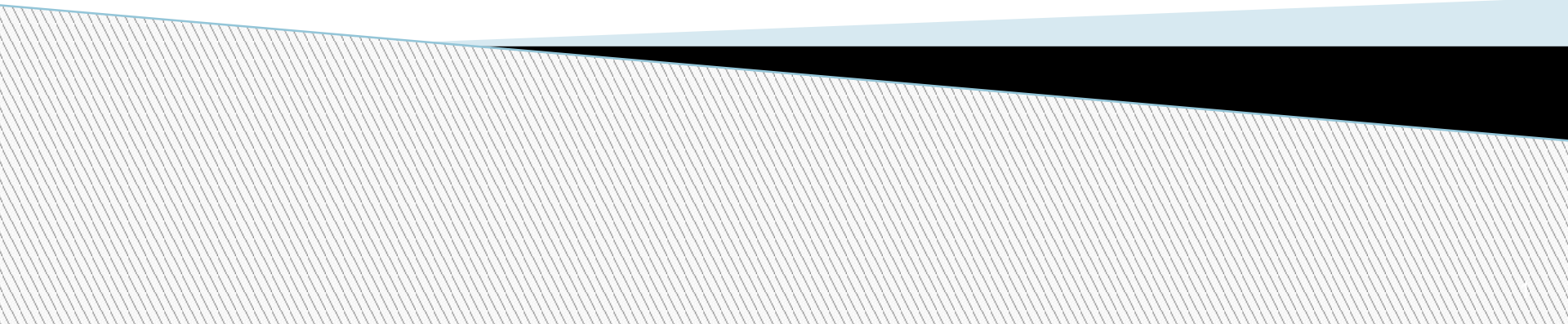


# Основы теории оболочек вращения



# Основы теории оболочек вращения

Оболочка является более сложным объектом – она представляет собой тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми  $h$  (толщина оболочки) мало по сравнению с другими характерными размерами

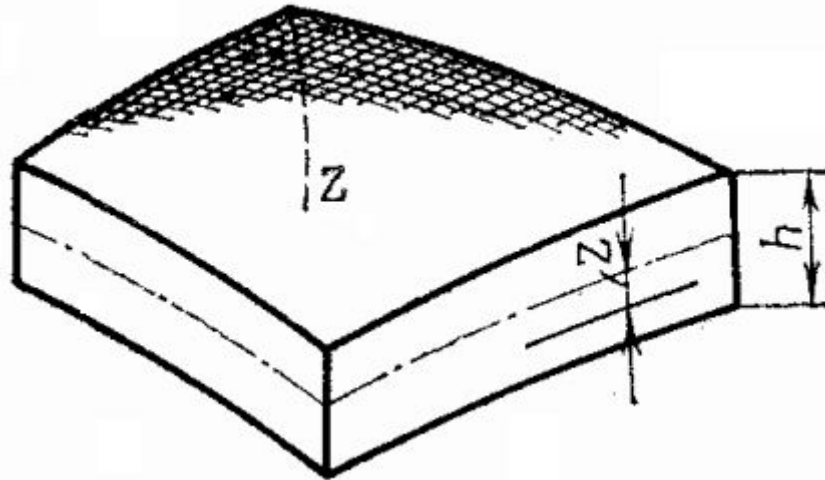
Оболочку называют тонкой, если ее толщина значительно меньше (в 20 и более раз), чем прочие размеры.

- безмоментная теория оболочек;
- моментная теория оболочек.

# Геометрия оболочек вращения

Основными геометрическими понятиями теории оболочек постоянной толщины являются понятия срединной поверхности и слоя оболочки.

Срединной или средней поверхностью оболочки называется поверхность, равноудаленная от ее внутренней и наружной поверхностей.



Откладывая по внутренним нормалям к срединной поверхности оболочки отрезки длиной  $z$  и соединяя их концы, получим новую поверхность, которую назовем слоем  $z$  оболочки.

Поверхность  $z = h/2$  соответствует внутренней поверхности оболочки, а поверхность  $z = -h/2$  - внешней.

# Геометрия оболочек вращения

**Геометрия оболочки вращения полностью определяется формой ее срединной поверхности:**

- **сферические;**
- **конические;**
- **цилиндрические.**

**Обычно все встречающиеся на практике оболочки имеют постоянную толщину.**

# Геометрия оболочек вращения

**Срединная поверхность оболочки вращения получается в результате вращения плоской кривой относительно оси, лежащей в плоскости этой кривой. Такая кривая называется меридианом.**

**Меридианы являются линиями главных кривизн и их принимают в качестве координатных линий. Меридиан – образующая срединной поверхности.**

**Параллели – окружности, образованные пересечением срединной поверхности оболочки с плоскостями, перпендикулярными ее оси, – представляют семейство других координатных линий.**

# Геометрия оболочек вращения

Произвольную точку срединной поверхности вращения определим как точку пересечения параллели и меридиана.

Каждой параллели будет соответствовать угол  $\theta$  между осью вращения оболочки и нормалью  $n$  к срединной поверхности (широта параллели).

Положение меридиана на этой поверхности можно определить углом  $\varphi$  в плоскости параллели.

Система координат  $\theta$ ,  $\varphi$  и  $z$  определяет положение произвольной точки  $A_z$  внутри тела оболочки. Это ортогональная криволинейная система координат в пространстве.



# Геометрия оболочек вращения

В точке  $A$  срединной поверхности можно построить три взаимно ортогональных вектора единичной длины:

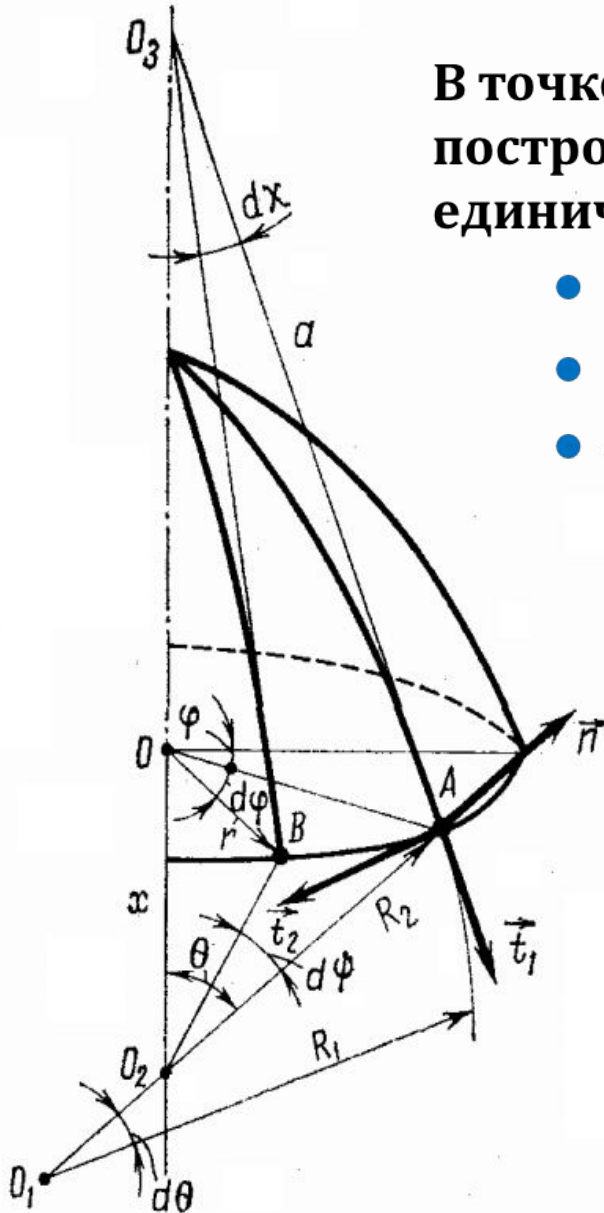
- вектор касательной к меридиану  $\vec{t}_1$ ;
- вектор касательной к параллели  $\vec{t}_2$ ;
- вектор нормали  $n$  к поверхности.

