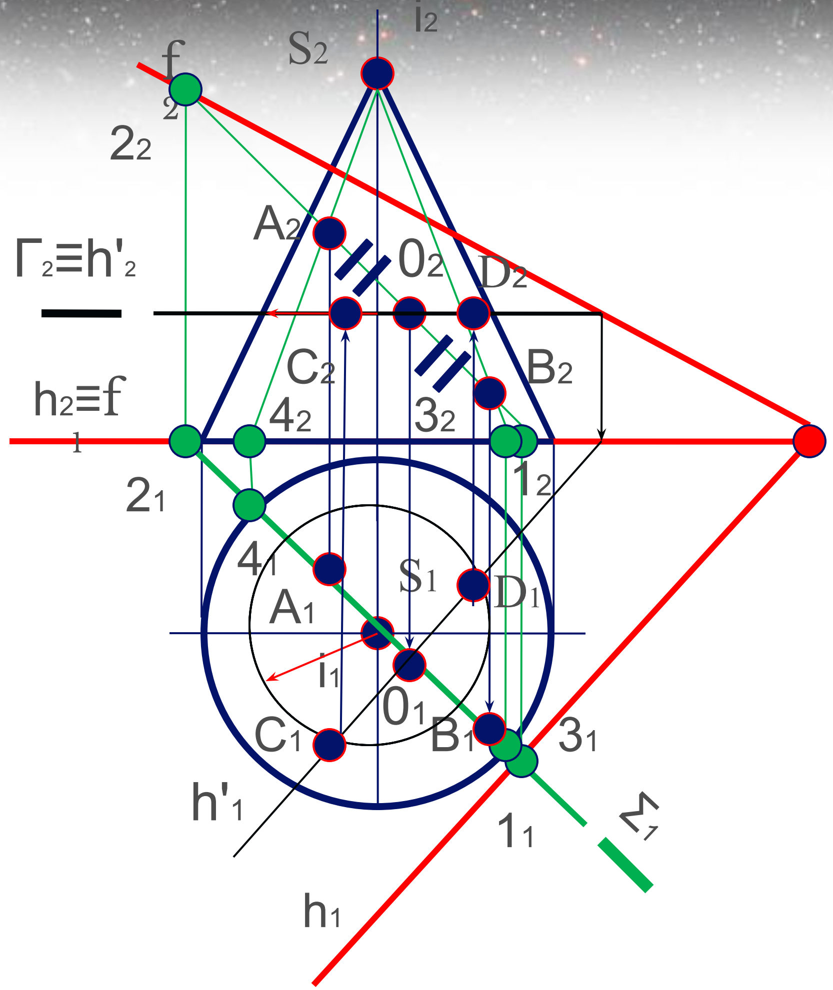
$\Sigma \cap \Phi_к = \Delta\, 3\text{-}S\text{-}4$ – сечение треугольник

AB – большая ось эллипса



[AB]делим отрезок пополам

0- центр эллипса [A0]=[0B]



- CD- малая ось эллипса, перпендикулярна к линии наибольшего наклона (большой оси), т е лежит на горизонтали плоскости $\Gamma(\Gamma_2)$

