3.3. Доказательство равносил

Две функции считаются равносильными, если на любых одинаковых наборах значений аргументов они принимают одинаковые значения.

Пример.

Даны логические функции:

$$f = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)} \qquad g = x_1 \to x_2 = \overline{x}_1 \vee x_2$$

Требуется доказать их равносильность по таблице истинности.

x_1	x_2	x_3	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x_1} \vee \overline{x_2}$	$x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$	$\bar{f}$	f	g
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	0	1	1

Равносильности алгебры логики относительно базовых логических операций:

Ассоциативность:	$x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \cdot x_2) \cdot x_3$ $(x_1 \vee x_2) \vee x_3 = x_1 \vee (x_2 \vee x_3)$
Коммутативность:	$x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$ $x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1$
Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции:	$x_1 \cdot (x_2 \vee x_3) = x_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_3$

Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции :

$x_1 \vee (x_2 \cdot x_3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3)$

Идемпотентность:

$x \cdot x = x$

$x \vee x = x$

Двойное отрицание:

$\overline{\overline{x}} = x$

Законы де Моргана:

$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}$

$\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$

Закон противоречия:

$$x \cdot \overline{x} = 0$$

Закон «исключенного третьего»:

$$x \vee \overline{x} = 1$$

Свойства констант:

x ▪ 1 = x
x ▪ 0 = 0
x ∨ 1 = 1
x ∨ 0 = x
0 = 1
1 = 0

Все равносильности легко доказываются по таблицам истинности.

Примеры.

1

$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1$

$x_1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot x_2 = x_1 \cdot (1 \vee x_2) = x_1 \cdot (x_2 \vee 1) = x_1 \cdot 1 = x_1$

2

$x \vee y \vee z \vee 1 = 1$

$x \vee y \vee z \vee 1 = x \vee y \vee 1 = x \vee 1 = 1$

3 $\boxed{x \cdot y \cdot x = x \cdot y}$

$x \cdot y \cdot x = x \cdot x \cdot y = x \cdot y$

4 $\boxed{y \cdot (a \vee b) \cdot (x \vee y \vee z) = (a \vee b) \cdot y}$

$y \cdot (a \vee b) \cdot (x \vee y \vee z) = (a \vee b) \cdot (y \cdot x \vee y \cdot y \vee y \cdot z) =$

$=(a \vee b) \cdot (x \cdot y \vee y \vee y \cdot z) = (a \vee b) \cdot y \cdot (x \vee 1 \vee z) =$

$=(a \vee b) \cdot y \cdot 1 = (a \vee b) \cdot y$

5 $\boxed{x \cdot (y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee y \vee z) = x \cdot (y \vee z)}$

$x \cdot (y \vee z) \cdot (\overline{x} \vee y \vee z) = (y \vee z) \cdot (x \cdot \overline{x} \vee x \cdot y \vee x \cdot z) =$

$= (y \vee z) \cdot (0 \vee x \cdot y \vee x \cdot z) = (y \vee z) \cdot (x \cdot y \vee x \cdot z) =$

$=(y \vee z) \cdot x \cdot (y \vee z) = x \cdot (y \vee z)$

6

$$(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1 \vee x_2 \cdot x_3$$

$(x_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_3) = x_1 \cdot x_1 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_1 \vee x_2 \cdot x_3 =$

$= x_1 \vee x_1 \cdot x_3 \vee x_2 \cdot x_1 \vee x_2 \cdot x_3 = x_1 \cdot (1 \vee x_3 \vee x_2) \vee x_2 \cdot x_3 =$

$= x_1 \cdot 1 \vee x_2 \cdot x_3 = x_1 \vee x_2 \cdot x_3$

7

$$x \vee \neg x \cdot y = x \vee y$$

$x \vee \neg x \cdot y = (x \vee \neg x) \cdot (x \vee y) = 1 \cdot (x \vee y) = x \vee y$

Пример.

Даны логические функции:

$$f = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)} \qquad g = x_1 \to x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

Требуется доказать их равносильность с помощью эквивалентных преобразований.

$$f = \overline{x_1 \cdot (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)} = \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \cdot x_1 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot x_3)} =$$

$$= \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot (x_1 \vee x_1 \cdot \overline{x_2} \vee x_1 \cdot x_3)} = \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot x_1 \cdot (1 \vee \overline{x_2} \vee x_3)} =$$

$$= \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot x_1} = \overline{(\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) \cdot x_1} = \overline{\overline{x_1} \cdot x_1 \vee \overline{x_2} \cdot x_1} = \overline{0 \vee x_1 \cdot \overline{x_2}} = \overline{x_1 \cdot \overline{x_2}} =$$

$$= \overline{x_1} \vee \overline{\overline{x_2}} = \overline{x_1} \vee x_2$$