$O$  – точка пересечения параллели с осью вращения;

$O_1$  – центр кривизны меридиана;

$O_2$  – точка пересечения нормали с осью вращения;

$O_3$  – точка пересечения касательных к меридианам, проведенных из точек одной параллели.



# Геометрия оболочек вращения

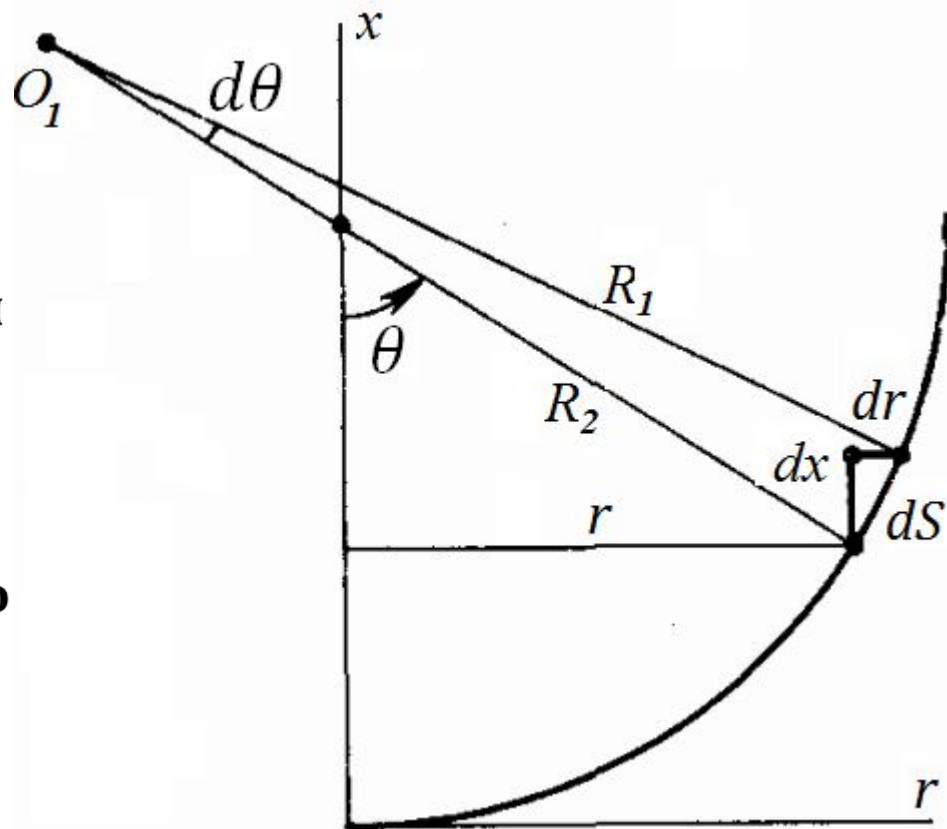
Геометрия оболочек вращения характеризуется двумя главными радиусами кривизны  $R_1$  и  $R_2$ .

Первый главный радиус кривизны поверхности вращения  $R_1$  равен радиусу кривизны меридиана.

Второй главный радиус  $R_2$  равен отрезку нормали к поверхности до оси вращения, т.е.

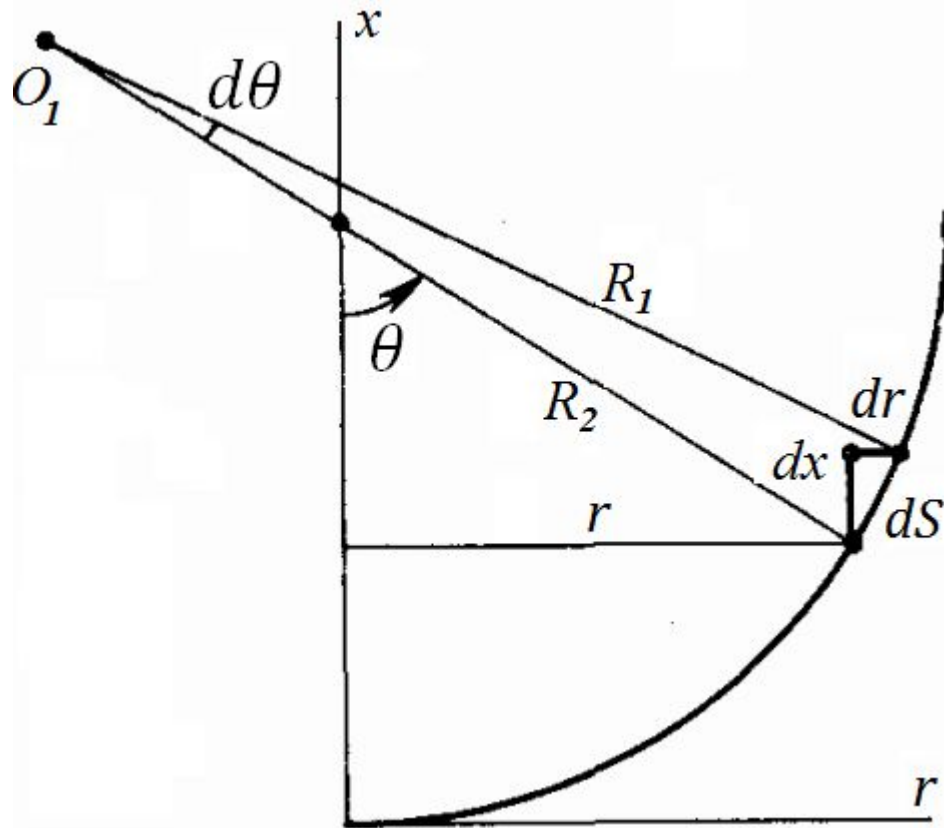
$$R_2 = \frac{r}{\sin \theta}$$

$r$  – радиус параллели.





