

20.01.21.

Тема:

Комплексные числа и координатная плоскость. Решение примеров на построение комплексных чисел на комплексной плоскости.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

[https://youtu.be/vyZsL\\_khIKY](https://youtu.be/vyZsL_khIKY)

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

### § 33. Комплексные числа и координатная плоскость

Геометрической моделью множества  $\mathbb{R}$  действительных чисел является числовая прямая. Любому действительному числу соответствует единственная точка на числовой прямой, и наоборот, каждой точке на прямой соответствует единственное действительное число (см. § 4). При переходе к геометрической модели множества  $\mathbb{C}$  комплексных чисел требуется, как минимум, еще одно измерение: ведь все точки прямой уже «заняты» действительными числами. Оказывается, геометрической моделью множества  $\mathbb{C}$  является *координатная плоскость*. Каждому комплексному числу  $z = a + bi$  можно естественным образом поставить в соответствие точку  $(a; b)$  координатной плоскости. Тогда любому комплексному числу соответствует единственная точка на координатной плоскости, и наоборот, каждая точка плоскости является «изображением» единственного комплексного числа. На рисунке 150 отмечены на координатной плоскости комплексные числа:

$$z_1 = 2 + 3i, z_2 = -4 + i, z_3 = -4 - i, z_4 = 5 - 2,5i.$$

При таком соответствии действительному числу  $a = a + 0 \cdot i$  соответствует точка  $(a; 0)$  с нулевой ординатой. Значит, действительные числа изображаются точками оси абсцисс.

Мнимой единице  $i = 0 + 1 \cdot i$  соответствует точка  $(0; 1)$  на оси ординат, и вообще точками этой оси будут изображаться все чисто

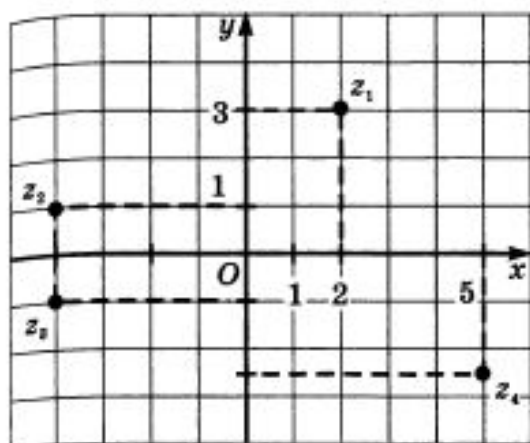


Рис. 150

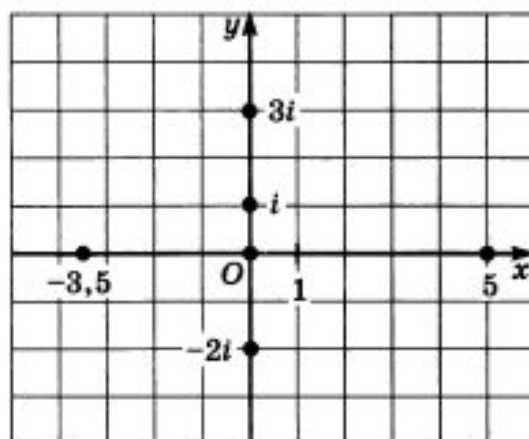


Рис. 151

мнимые числа. На рисунке 151 отмечены на координатной плоскости некоторые действительные и чисто мнимые числа:  $0$ ,  $5$ ,  $-3,5$ ,  $i$ ,  $3i$ ,  $-2i$ .

Соответствие между множеством  $\mathbf{R}$  действительных чисел и числовой прямой настолько привычно для нас, что мы зачастую не делаем никакой разницы между числом и точкой на прямой, изображающей это число. Например, все однозначно воспринимают утверждение: « $\sqrt{2}$  лежит левее  $2$ », хотя, формально, полагалось бы говорить, что «точка, соответствующая числу  $\sqrt{2}$ , расположена на числовой прямой левее точки, соответствующей числу  $2$ ».

