# Занятие №3.

Обучение для выполнения НИР 5 курса,

подготовка к выполнению курсовой работы

# План занятия:

Численное решение задачи Коши,

-Пример №1.

-Пример №2.

-Пример №3

# Что такое задача Коши и зачем она нужна?

Задача Коши для одного ОДУ n – го порядка состоит в нахождении функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению вида

$$y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

и начальным условиям

$$y(t_0) = y_0,\ y'(t_0) = y_1, \dots,\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$$

Перед решением уравнение должно быть записано в виде системы ОДУ первого порядка

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}),\ \ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{y}$ – вектор – функция, а $\boldsymbol{y_0}$ – ее начальное значение.

Если задана система ДУ некоторые (или все) уравнения которой имеют порядок второй и выше, то перед решением в MATLAB ее также следует преобразовать к виду (1).

Для решения задачи Коши (1) в MATLAB существует семь функций (солверов): `ode23`, `ode45`, `ode113`, `ode15s`, `ode23s`, `ode23t` и `ode23tb`. Методика их использования одинакова, включая способы задания входных и выходных аргументов. В общем случае вызов солвера для решения задачи Коши производится следующим образом

[T, Y] = solver(odefun, ,[$t_0$, $t_{end}$], $y_0$, options)

Здесь `solver` – имя одной из вышеупомянутых функций, `odefun` – дескриптор функции (или строка с ее именем), реализующей вычисление вектор – функции $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ – правой части системы уравнений (1). Функция $\mathbf{F}(t,\mathbf{y})$ должна быть создана заранее, и иметь не менее двух входных аргументов. Ее назначение – вычислять правую часть системы для вектора $\boldsymbol{y}$ при значении независимой переменной `t` и возвращать результаты в виде вектора столбца. Вектор из двух чисел [$t_0$, $t_{end}$] представляет диапазон изменения независимого переменного (начальное и конечное значение). $y_0$ – вектор начальных значений искомой вектор – функции. Необязательный аргумент структура `options` используется для управления параметрами вычислительного процесса. В ней пользователь может задать абсолютную и/или относительную погрешность, если значения по умолчанию ($10^{6}$ и $10^{3}$) его не устраивают.

# ПРИМЕР №1:

Феофан бросил утюг вертикально вверх. Используя MatLab, определите каких максимальных высот достигнет утюг, если богатырская сила и телесложение Феофана позволили дать утюгу начальную скорость 20м/с на высоте 2метра. Постройте графики изменения скорости и высоты от времени, а также скорости от высоты.

В событиях, связанных с Феофаном, сопротивлением воздуха можно пренебречь.

- Решение:

$V=V0-gt$.

Обозначим:

высоту грузика= $y(1)$

Скорость грузика (производная от высоты грузика)= $y(2)$

Тогда исходное уравнение изменения скорости:

$y(2)=-gt$,

с начальными условиями при $t=0$:

$y(1)=2$м; $y(2)=20$м/с.

Editor - Untitled*

Untitled.m | Gasitel(1).m | Gasit(1ch).m | Gasit(skan).m | Reducirovanie_VR_failov.m

```
clear
clc
close all
%Исходное уравнение изменения скорости
% V=V0-gt
%Начальные условия
h=2;% начальная высота броска
V0=20; % начальная скорость
% исходные данные
g=10; %ускорение свободного падения
%параметры исследования
tk=3; %длительность по времени исследования
del=0.1; % шаг по времени
%РЕШЕНИЕ
Utug=@(t,y) [y(2); -g*t]; % Исходные уравнения: y(2) - скорость,
[T,Y]=ode45(Utug,[0:del:tk],[h V0]); % применяем солвер
%ГРАФИКИ
figure(1) %
subplot(3,1,1);
plot(T,Y(:,1));
ylabel('Высота, м'); xlabel('Время, с'); %
subplot(3,1,2); % график изменения скорости по времени
plot(T,abs(Y(:,2))); % скорость нарисуем по модулю
ylabel('Скорость, м/с'); xlabel('Время, с'); %
subplot(3,1,3);
plot(Y(:,1),Y(:,2)); %
ylabel('Скорость, м/с'); xlabel('Высота, м'); %
```

Всё решение в две строчки

Осталось лишь найти максимум от высоты, то есть max(Y(:,1))

В последний момент Феофан ловко увернулся от падающего утюга, порвав подштанники. Данный прецедент не расстроил Феофана и, добыв из подштанников резинку, он продолжил свои научные изыскания.
Подняв за резинку привязанный к ней утюг (его масса 4 кг), Феофан заметил, что резинка растянулась на 0.1метра. Необходимо помочь Феофану предсказать поведение построенной им механической системы:

1. Составим уравнение колебаний утюга на резинке;
2. Определим изменение во времени перемещения и скорости утюга, если к нему приложить действующий вертикально пинок, способный придать утюгу начальную скорость 20м/с.
3. Построим графики изменения во времени перемещения и скорости утюга из предположения, что талантливый Феофан способен лбом прикладывать к утюгу гармоническую силу 10Н с частотой 3Гц, а затухание колебаний соответствует вязкому трению с коэффициентом с= = 0.5 Н*с/м.