# Геометрия оболочек вращения



Получение зависимости между радиусами кривизны

$$dS = R_1 d\theta$$

$$dS = \frac{dr}{\cos \theta}$$

$$R_1 d\theta = \frac{dr}{\cos \theta}$$

$$R_1 \cos \theta = \frac{dr}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (R_2 \sin \theta) = \frac{dR_2}{d\theta} \sin \theta + R_2 \cos \theta$$

$$R_2 = \frac{r}{\sin \theta}$$

$$\frac{dR_2}{d\theta} = (R_1 - R_2) \operatorname{ctg} \theta$$

# Гипотезы Кирхгофа

**1. Кинематическая гипотеза. Нормальный к поверхности отсчета прямолинейный элемент оболочки после деформации**

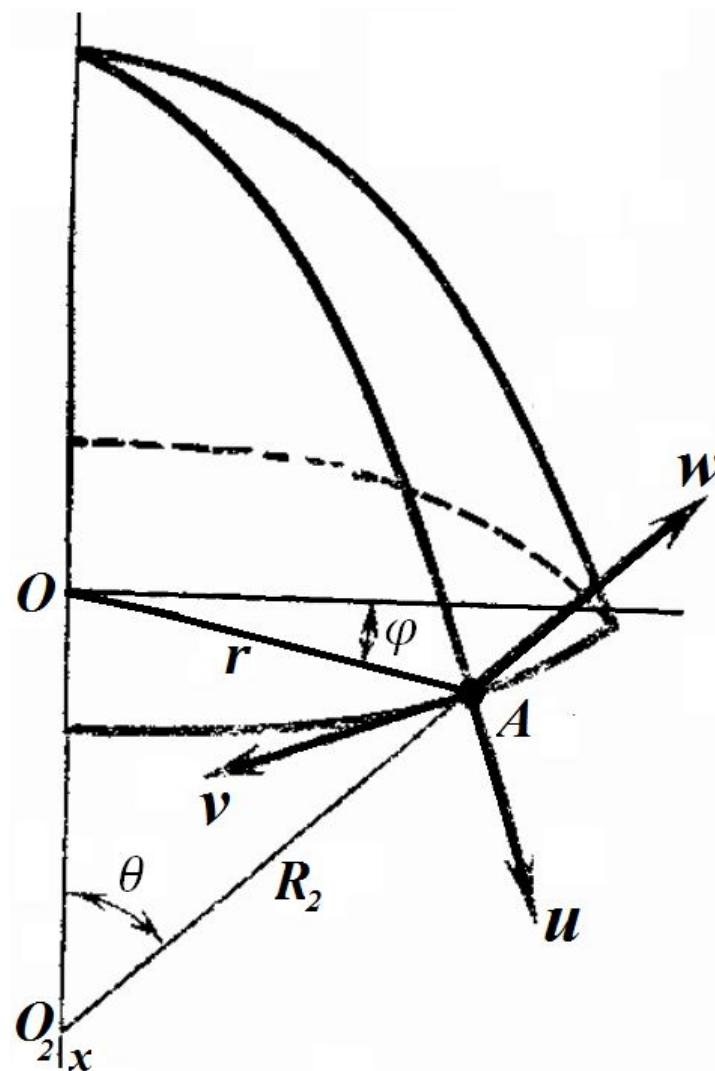
- **остается прямолинейным, нормальным к деформированной поверхности;**
- **сохраняет свою длину.**

**2. Статическая гипотеза.**

- **Нормальные напряжения в площадках, параллельных поверхности отсчета, малы, и по сравнению с другими напряжениями ими можно пренебречь.**
- **Касательные напряжения, перпендикулярные поверхности отсчета, рассматриваются как чисто статические факторы. Они определяются только из уравнений равновесия, а их связь с составляющими деформаций не учитывается.**

