

3.3. Доказательство равносильности

Две функции считаются равносильными, если на любых одинаковых наборах значений аргументов они принимают одинаковые значения.

Пример. Даны логические функции:

$$f = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3})} \quad g = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

Требуется доказать их равносильность по таблице истинности.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	$\overline{x_1 \vee x_2}$	$x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3}$	\overline{f}	f	g
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1

Равносильности алгебры логики относительно базовых логических операций:

Ассоциативность:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) &= (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3 \\(x_1 \vee x_2) \vee x_3 &= x_1 \vee (x_2 \vee x_3)\end{aligned}$$

Коммутативность:

$$\begin{aligned}x_1 \cdot x_2 &= x_2 \cdot x_1 \\x_1 \vee x_2 &= x_2 \vee x_1\end{aligned}$$

*Дистрибутивность
конъюнкции
относительно
дизъюнкции:*

$$x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$$

*Дистрибутивность
дизъюнкции
относительно
конъюнкции :*

$$x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$$

Идемпоентность:

$$x \cdot x = x$$
$$x \vee x = x$$

Двойное отрицание:

$$\overline{\overline{x}} = x$$

Законы де Моргана:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$$
$$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Закон противоречия:

$$x \cdot \bar{x} = 0$$

Закон «исключенного третьего»:

$$x \vee \bar{x} = 1$$

Свойства констант:

$$\begin{aligned}x \cdot 1 &= x \\x \cdot 0 &= 0 \\x \vee 1 &= 1 \\x \vee 0 &= x \\0 &= 1 \\1 &= 0\end{aligned}$$

Все равносильности легко доказываются по таблицам истинности.

Примеры.

1 $x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1$

$$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 \vee x_2) = x_1 \cdot (x_2 \vee 1) = x_1 \cdot 1 = x_1$$

2 $x \vee y \vee z \vee 1 = 1$

$$x \vee y \vee z \vee 1 = x \vee y \vee 1 = x \vee 1 = 1$$

3

$$x \cdot y \cdot x = x \cdot y$$

$$x \cdot y \cdot x = x \cdot x \cdot y = x \cdot$$

y

$$4 \quad y \cdot (a \vee b) \cdot (x \vee y \vee z) = (a \vee b) \cdot y$$

$$y \cdot (a \vee b) \cdot (x \vee y \vee z) = (a \vee b) \cdot (y \cdot x \vee y \cdot y \vee y \cdot z) =$$

$$= (a \vee b) \cdot (x \cdot y \vee y \vee y \cdot z) = (a \vee b) \cdot y \cdot (x \vee 1 \vee$$

$$z) =$$

$$= (a \vee b) \cdot y \cdot 1 = (a \vee b) \cdot y$$

5

$$x \cdot (y \vee z) \cdot (\neg x \vee y \vee z) = x \cdot (y \vee z)$$

$$x \cdot (y \vee z) \cdot (\neg x \vee y \vee z) = (y \vee z) \cdot (x \cdot \neg x \vee x \cdot y \vee$$

$$x \cdot z) = (y \vee z) \cdot (0 \vee x \cdot y \vee x \cdot z) = (y \vee z) \cdot (x \cdot y \vee x \cdot z) =$$

$$= (y \vee z) \cdot x \cdot (y \vee z) = x \cdot (y \vee z)$$

6

$$(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \cdot x_3$$

$$\begin{aligned} & (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1 \cdot x_1 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_1 \vee x_2 \cdot x_3 \\ = & \\ & = x_1 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_1 \vee x_2 \cdot x_3 = x_1 \cdot (1 \vee x_3 \vee x_2) \vee x_2 \\ & \cdot x_3 = \end{aligned}$$

$$= x_1 \cdot 1 \vee x_2 \cdot x_3 = x_1 \vee x_2 \cdot x_3$$

7

$$x \vee \square x \cdot y = x \vee y$$

$$\begin{aligned} x \vee \square x \cdot y &= (x \vee \square x) \cdot (x \vee y) = 1 \cdot (x \vee y) = \\ & x \vee y \end{aligned}$$

Пример. Даны логические функции:

$$f = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3})} \quad g = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

Требуется доказать их равносильность с помощью эквивалентных преобразований.

$$\begin{aligned} f &= \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2 \vee x_3})} = \overline{(\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (x_1 \cdot x_1 \vee x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3)} = \\ &= \overline{(\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot (x_1 \vee x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3)} = \overline{(\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot x_1 \cdot (1 \vee x_2 \vee x_3)} = \\ &= \overline{(\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot x_1} = \overline{(\overline{x_1 \vee x_2}) \cdot x_1} = \overline{x_1 \cdot x_1 \vee x_2 \cdot x_1} = \overline{0 \vee x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1 \cdot x_2} = \\ &= \overline{x_1 \vee x_2} = \overline{x_1} \vee \overline{x_2} \end{aligned}$$