- Решение:

1) В общем виде уравнение выглядит следующим образом:

$mx'' + Cx' + Kx = F$

(Даже Феофан может расшифровать что есть что).

Пусть

$X(1)=x, \quad X(2)=X(1)'$.

Тогда

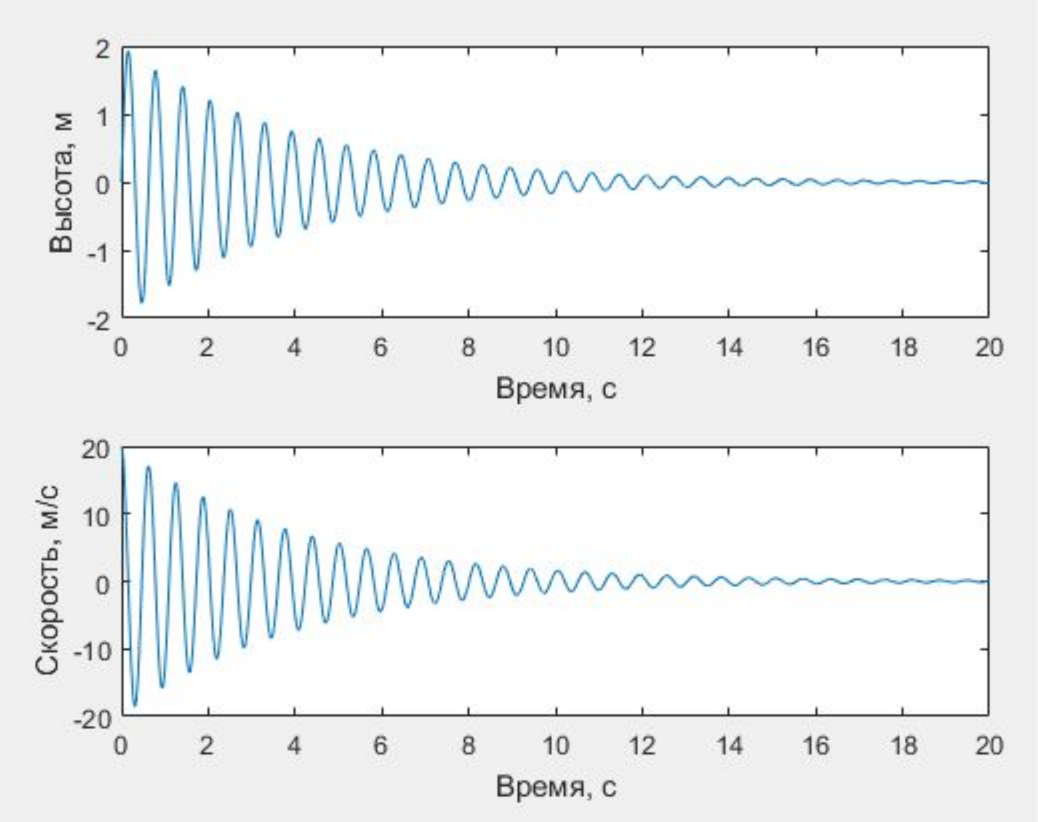
$X(2)' = (F - CX(2) - KX(1))/m$

2) Исходя из условия задачи подставим:

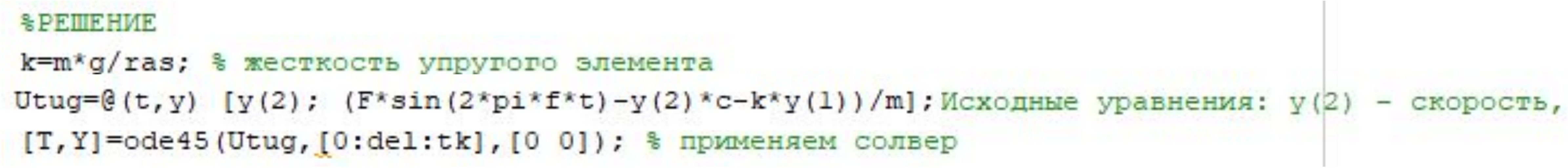
$X(2) = 20$ м/с; $X(1) = 0$ м - начальные условия ($t=0$).

