Расчетная работа № 1

Задача о баскетболисте

Содержательная постановка задачи

Разработать математическую модель, позволяющую описать полет баскетбольного мяча, брошенного игроком в баскетбольную корзину.

Модель должна позволять:

- вычислять положение мяча в любой момент времени;
- определять точность попадания мяча в корзину после броска при различных начальных параметрах.

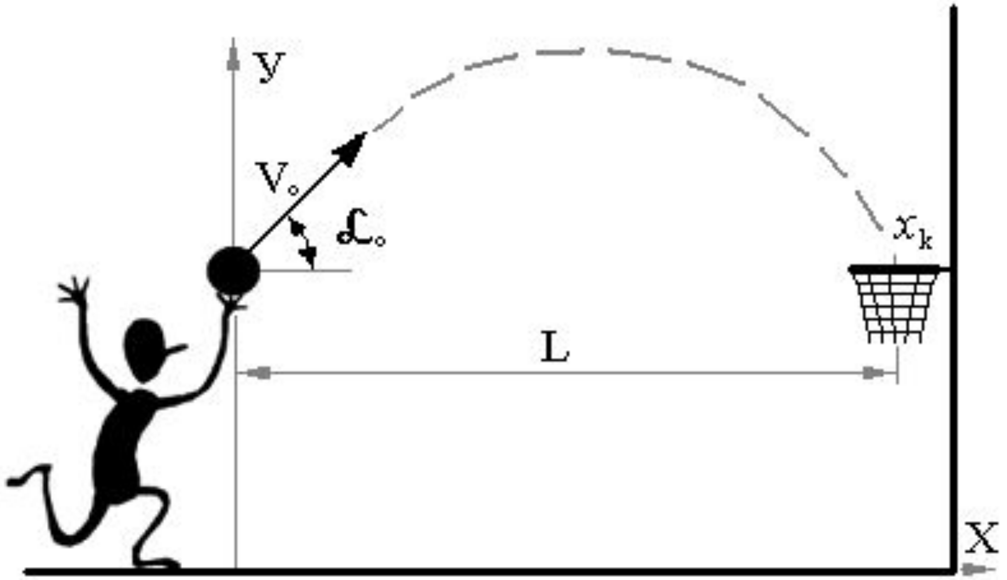
Исходные данные:

- масса и радиус мяча;
- начальные координаты, начальная скорость и угол броска мяча;
- координаты центра и радиус корзины.

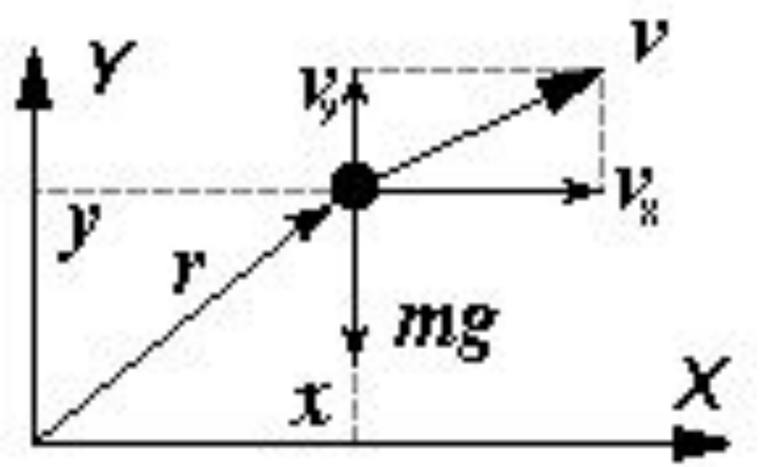
Концептуальная постановка задачи

Гипотезы:

1. объектом моделирования является баскетбольный мяч радиуса R;
2. мяч будем считать материальной точкой массой m, положение которой совпадает с центром масс мяча;
3. движение происходит в поле сил тяжести с постоянным ускорением свободного падения ***g*** и описывается уравнениями классической механики Ньютона;
4. движение мяча происходит в одной плоскости, перпендикулярной поверхности Земли и проходящей через точку броска и центр корзины;
5. пренебрегаем сопротивлением воздуха и возмущениями, вызванными собственным вращением мяча.