# Определение деформаций срединной поверхности

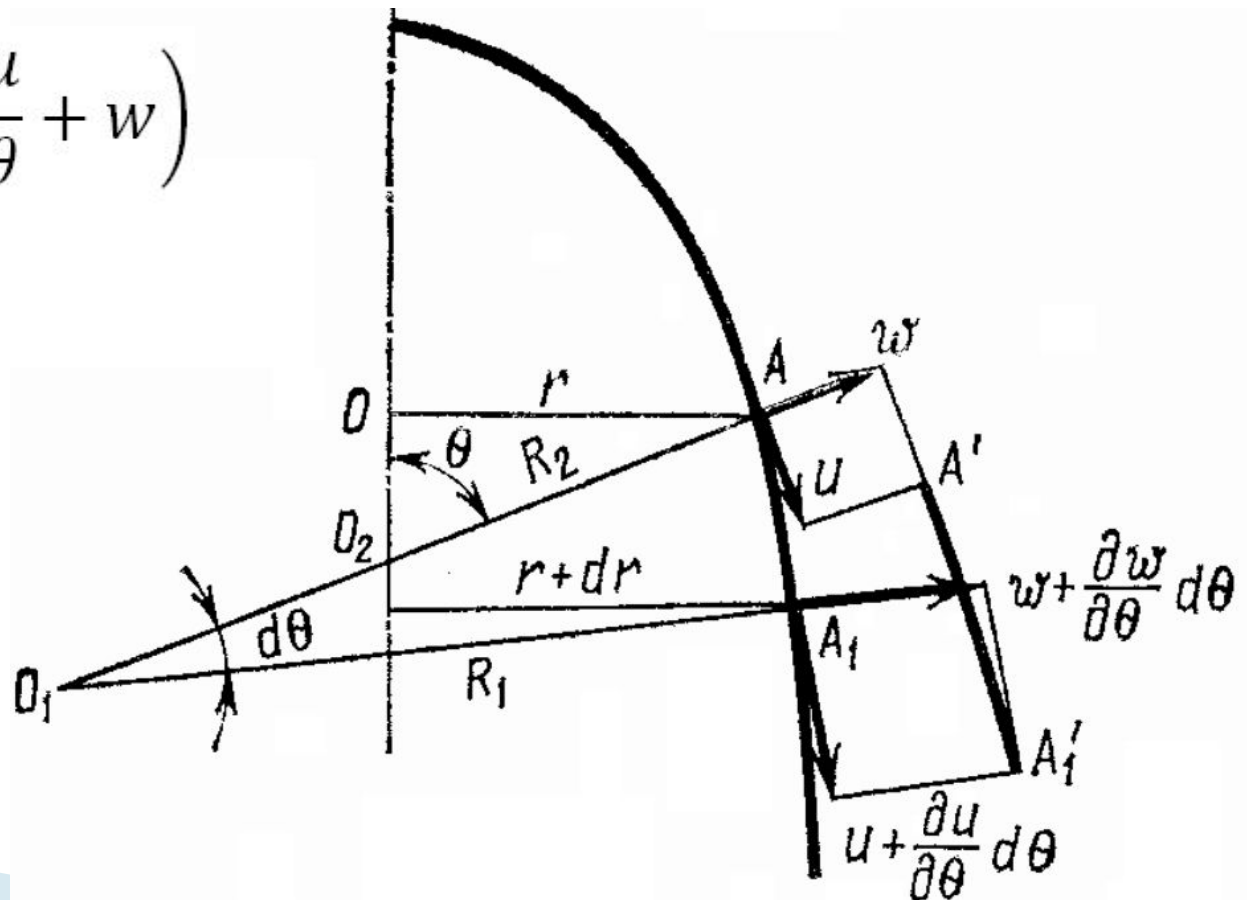
Обозначение перемещений



# Определение деформаций срединной поверхности

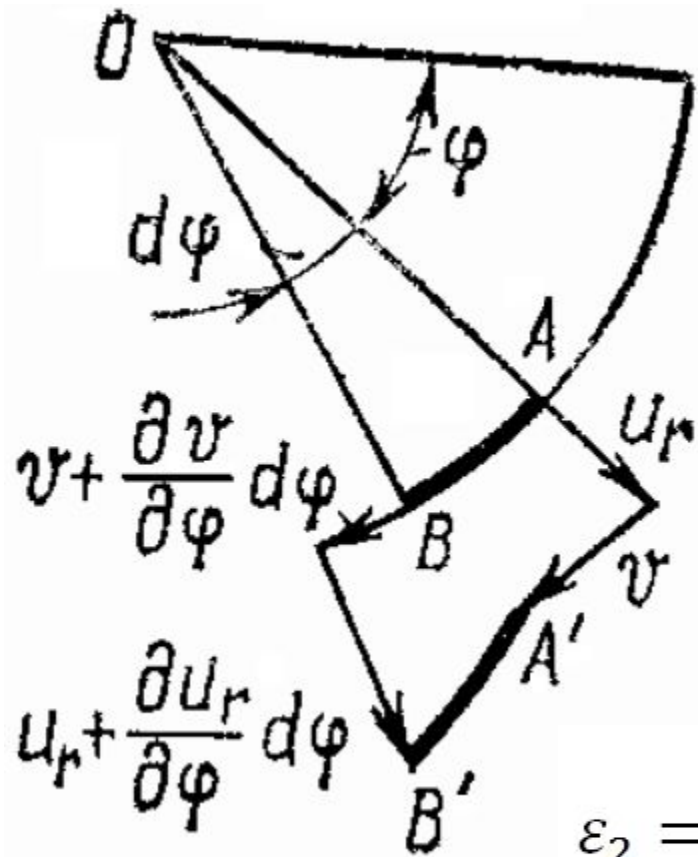
Деформация срединной поверхности в плоскости меридиана

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right)$$



# Определение деформаций срединной поверхности

Деформация срединной поверхности в направлении параллели



$$u_x = u \sin \theta - w \cos \theta$$

$$u_r = u \cos \theta + w \sin \theta$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u_r \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2}$$

# Определение деформаций срединной поверхности

Деформация сдвига элемента срединной поверхности оболочки

$$\gamma_1 = \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dS} - \frac{v}{r} \frac{dr}{dS} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi}$$

Формулы для  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\gamma$  определяют деформации срединной поверхности оболочки в касательной (тангенциальной) плоскости. Их часто называют тангенциальными деформациями.

# Определение деформаций срединной поверхности

Изгибные деформации срединной поверхности определяются через углы поворота нормали. В меридиональной плоскости вследствие перемещений  $u$  и  $v$  векторы  $\vec{t}_1$  и  $\vec{n}$  повернутся на угол

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial S} - \frac{u}{R_1} = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right)$$

по движению против часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора  $\vec{t}_2$ .

В плоскости  $AO_2B$  векторы  $\vec{t}_2$  и  $\vec{n}$  повернутся на угол

$$\vartheta_2 = \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial w}{\partial \psi} - v \right) = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{v}{R_2}; \quad R_2 \partial \psi = r \partial \varphi$$

против движения часовой стрелки, если смотреть в направлении вектора  $\vec{t}_1$ .

Углы  $\gamma_1, \gamma_2, \vartheta_1, \vartheta_2$  полностью определяют повороты векторов  $\vec{t}_1, \vec{t}_2, \vec{n}$  при малых перемещениях  $u, v, w$ .

# Определение деформаций срединной поверхности

Цилиндрическая оболочка

$$R_1 = \infty, \quad r = R_2 = R, \quad \theta = \pi/2, \quad R_1 d\theta = dS = dx$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right);$$

$$\gamma = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x};$$

$$\vartheta_1 = \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \vartheta_2 = \frac{\partial w}{R \partial \varphi} - \frac{v}{R} = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right).$$



# Определение деформаций срединной поверхности

Сферическая оболочка

$$R_1 = R_2 = R, \quad r = R \sin \theta.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \theta + w \right);$$

$$\gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{ctg} \theta \right);$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right);$$

$$\vartheta_2 = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{v}{R_2} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right).$$

# Безмоментная теория оболочек

Согласно этой теории считают, что изгибающие моменты равны нулю и, следовательно, предполагают, что напряжения распределены равномерно по толщине оболочки.

Эта теория применима в тех случаях, когда оболочка не имеет резких переходов и закреплений и, кроме того, не нагружена сосредоточенными силами и моментами.

Безмоментная теория оболочек – приближенная теория расчета без учета изгибающих и скручивающих моментов.

При резких изменениях формы и в местах крепления возникают повышенные напряжения, обусловленные изгибным эффектом.

Для решения таких задач используется моментная теория оболочек.

Использование моментной теории показывает, что влияние этих факторов распространяется только на участки, близкие к особым точкам.

Поэтому на достаточном удалении от этих областей напряжения могут быть определены по безмоментной теории.

# Безмоментная теория оболочек

$\sigma_\theta$  – меридиональные напряжения;

$\sigma_\varphi$  – кольцевые напряжения;