# Решение для случая задания начальной скорости от мгновенного «пинка»

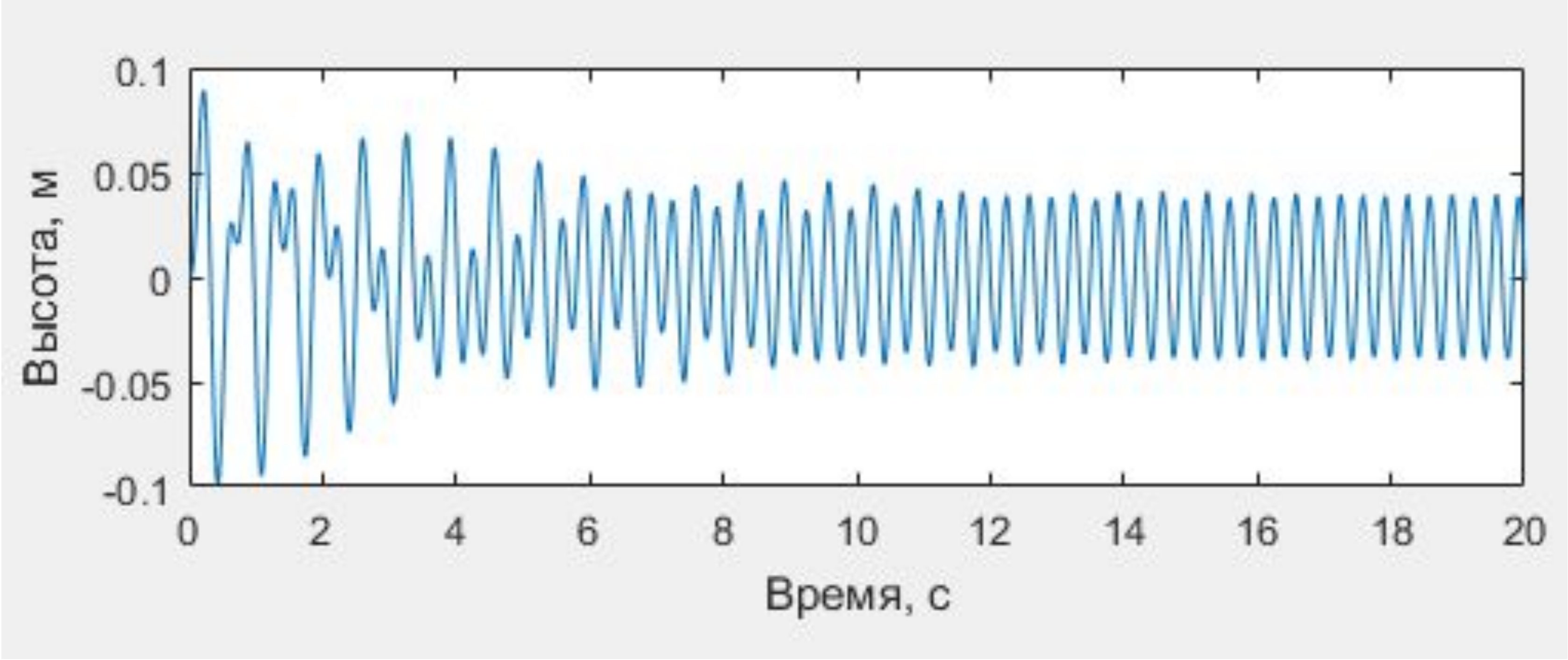
```
%Начальные условия
V0=20; % начальная скорость
% исходные данные
g=10; %ускорение свободного падения
c=0.5; % трение
ras=0.1 % растяжение упругого элемента
m=4 % масса объекта исследований
%параметры исследования
tk=10; %длительность по времени исследования
del=0.01; % шаг по времени
%РЕШЕНИЕ
k=m*g/ras; % жесткость упругого элемента
Utug=@(t,y) [y(2); (-y(2)*c-k*y(1))/m]; % Исходные уравнения: y(2) - скорость,
[T,Y]=ode45(Utug,[0:del:tk],[0 V0]); % применяем солвер
```



Решение для случая применения «лба» в качестве механического силовозбудителя:


```
%РЕШЕНИЕ
k=m*g/ras; % жесткость упругого элемента
Utug=@(t,y) [y(2); (F*sin(2*pi*f*t)-y(2)*c-k*y(1))/m];Исходные уравнения: y(2) - скорость,
[T,Y]=ode45(Utug,[0:del:tk],[0 0]); % применяем солвер
```