Математическая постановка:



$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{тяж} = m\mathbf{g},$$

$$r(0) = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v_0}.$$

В проекциях на оси координат:

$$ma_x = 0, \qquad ma_y = -mg,$$

$$x(0) = x_o, \qquad y(0) = y_o,$$

$$v_x(0) = v_o \cos\alpha_o, \qquad v_y(0) = v_o \sin\alpha_o$$

Точность броска: $\Delta = x(t_k) - x_k$, где $t_k > 0$, $v_y(t_k) < 0$, $y(t_k) = y_k$.

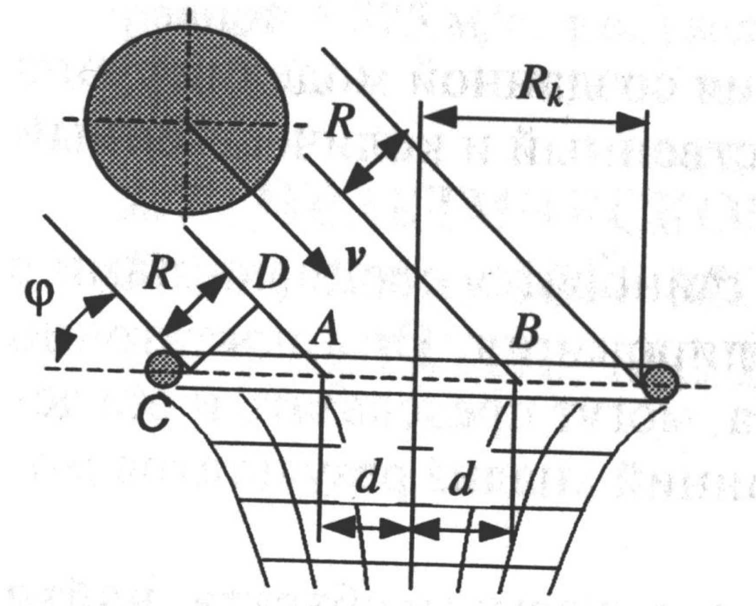


Рис. Схема к оценке точности броска

Момент попадания мяча в кольцо:

$$t_k\!: \;\; y(t_k) = y_k$$

Точность броска:

$$|L - x(t_k)| \le d$$

где

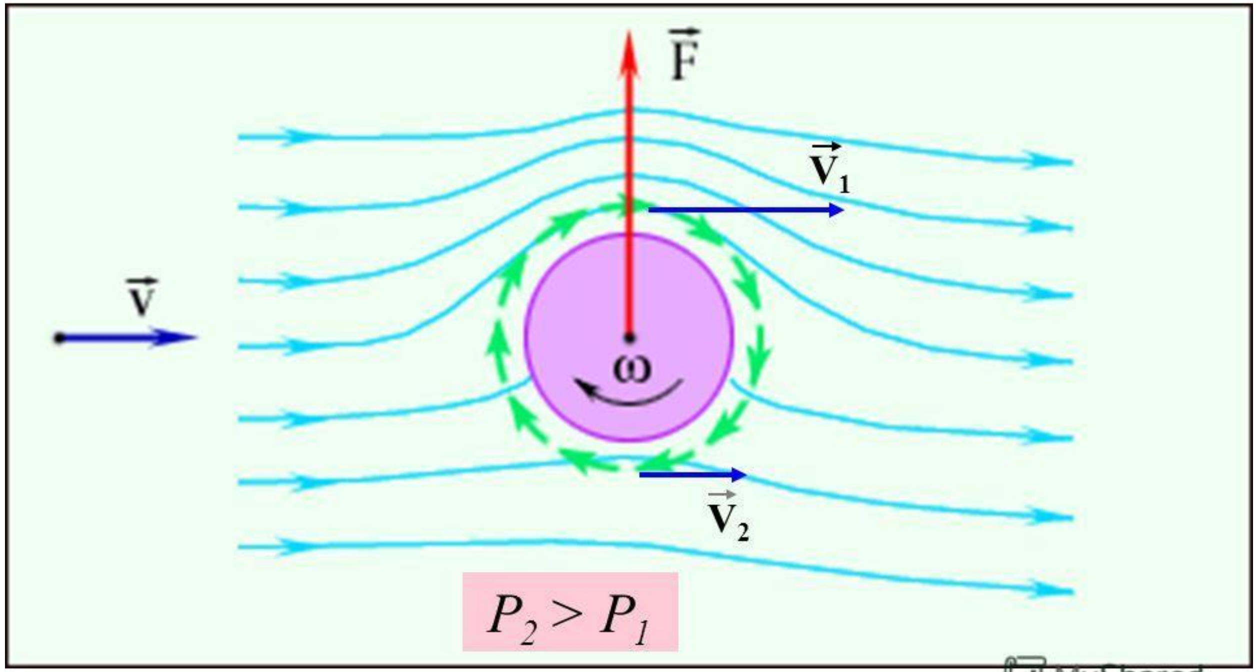
$$d = r_k - R_m/\sin\varphi$$

$$\varphi = arctg\,\frac{v_y(t_k)}{v_x(t_k)}$$

Эффект Магнуса

«Крученый мяч»

Возникновение поперечной силы, действующей на тело, вращающееся в набегающем на н
его потоке жидкости (газа); открыт нем. учёным Г. Г. Магнусом (H. G. Magnus) в 1852.



Если вращающийся шар обтекает безвихревой поток, то вследствие вязкости жидкости

скорость течения со стороны, где направления скорости потока и вращения цилиндра совпадают (рис.), увеличивается, а со стороны, где они противоположны, уменьшается. В результате давление на одной стороне возрастает, а на другой уменьшается, т. е. появляется поперечная сила $\boldsymbol{F} = V_M \, \rho_{\text{ср}} \, \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}$

V_M – объем мяча, $\rho_{\text{ср}}$ – плотность воздуха

v – скорость набегающего потока, $\boldsymbol{\omega}$ **–** угловая скорость вращения мяча

Численное решение задачи:

Требуется найти функцию y(t), удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t)), \quad 0 < t \leq T, \quad y(0) = y_0$$

где $f(t, y(t))$ – заданная непрерывная функцию двух аргументов.

Метод Эйлера

Пусть на отрезке [0, T] ищется решение задачи Коши, построим на этом отрезке сетку с постоянным шагом τ

$$\Omega_n = \left\{ t_k = a + k \cdot \tau; \quad \tau = \frac{T}{n}; \quad k = \overline{0, n} \right\}$$

Заменим производную функции в точке $t_k \in \Omega_n$ разностным аналогом:

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y_{k+1} - y_k}{\tau}$$

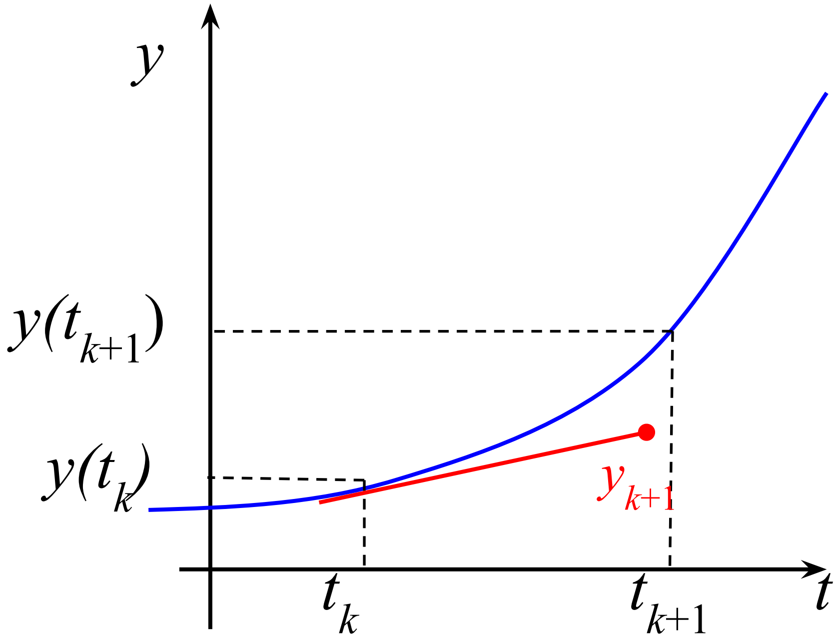
Тогда дифференциальное уравнение можно заменить разностным:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau} = f(t_k, y_k)$$