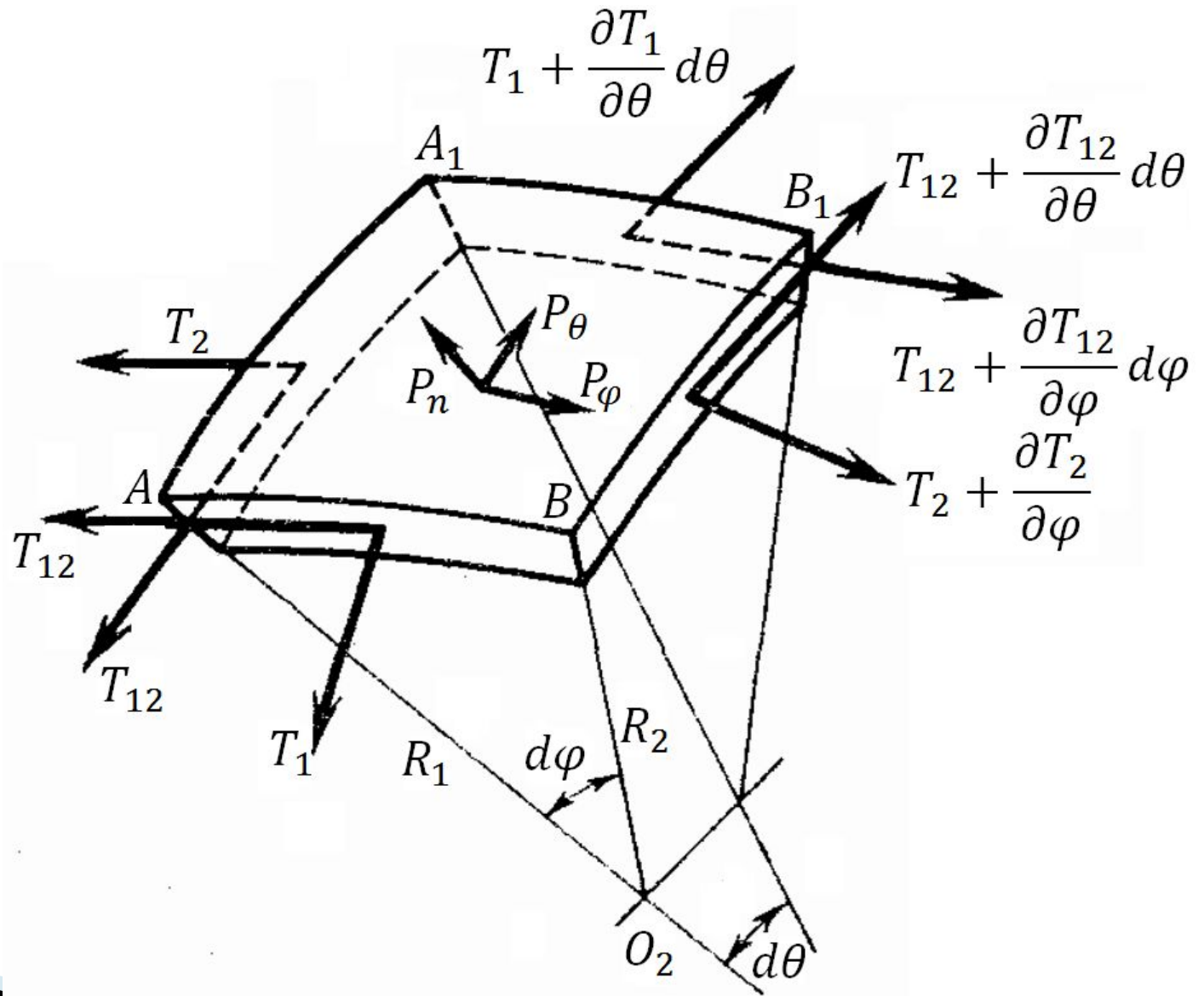
$\tau$  – напряжения сдвига.

В безмоментной теории оболочек эти напряжения считаются равномерно распределенными по толщине оболочки.

Погонные усилия

$$T_1 = \sigma_\theta h; \quad T_2 = \sigma_\varphi h; \quad T_{12} = \tau h$$

# Безмоментная теория оболочек



# Безмоментная теория оболочек

## Уравнения равновесия

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2) \frac{\cos \theta}{r} + \frac{\partial T_{12}}{r \partial \varphi} + P_\theta = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} + \frac{2T_{12}}{r} \cos \theta + P_\varphi = 0$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = P_n \text{ - уравнение Лапласа}$$

# Безмоментная теория оболочек

**Физические соотношения**

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1); \quad \gamma = \frac{T_{12}}{Gh}.$$

**Геометрические соотношения**

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2}; \\ \gamma &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta. \end{aligned}$$

**В безмоментной теории оболочек углы поворота нормали  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  равны нулю.**

# Уравнения безмоментной теории оболочек для осесимметричной задачи

$$P_\varphi = 0; \quad v = 0; \quad \gamma = 0; \quad T_{12} = 0;$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0.$$

**Уравнения равновесия**

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + (T_1 - T_2) \frac{\cos \theta}{r} + P_\theta = 0$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} = P_n$$

# Уравнения безмоментной теории оболочек для осесимметричной задачи

## Физические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1);$$

## Геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right);$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2};$$



# Сферическая оболочка при действии внутреннего давления

Для сферической оболочки  $R_1 = R_2 = R$

По условиям полной симметрии для сферы  $T_1 = T_2 = T$

Из уравнения Лапласа  $\frac{2T}{R} = p \Rightarrow T = \frac{pR}{2} \Rightarrow \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{pR}{2h}$

Деформации

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) = \frac{T}{Eh} (1 - \mu) = \frac{pR}{2Eh} (1 - \mu);$$

Перемещение  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{w}{R} \Rightarrow w = R\varepsilon_1 = \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \mu);$

# Цилиндрическая оболочка при действии внутреннего давления

Для цилиндрической оболочки  $R_1 = \infty, R_2 = R$

Из уравнения Лапласа  $\frac{T_2}{R} = p \Rightarrow T_2 = pR$

Кольцевое напряжение  $\sigma_\varphi h = pR \Rightarrow \sigma_\varphi = \frac{pR}{h}$

Осевое напряжение  $\sigma_x = \sigma_\theta$

нормальная сила от действия напряжений

$$N = \sigma_x \cdot 2\pi R h$$

осевая составляющая сил давления

$$P = \pi R^2 p$$

$$\sigma_x = \frac{\pi R^2 p}{2\pi R h} = \frac{pR}{2h}$$

# Цилиндрическая оболочка при действии внутреннего давления

**Погонные усилия**

$$T_1 = \frac{pR}{2}; \quad T_2 = pR$$

**Осевая деформации**

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{Eh} (T_1 - \mu T_2) = \frac{pR}{Eh} \left( \frac{1}{2} - \mu \right)$$

**Окружная деформация**

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1) = \frac{pR}{Eh} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

**Перемещение**

$$w = R\varepsilon_2 = \frac{pR^2}{Eh} \left( 1 - \frac{\mu}{2} \right)$$

# Цилиндрическая и сферическая оболочка при действии внутреннего давления

**В месте стыка цилиндра и сферы**

**увеличение радиуса цилиндра от действия сил давления по безмоментной теории**

$$\Delta R_{\text{ц}} = \frac{pR^2}{Eh} \left(1 - \frac{\mu}{2}\right);$$

**увеличение радиуса сферы от действия сил давления по безмоментной теории**

$$\Delta R_{\text{с}} = \frac{pR^2}{2Eh} (1 - \mu) = \frac{pR^2}{Eh} \frac{1 - \mu}{2}$$

**Стальная оболочка**       $\mu = 0,3$

$$\Delta R_{\text{ц}} = 0,85 \frac{pR^2}{Eh}; \quad \Delta R_{\text{с}} = 0,35 \frac{pR^2}{Eh}$$