$CD \perp AB$

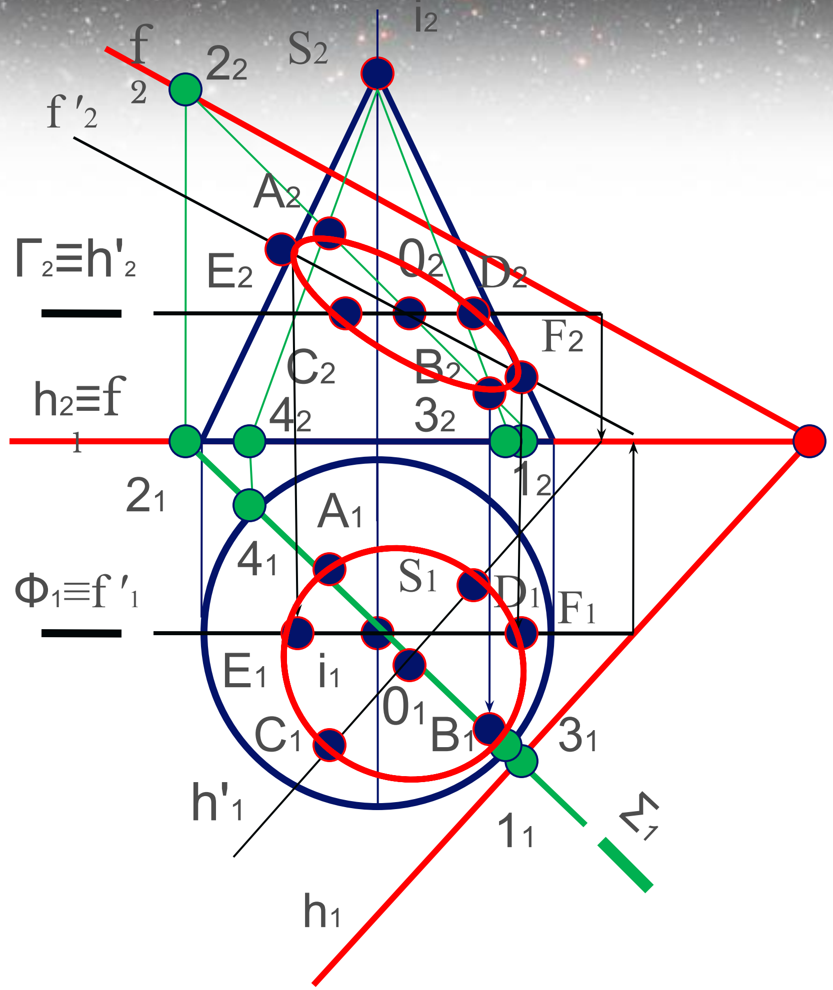
$AB \in$ ЛНН $\Rightarrow CD$ должен находиться на h