В случае с комплексными числами столь же естественно выглядит их, как говорят математики, отождествление с точками координатной плоскости. Например, фраза: «Число  $z_1$  лежит в первой координатной четверти» — просто означает, что и действительная и мнимая части комплексного числа  $z_1 = a + bi$  положительны (рис. 152). Слова: « $z_2$  лежит на оси ординат» — являются переводом на геометрический язык того факта, что число  $z_2$  чисто мнимое (рис. 152), а «...комплексное число  $z_3$  расположено выше биссектрисы I и III координатных четвертей...» — показывают, что мы имеем дело с комплексным числом  $z_3 = a + bi$ , у которого мнимая часть больше действительной части (рис. 152).

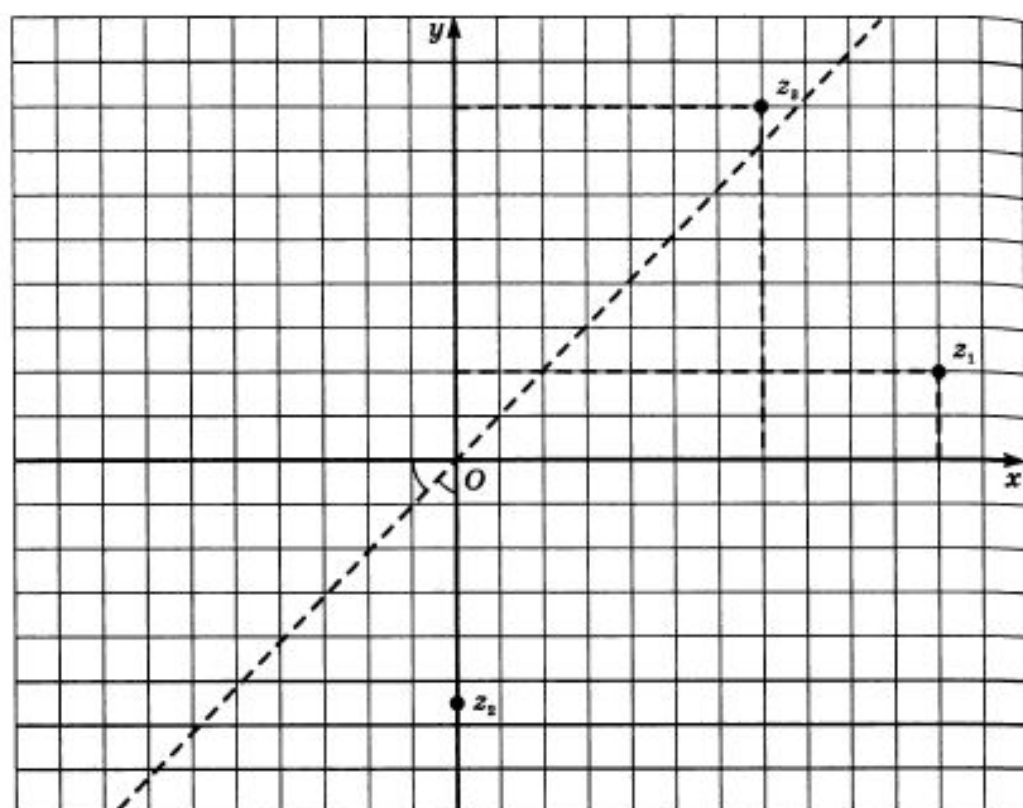


Рис. 152

Любую точку на координатной плоскости можно воспринимать двояко: алгебраически, как упорядоченную пару  $(a; b)$  действительных чисел, и как вектор с началом в точке  $(0; 0)$  и концом в точке  $(a; b)$ . При векторном подходе к изображению комплексных чисел наглядный смысл получают операции сложения и вычитания двух комплексных чисел: а) вектор, соответствующий сумме  $z_1 + z_2$  двух комплексных чисел, равен сумме векторов, соответствующих числам  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 157, а); б) вектор, соответствующий разности  $z_1 - z_2$  двух комплексных чисел, равен разности векторов, соответствующих числам  $z_1$  и  $z_2$  (рис. 157, б).