# Особенности работы оболочек

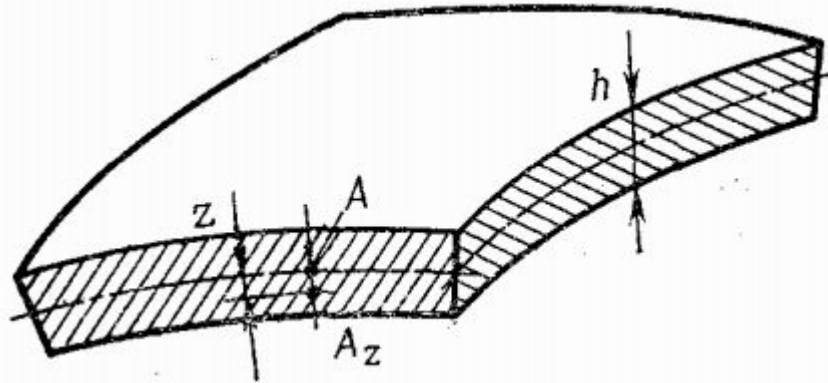
**Известно, что тонкостенные оболочечные конструкции, выдерживающие значительные усилия  $T_1$  и  $T_2$  в срединной поверхности, очень плохо работают на изгиб (из-за малой их толщины).**

**Поэтому, проектируя оболочечные конструкции, конструктор должен, по возможности, не допускать появления в них изгибающих моментов.**

**В конструкциях сосудов под давлением изгиб очень часто имеет место лишь в сравнительно узкой области на границах оболочек. Большая же часть сосуда находится в безмоментном состоянии.**

# Уравнения моментной теории оболочек

Рассматривается слой оболочки на расстоянии  $z$  от срединной поверхности.



Произвольной точке  $A$  на срединной поверхности будет соответствовать точка  $A_z$  на слое. Обе точки лежат на одной нормали к срединной поверхности и имеют одни и те же координаты  $\theta$  и  $z$ .

В теории тонких оболочек деформации слоя  $z$  определяются при помощи гипотезы прямых нормалей, согласно которой точки, лежавшие до деформации оболочки на какой-либо нормали к срединной поверхности, будут перемещаться вместе с этой нормалью в процессе деформирования оболочки.

Эта гипотеза устанавливает кинематическую связь между перемещениями  $u, v, w$  точки  $A$  срединной поверхности и перемещениями  $u_z, v_z, w_z$  точки  $A_z$  на слое  $z$ .

# Уравнения моментной теории оболочек

Согласно гипотезе прямых нормалей перемещения точки  $A_z$  слоя  $z$  равны

$$u_z = u + z\vartheta_1;$$

$$v_z = v + z\vartheta_2;$$

$$w_z = w.$$

Углы поворота нормали к срединной поверхности в точке  $A$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) = \frac{\partial w}{\partial S} - \frac{u}{R_1};$$

$$\vartheta_2 = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{v}{R_2}.$$

# Уравнения моментной теории оболочек

## Выражения для деформаций

$$\varepsilon_{1z} = \frac{1}{R_{1z}} \left( \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + w \right);$$

$$\varepsilon_{2z} = \frac{1}{r_z} \frac{\partial v_z}{\partial \varphi} + \frac{u_z}{r_z} \cos \theta + \frac{w}{R_{2z}};$$

$$\gamma_z = \frac{1}{r_z} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_{1z}} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{v_z}{r_z} \cos \theta.$$

Принимая  $R_{1z} \approx R_1, R_{2z} \approx R_2, r_z \approx r$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1z} &= \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} (u + z\vartheta_1) + w \right) = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta} z = \\ &= \varepsilon_1 + \chi_1 z; \end{aligned} \quad \chi_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta};$$



# Уравнения моментной теории оболочек

Выражения для деформаций

$$\begin{aligned}\varepsilon_{2z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (v + z\vartheta_2) + \frac{\cos \theta}{r} (u + z\vartheta_1) + \frac{w}{R_2} = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi} + \frac{\vartheta_1}{r} \cos \theta \right) z = \varepsilon_2 + \chi_2 z; \\ \chi_2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi} + \frac{\vartheta_1}{r} \cos \theta; \\ \gamma_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (u + z\vartheta_1) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} (v + z\vartheta_2) - \frac{\cos \theta}{r} (v + z\vartheta_2) = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} - \frac{\vartheta_2}{r} \cos \theta \right) z = \\ &= \gamma + 2\chi_{12} z; \quad \chi_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} - \frac{\vartheta_2}{r} \cos \theta \right)\end{aligned}$$

$\chi_1, \chi_2, \chi_{12}$  - параметры изменения кривизны срединной поверхности.

# Уравнения моментной теории оболочек

Физические соотношения (слой оболочки считают находящимся в условиях ПНС):

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{1z} + \mu\varepsilon_{2z});$$

$$\sigma_{\varphi} = \frac{E}{1 - \mu^2} (\varepsilon_{2z} + \mu\varepsilon_{1z});$$

$$\tau = G\gamma_z = \frac{E}{2(1 + \mu)} \gamma_z.$$

Напряжения  $\sigma_{\theta}$ ,  $\sigma_{\varphi}$ ,  $\tau$  линейно изменяются по толщине оболочки.

# Уравнения моментной теории оболочек

Вместо напряжений в теории оболочек вводятся погонные усилия  $T_1, T_2, T_{12}$  и погонные моменты  $M_1, M_2, M_{12}$ :

**меридиональное погонное усилие**

$$T_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\theta dz = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2);$$

**кольцевое погонное усилие**

$$T_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_\varphi dz = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1);$$

**сдвигающее погонное усилие**

$$T_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz = Gh\gamma = \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \gamma;$$

# Уравнения моментной теории оболочек

**Погонные моменты:**

**погонный изгибающий момент в меридиональной плоскости**

$$M_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\theta} z dz = D(\chi_1 + \mu\chi_2);$$