Окончательно вычислительная процедура примет вид

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + f(t_k, y_k) \cdot \tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad y_0 = y(0)}$$

Геометрическая интерпретация метода Эйлера



Математическая постановка задачи движения мяча с учетом эффекта Магнуса:

Уравнение движения в векторном виде:

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}_{\text{тяж}} + \mathbf{F}_{\text{сопр}} + \mathbf{F}_{\text{Маг}}$$

$$\mathbf{F}_{\text{сопр}} = -k\,\mathbf{v} \qquad \mathbf{F}_{\text{Маг}} = V\rho\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

Начальные условия:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_0, \qquad \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$$

Уравнения движения в проекциях на оси:

$$m\ddot{x} = -mg - k\dot{z} + V\rho\left(\omega_x\dot{y} - \omega_y\dot{x}\right) \equiv f_z(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

$$m\ddot{y} = -k\dot{y} + V\rho(\omega_z\dot{x} - \omega_x\dot{z}) \equiv f_y(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

$$m\ddot{z} = -mg - k\dot{z} + V\rho\left(\omega_x\dot{y} - \omega_y\dot{x}\right) \equiv f_z(\dot{x},\dot{y},\dot{z})$$

Начальные условия:

$$x(0) = x_0, \qquad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0,$$

$$\dot{x}(0) = v_{x0}, \qquad \dot{y}(0) = v_{y0}, \quad \dot{z}(0) = v_{z0}$$

Чтобы записать расчетную схему метода Эйлера, каждое дифференциальное уравнение второго порядка заменим двумя уравнениями первого порядка:

$$\dot{x} = v_x(t)$$

$$\dot{v}_x(t) = \frac{1}{m} f_x(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\dot{y} = v_y(t)$$

$$\dot{v}_y(t) = \frac{1}{m} f_y(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

$$\dot{z} = v_z(t)$$

$$\dot{v}_z(t) = \frac{1}{m} f_z(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$$

Тогда схема метода Эйлера:

$$v_{xk+1} = v_{xk} + \tau \frac{1}{m} f_x(v_{xk}, v_{yk}, v_{zk})$$

$$x_{k+1} = x_k + \tau v_{xk}$$

$$v_{yk+1} = v_{yk} + \tau \frac{1}{m} f_y(v_{xk}, v_{yk}, v_{zk})$$

$$y_{k+1} = y_k + \tau v_{yk}$$

$$v_{zk+1} = v_{zk} + \tau \frac{1}{m} f_z(v_{xk}, v_{yk}, v_{zk})$$

$$z_{k+1} = z_k + \tau v_{zk}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Задание по Расчетной работе № 1

1. С помощью пакета «Wolfram Mathematica» решить задачу движения мяча без учета сопротивления воздуха аналитически. Построить график решения.
2. Рассмотреть решения при различных значениях начальной скорости и угла бросания. Проверить для них условия попадания в корзину. Результаты оформить в виде таблицы (в тетради):

			Точность броска, $\Delta = x(t_k) - x_k$	Попадание /непопадание
1				
2…				

3. Повторить пп. 1, 2 для случая движения мяча с учетом сопротивления воздуха.
4. Решить задачу с учетом эффекта Магнуса:
   -- записать концептуальную и математическую постановки (в тетради);
   -- решить уравнения движения численно методом Эйлера;
   -- результаты изобразить графически.
5. Построить траектории движения мяча для векторов собственного вращения, направленного вверх, вправо, влево (относительно направления бросания мяча)