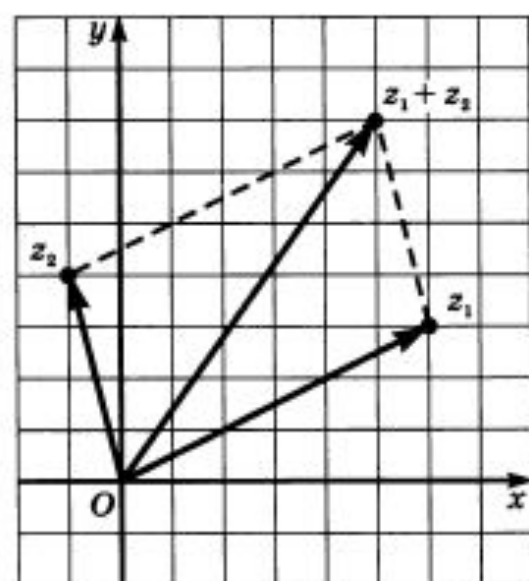


Рис. 157, а

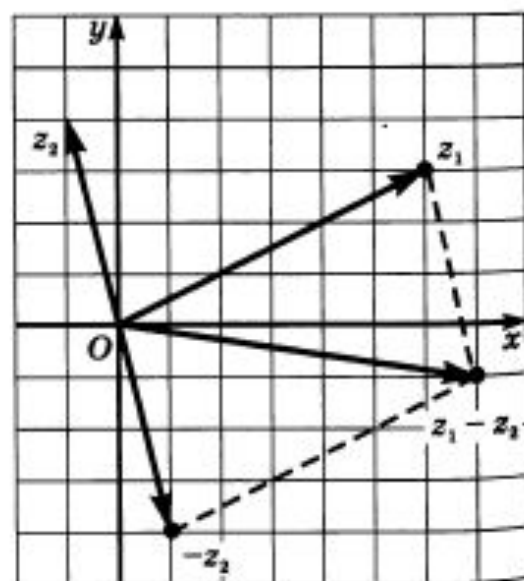


Рис. 157, б

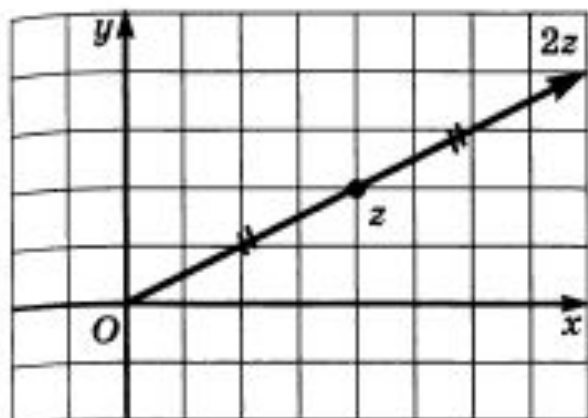


Рис. 158, а

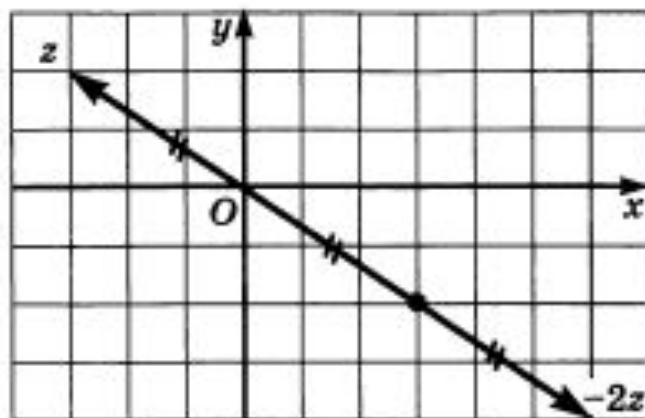


Рис. 158, б

Точно так же дело обстоит и с умножением комплексных чисел на действительные числа: *вектор, соответствующий произведению  $k \cdot z$  действительного числа  $k$  на комплексное число  $z$ , равен произведению вектора, соответствующего числу  $z$ , на число  $k$*  (рис. 158, а, б).