**погонный окружной изгибающий момент**

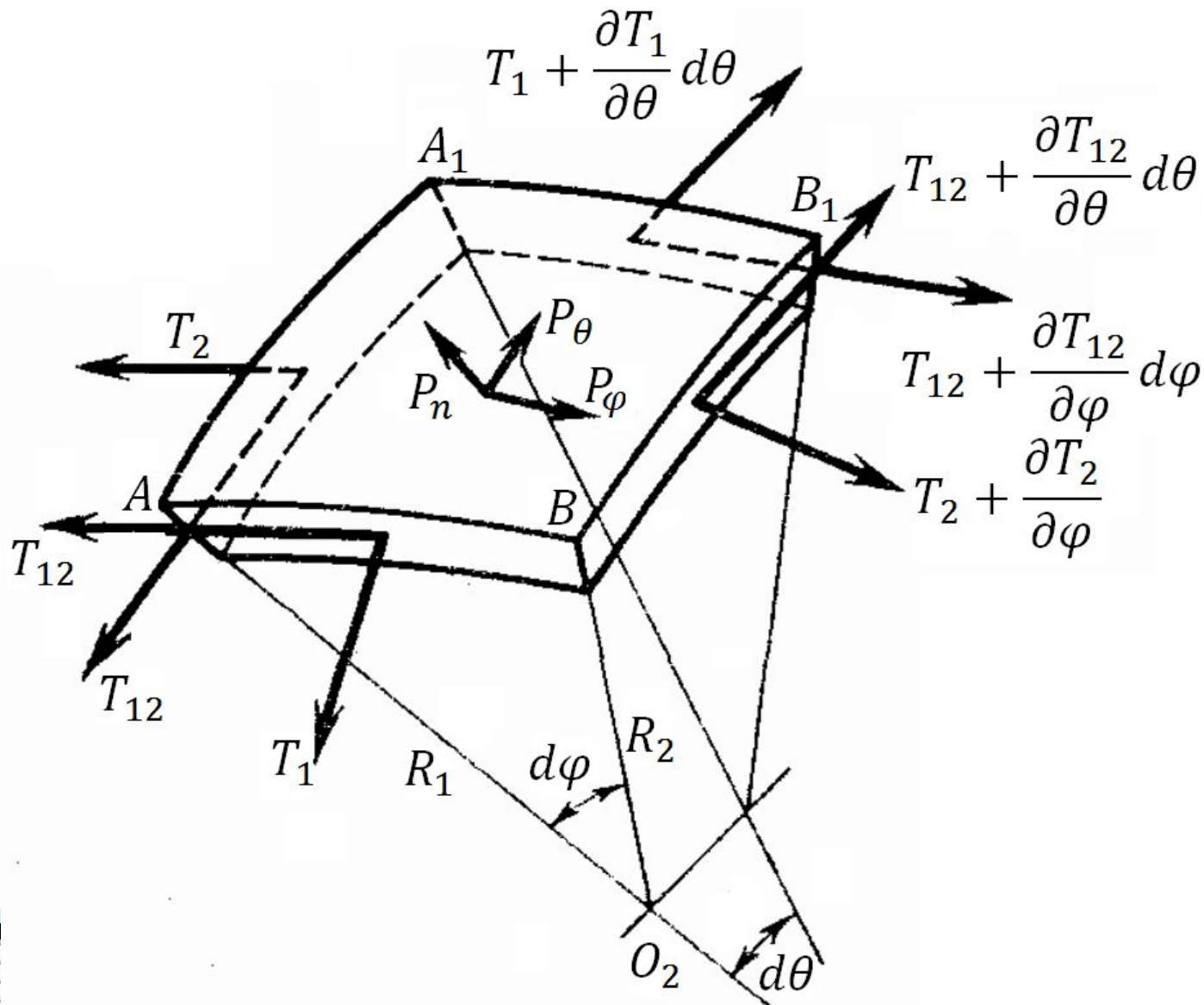
$$M_2 = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{\varphi} z dz = D(\chi_2 + \mu\chi_1);$$

**погонный крутящий момент**

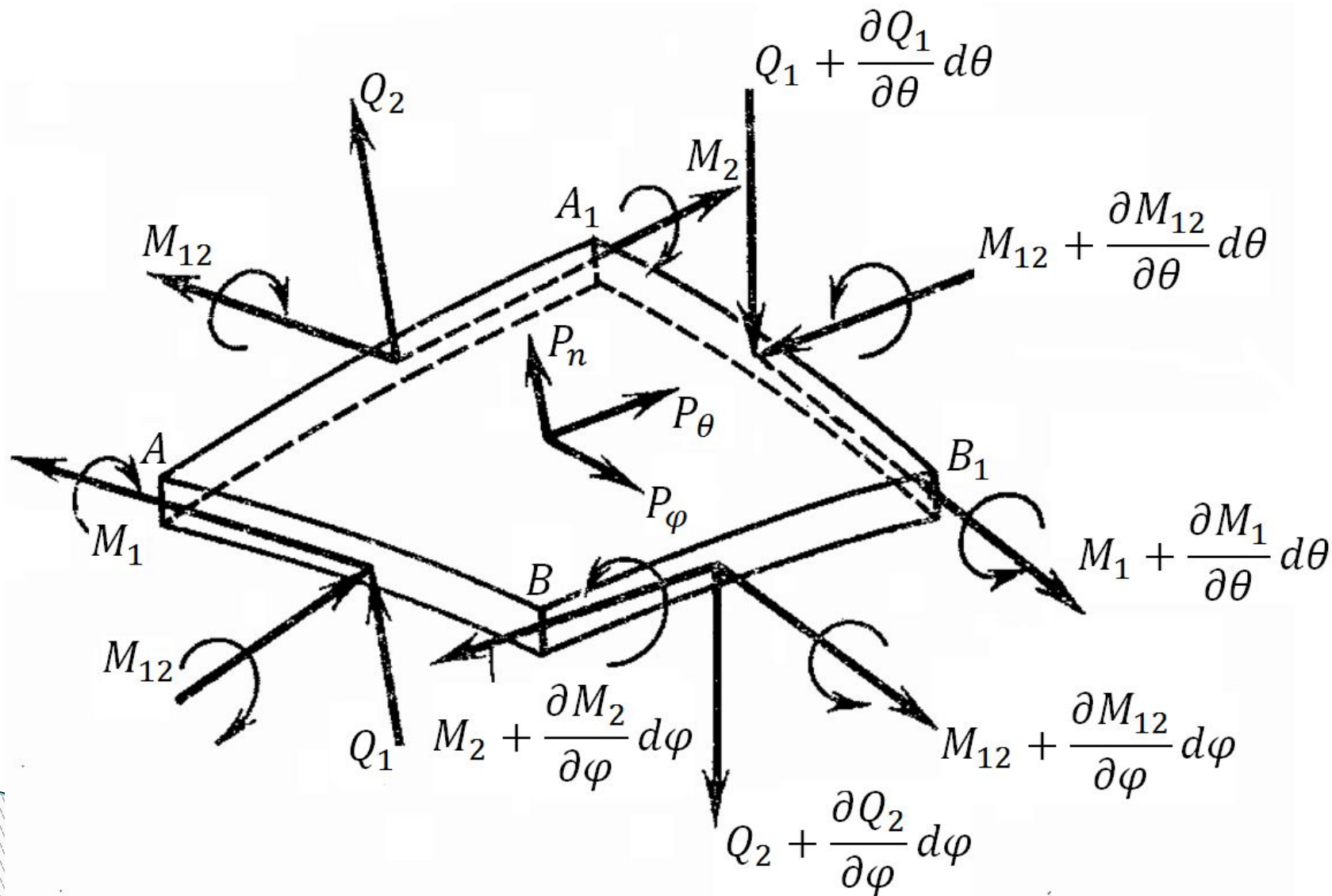
$$M_{12} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau z dz = D(1 - \mu)\chi_{12};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} \quad \text{— цилиндрическая жесткость оболочки на изгиб.}$$

# Уравнения равновесия моментной теории оболочек



# Уравнения равновесия моментной теории оболочек



# Уравнения равновесия моментной теории оболочек

На рисунке моменты изображены в виде векторов, перпендикулярных плоскости их действия.

Положительное направление векторов соответствует правилу правого винта.

На рисунке показаны положительные направления моментов.