$CD \subset h'$

$O_2 \in \Gamma\ (\Gamma_2) \,||\, \Pi_1$ проводим через центр сечения O

$\Theta \in \Gamma(\Gamma_2) \,||\, \Pi_1$

$\Gamma \cap \Sigma = h' \supset [CD]\ (h' \cap \Phi_к = C,D)$

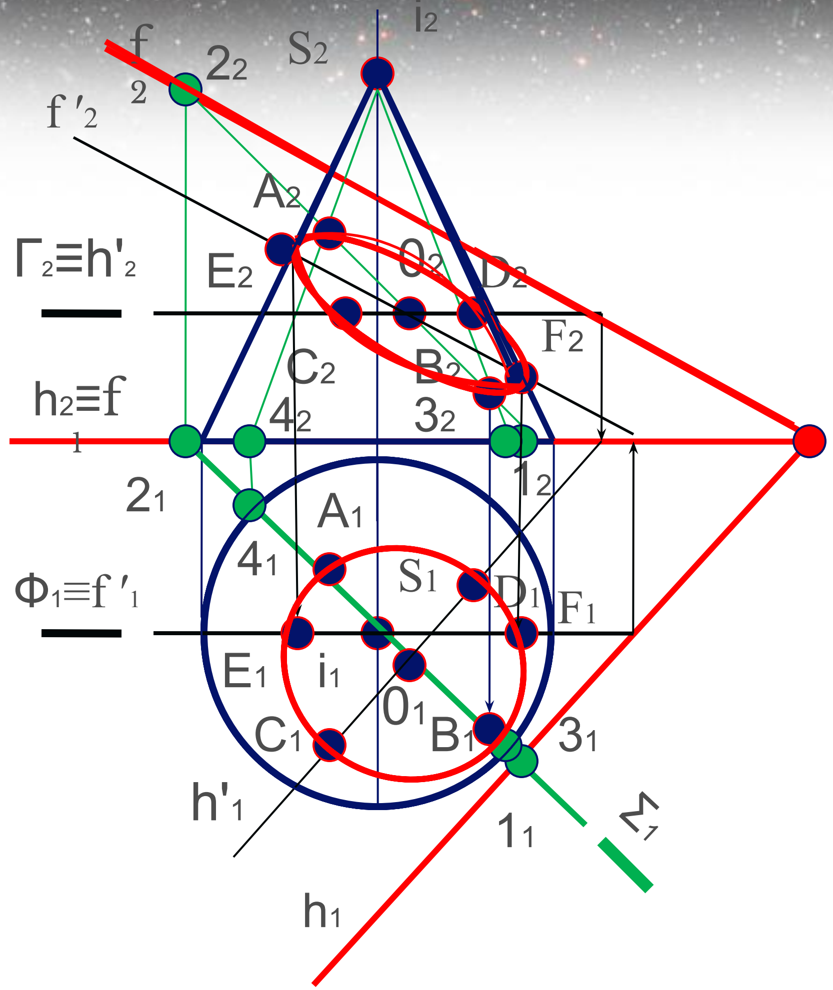


Точки границы видимости (E,F) сечения на Π_2 лежат в плоскости $\Phi(\Phi_1)$, делящей конус на видимую и невидимую части по отношению к фронтальной плоскости проекций.

$i \subset \Phi(\Phi_1) \,||\, \Pi_2 \quad (\Phi_1 \,||\, Ox)$

$\Phi \cap \Sigma = f' \supset [EF] \; (f' \cap \Phi_к = E,F$

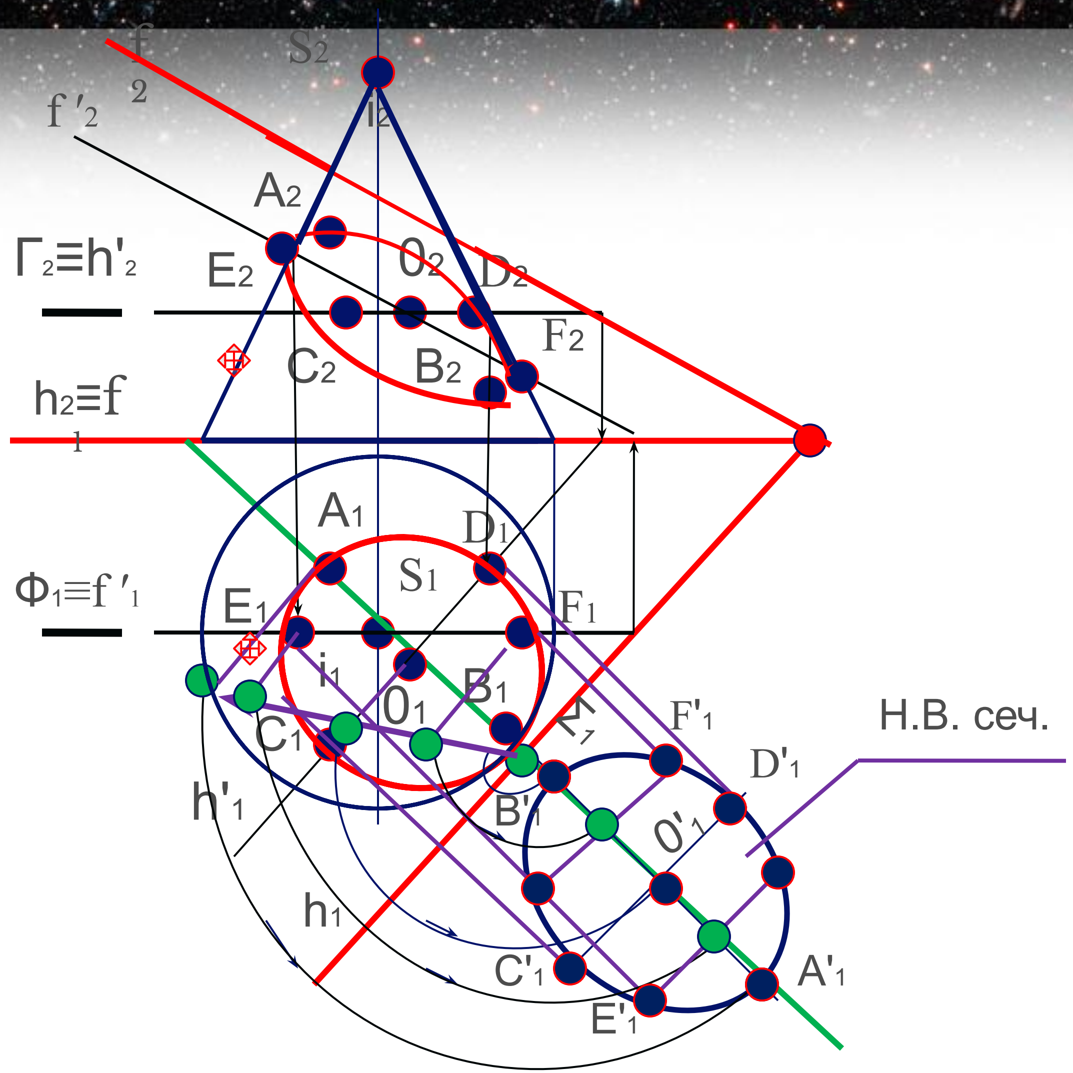
Видимость



Определяем видимость:

- Для улучшения наглядности изображения необходимо показать видимость:

1) сечения относительно поверхности многогранника и выделить его цветным карандашом;
2) поверхности относительно заданной плоскости;
3) Геометрических элементов, которыми задана плоскость, относительно поверхности многогранника.



Натуральная величина сечения определяется вращением вокруг линии уровня.

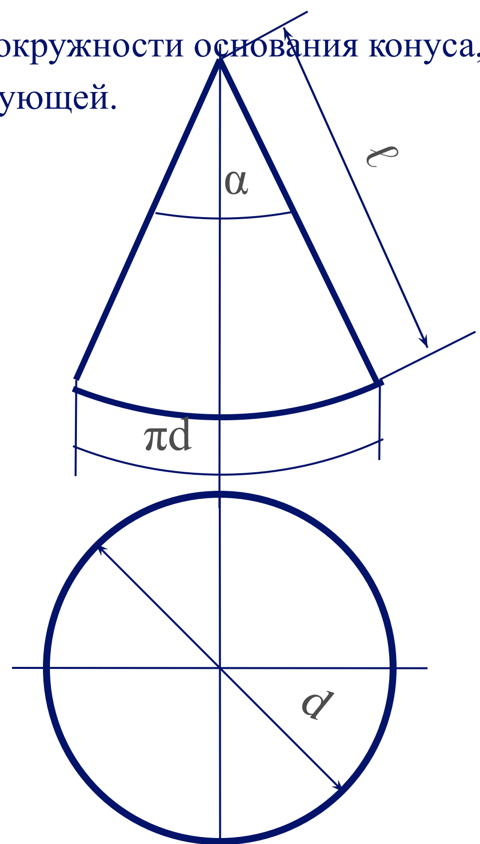
Развертка

Полная развертка боковой поверхности конуса представляет собой угол кругового сектора. Ее можно построить двумя способами:

1. Нахождение угла кругового сектора

$\pi d = \ell\alpha$, $\alpha = \dfrac{\pi d}{\ell}$ $\alpha = \dfrac{180^{\circ} \times d}{\ell}$

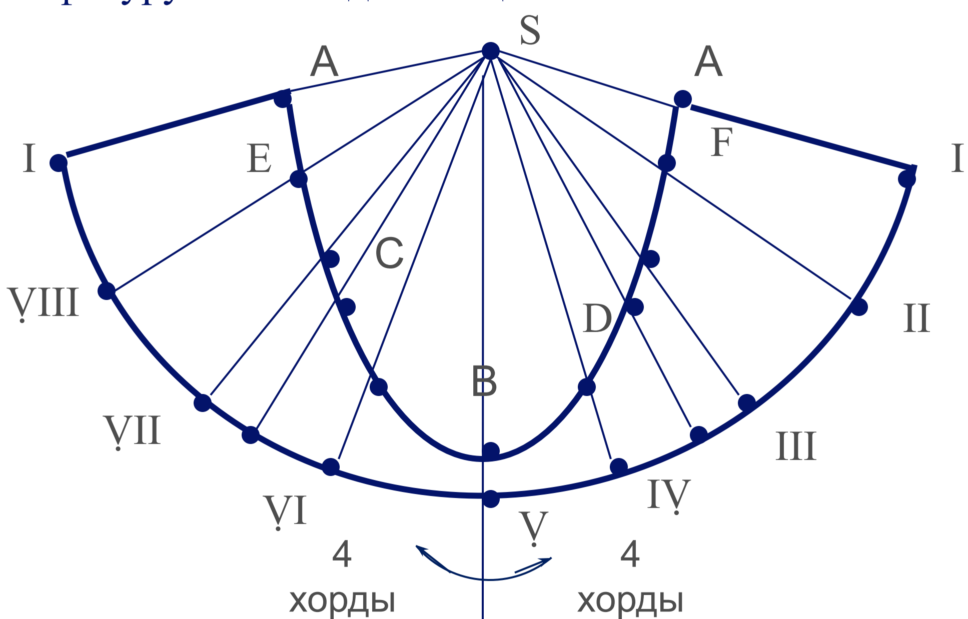
Где d-диаметр окружности основания конуса,
ℓ - длина образующей.