**Пример** . Для комплексных чисел  $z_1 = 1 + i$  и  $z_2 = -1 + 2i$  изобразить на координатной плоскости числа: а)  $2z_1$ ; б)  $-3z_2$ ; в)  $z_1 + z_2$ ; г)  $2z_1 - z_2$ .

**Решение.** Соответствующие построения выполнены на рисунках 159, а, б, в, г.

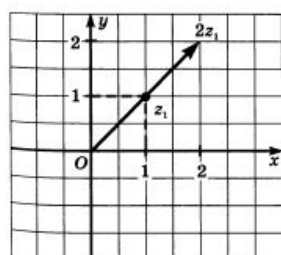


Рис. 159, а

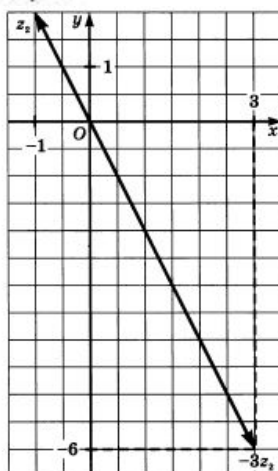


Рис. 159, б

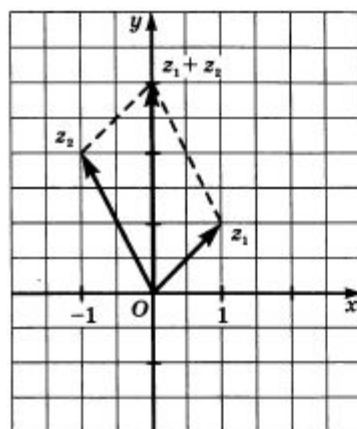


Рис. 159, в

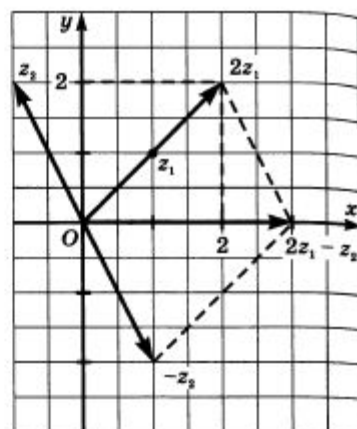


Рис. 159, г

## Практическая часть.

- 33.1. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам  $z_1 = 1 + 2i$ ,  $z_2 = 2 + 3i$ ,  $z_3 = -2 + 5i$ ,  $z_4 = -9 + i$ ,  $z_5 = -3 - 2i$ .
- 33.2. а) Отметьте на координатной плоскости точки, соответствующие комплексным числам  $z_1 = -5 - 4i$ ,  $z_2 = 1 + 8i$ ,  $z_3 = -2 - 4i$ ,  $z_4 = 8 + i$ ,  $z_5 = -1 - 8i$ .  
б) Соедините заданные точки последовательно отрезками. Сколько получилось точек пересечения с осями координат? Запишите комплексные числа, которым соответствуют эти точки.
- 33.13. Изобразите на координатной плоскости числа  $z_1 = 1 - i$  и  $z_2 = -1 + 3i$ , а также числа:  
а)  $3z_1$ ;      б)  $-2z_2$ ;      в)  $z_1 + z_2$ ;      г)  $3z_1 - 2z_2$ .