Из равенства нулю суммы моментов относительно линии  $A_1B_1$ :

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} + \frac{M_1 - M_2}{r} \cos \theta + \frac{\partial M_{12}}{r \partial \varphi}$$

Из уравнения моментов относительно линии  $BB_1$ :

$$Q_2 = \frac{\partial M_2}{r \partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{R_1 \partial \theta} + 2M_{12} \frac{\cos \theta}{r}$$

# Уравнения равновесия моментной теории оболочек

Уравнение равновесия сил в проекции на касательную к меридиану

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + \frac{T_1 - T_2}{r} \cos \theta + \frac{\partial T_{12}}{r \partial \varphi} - \frac{Q_1}{R_1} + P_\theta = 0$$

Уравнение равновесия сил в проекции на касательную к параллели

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} + \frac{2T_{12}}{r} \cos \theta - \frac{Q_2}{R_2} + P_\varphi = 0$$

Уравнение равновесия в проекции на нормаль

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{Q_1}{r} \cos \theta = P_n$$

Шестое уравнение равновесия элемента – равенство нулю суммы моментов относительно нормали – должно быть следствием парности касательных напряжений и выполняется автоматически.



# Полная система уравнений моментной теории оболочек

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \chi_1 z; \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + \chi_2 z; \quad \gamma_z = \gamma + 2\chi_{12} z;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2};$$

$$\gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \theta;$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right); \quad \vartheta_2 = \frac{\partial w}{r \partial \varphi} - \frac{v}{R_2};$$

$$\chi_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta}; \quad \chi_2 = \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \varphi} + \frac{\vartheta_1}{r} \cos \theta;$$

$$\chi_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_2}{\partial \theta} - \frac{\vartheta_2}{r} \cos \theta \right).$$

# Полная система уравнений моментной теории оболочек

**Физические соотношения:**

$$T_1 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2);$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1);$$

$$T_{12} = \frac{Eh}{2(1 + \mu)} \gamma;$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2); \quad M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1);$$

$$M_{12} = D(1 - \mu)\chi_{12};$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

# Полная система уравнений моментной теории оболочек

Уравнения равновесия:

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} + \frac{M_1 - M_2}{r} \cos \theta + \frac{\partial M_{12}}{r \partial \varphi}$$

$$Q_2 = \frac{\partial M_2}{r \partial \varphi} + \frac{\partial M_{12}}{R_1 \partial \theta} + 2M_{12} \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + \frac{T_1 - T_2}{r} \cos \theta + \frac{\partial T_{12}}{r \partial \varphi} - \frac{Q_1}{R_1} + P_\theta = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T_2}{\partial \varphi} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial T_{12}}{\partial \theta} + \frac{2T_{12}}{r} \cos \theta - \frac{Q_2}{R_1} + P_\varphi = 0$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{Q_1}{r} \cos \theta = P_n$$

# Уравнения моментной теории оболочек при осесимметричной деформации

$$P_\varphi = 0; \quad v = 0; \quad \gamma = 0; \quad \vartheta_2 = 0;$$
$$T_{12} = M_{12} = Q_2 = 0; \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = 0.$$

Геометрические соотношения:

$$\varepsilon_{1z} = \varepsilon_1 + \chi_1 z; \quad \varepsilon_{2z} = \varepsilon_2 + \chi_2 z;$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right); \quad \varepsilon_2 = \frac{u}{r} \cos \theta + \frac{w}{R_2} = \frac{1}{R_2} (u \operatorname{ctg} \theta + w);$$

$$\vartheta_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right); \quad \chi_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta} = \frac{1}{R_1} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) \right];$$

$$\chi_2 = \frac{\vartheta_1}{r} \cos \theta = \frac{\operatorname{ctg} \theta}{R_1 R_2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right); \quad r = R_2 \sin \theta$$

# Уравнения моментной теории оболочек при осесимметричной деформации

## Физические соотношения

$$T_1 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2);$$

$$T_2 = \frac{Eh}{1 - \mu^2} (\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1);$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2);$$

$$M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1);$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}.$$

# Уравнения моментной теории оболочек при осесимметричной деформации

## Уравнения равновесия

$$Q_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial M_1}{\partial \theta} + \frac{M_1 - M_2}{r} \cos \theta;$$

$$\frac{1}{R_1} \frac{\partial T_1}{\partial \theta} + \frac{T_1 - T_2}{r} \cos \theta - \frac{Q_1}{R_1} + P_\theta = 0;$$

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{Q_1}{r} \cos \theta = P_n.$$

# Краевой эффект для цилиндрической оболочки

Круговой тонкостенный цилиндр радиуса  $R$  находится под действием осесимметричной нагрузки  $p$ .

Деформации и напряжения, возникающие в оболочке, также обладают осевой симметрией и деформированный цилиндр представляет собой тело вращения.

Форма этого тела определяется формой изогнутой образующей цилиндра.

Для цилиндрической оболочки

$$R_1 = \infty; \quad r = R_2 = R; \quad \theta = \pi/2; \quad R_1 d\theta = dS = dx; \quad P_n = p$$

# Краевой эффект для цилиндрической оболочки

Из второго уравнения равновесия сил для случая осесимметричной деформации

$$\frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} + \frac{1}{R_1} \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + \frac{Q_1}{r} \cos \theta = P_n$$

$$\frac{T_2}{R} + \frac{dQ_1}{dx} - p = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dQ_1}{dx} = p - \frac{T_2}{R}$$

Для усилия  $Q_1 = \frac{dM_1}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 M_1}{dx^2} = p - \frac{T_2}{R}$

Из уравнения  $\varepsilon_2 = \frac{1}{Eh} (T_2 - \mu T_1)$

$$T_2 - \mu T_1 = Eh \varepsilon_2 = \frac{Eh}{R} w \quad \Rightarrow \quad T_2 = \mu T_1 + \frac{Eh}{R} w$$



# Краевой эффект для цилиндрической оболочки

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} = p - \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\mu}{R} T_1$$

$$M_1 = D(\chi_1 + \mu\chi_2);$$

$$\chi_1 = \frac{1}{R_1} \frac{\partial \vartheta_1}{\partial \theta} = \frac{d\vartheta_1}{dx}; \quad \vartheta_1 = \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) = \frac{dw}{dx};$$

$$\chi_2 = \frac{\vartheta_1}{r} \cos \theta = 0; \quad M_1 = D \frac{d^2 w}{dx^2};$$

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} = p - \frac{Eh}{R^2} w - \frac{\mu}{R} T_1$$

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2 D} w = \frac{p}{D} - \frac{\mu T_1}{RD}; \quad T_1 = T_x$$

# Краевой эффект для цилиндрической оболочки

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4k^4 w = \frac{p}{D} - \frac{\mu T_x}{RD};$$

$$4k^4 = \frac{Eh}{R^2 D} = \frac{Eh \cdot 12(1 - \mu^2)}{R^2 \cdot Eh^3} = \frac{12(1 - \mu^2)}{R^2 h^2}$$

$$w = e^{-kx}(C_1 \sin kx + C_2 \cos kx) + e^{kx}(C_3 \sin kx + C_4 \cos kx) + w^*,$$

$w^*$  – частное решение, которое находится в зависимости от закона изменения  $p$  вдоль образующей.

**Благодарю  
за внимание!**