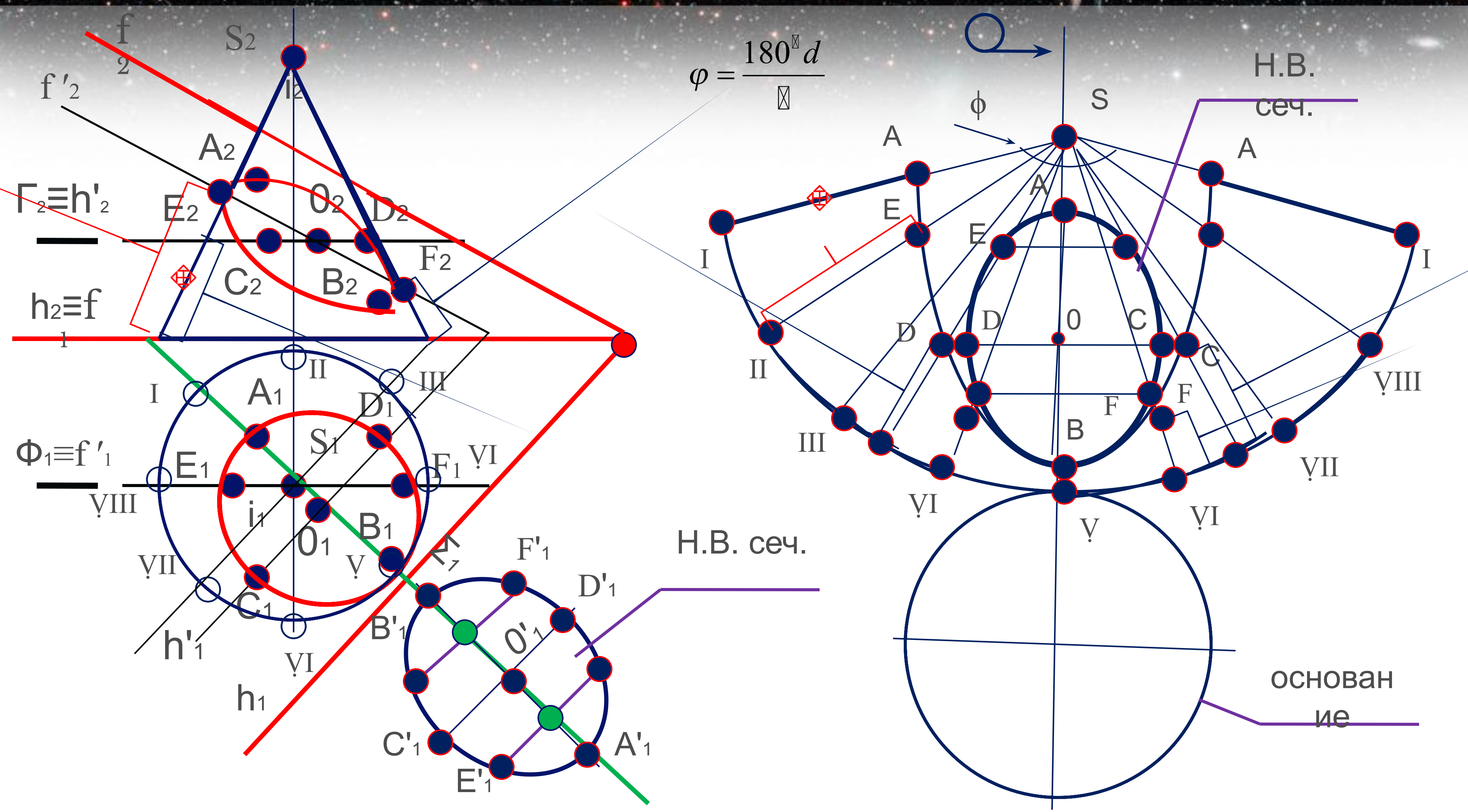


2.Способ малых хорд.

Графическое построение величины πd осуществляется способом малых хорд, при котором окружность основания конуса делится на 8 или 12 равных частей и полученная длина дуги приравнивается ее хорде.

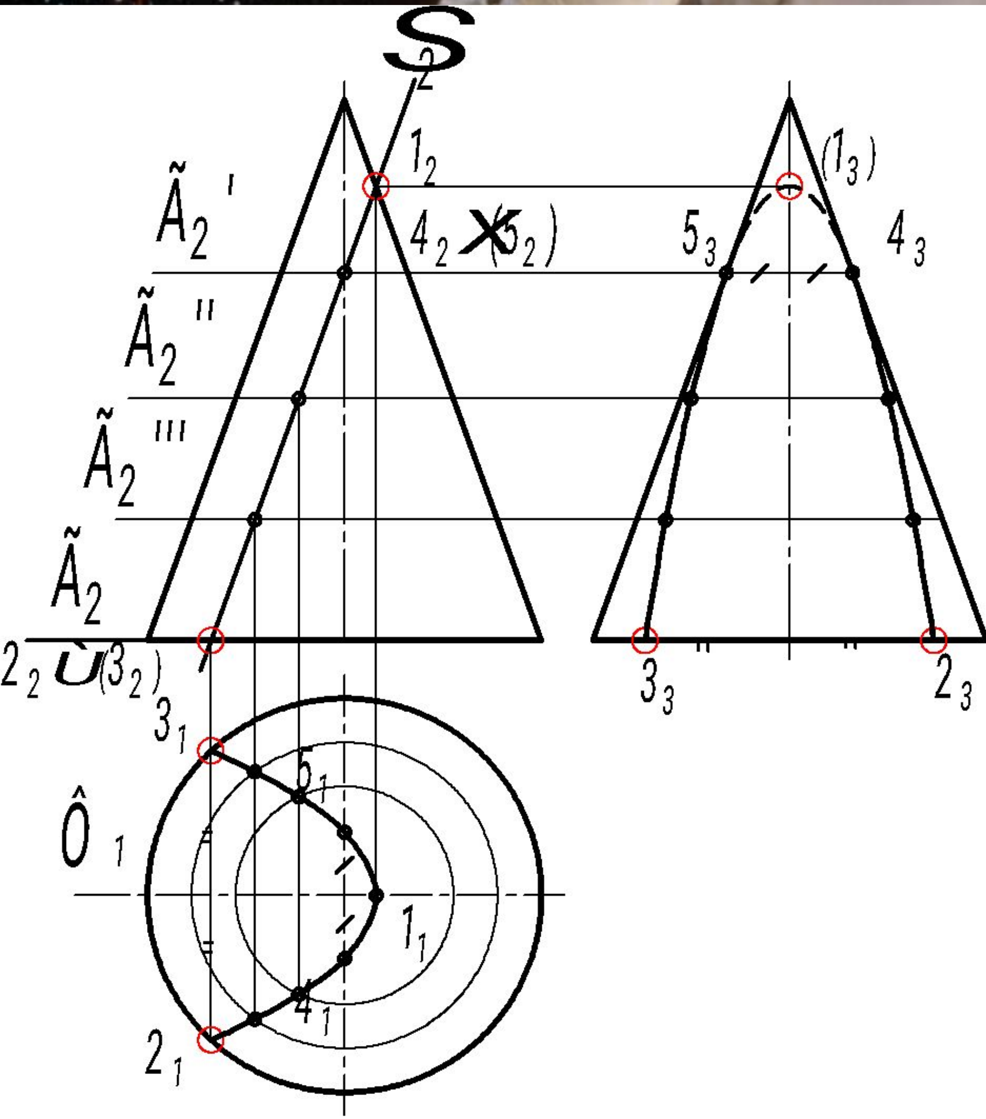
Разрывать отсеченную боковую поверхность следует по наиболее короткой или длинной образующей так, чтобы развертка представляла собой симметричную фигуру и была единым целым.





S2
f'2
A2
Г2≡h'2
E2
02
D2
F2
C2
B2
h2≡f1
I
II
III
A1
D1
S1
Ф1≡f'1
E1
F1
VI
VIII
i1
B1
01
VII
V
C1
h'1
VI
h1
F'1
D'1
B'1
0'1
C'1
E'1
A'1
Н.В. сеч.
φ = 180°d
S
Н.В. сеч.
A
E
D
C
F
B
0
I
II
III
VI
V
VII
VIII
основание

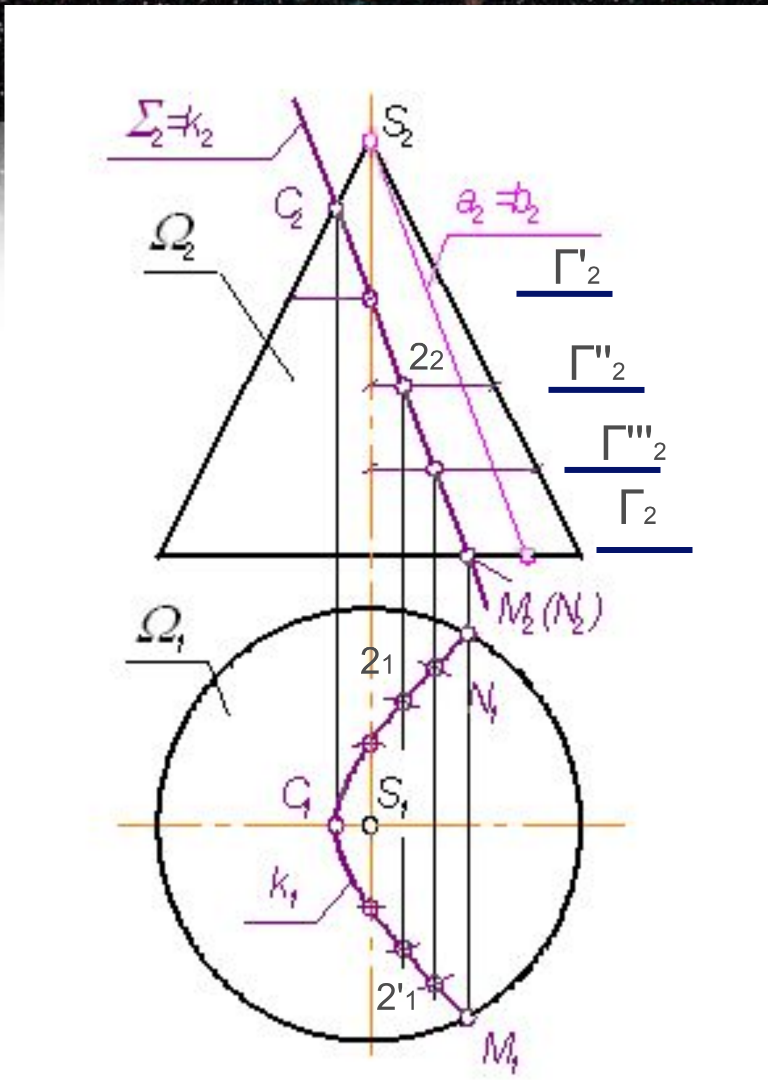
Плоскость $\sum(\sum_2)$, параллельная одной образующей конуса, пересекает его по параболе.



Здесь опорными служат точки:

- 1($1_2 \to 1_1 \to 1_3$)- вершина гиперболы;
- 4-5 ($4_2 \to 4_1 \to 4_3$;$5_2 \to 5_1 \to 5_3$) – на профильном меридиане;
- 2-3($2_2 \to 2_1 \to 2_3$ $3_2 \to 3_1 \to 3_3$) – на основании

Случайные точки определяют с помощью параллелей или меридианов (образующих).



Гипербола получится в сечении, если плоскость∑(∑2) при пересечении с конусом параллельна одновременно двум образующим конуса (a-b)

Рассмотрим линию сечения, лежащую на поверхности конуса и его основания. Опорными служат точки:

- ❖ С($C_2 \rightarrow C_1$)- вершина параболы;
- ❖ 2($2_2 \rightarrow 2_1$) – на профильном меридиане;
- ❖ М ($M_2 \rightarrow M_1$) N($N_2 \rightarrow N_1$)– на основании
- ❖ Случайные точки определяют с помощью параллелей или меридианов (образующих).

Помни!

Ты всегда способен на большее!