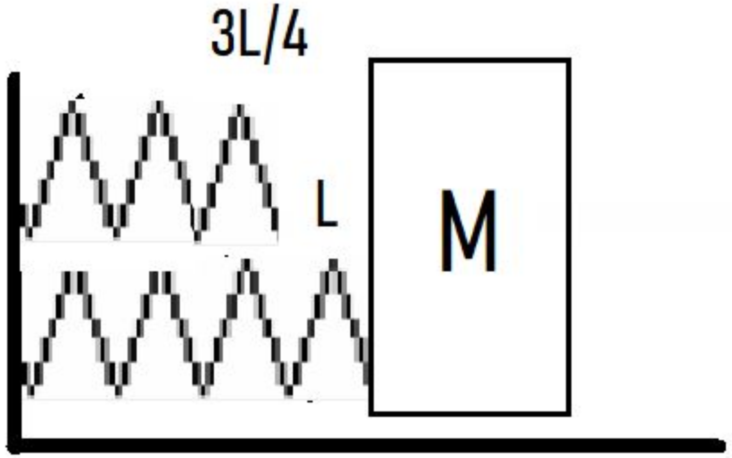
В результате получим аккуратную зависимость перемещения от времени с переходным процессом перед выходом на стационарный режим



Накопленный Феофаном научный опыт дал свои плоды, и вскоре юный естествоиспытатель добрался до старших курсов МГТУ. Там ему пришлось делать задание на НИР, дабы злобный преподаватель в приступах пристрастной неадекватности не поставил заслуженную двойку. Давайте посмотрим на задание Феофана и решение этого мастера:

**Задание:**

Система состоит из тела массой M закреплено на невесомой пружине «1» жесткостью k и длиной L, а также незакрепленной к телу пружины «2» жесткостью k и длиной 3L/4 (см. рисунок). Тело отклонили от положения равновесия на L/2 (пружина «1» работала на растяжение) и отпустили. Сделайте программу-алгоритм для определения на сколько процентов пружина «2» уменьшила амплитуду колебаний при сжатии пружин.
В решении принять L=1; k=1; m=1.
Допустимая погрешность не более 10^-4 м.

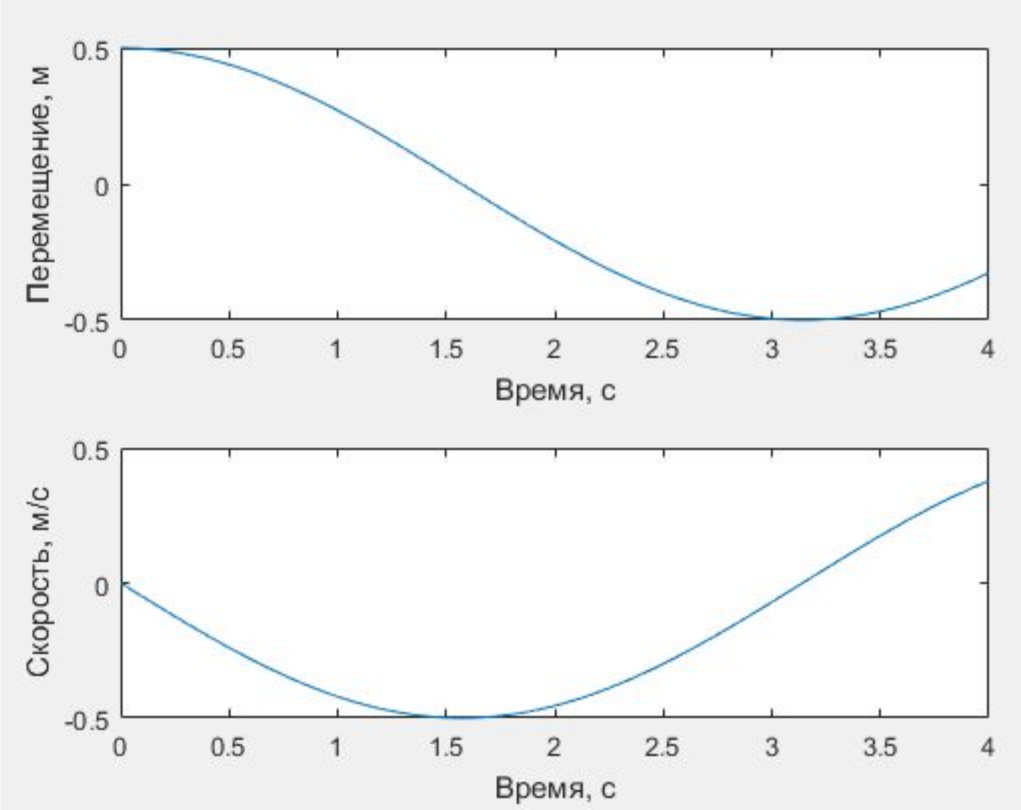


- Алгоритм решения:

1) Решим задачу без учета пружины «2».
2) С момента когда сжатие пружины «1» стало больше L/4 поменяем жесткость с k на 2k. И повторим расчет, используя новые начальные условия по перемещению и скорости.
3) Сравним результаты.

# Решение без учета пружины «2»

```
clear
clc
close all
% исходные данные
m=1 % масса объекта исследований
k=1 % жесткость
L=1 % длина
%параметры исследования
tk=4; %длительность по времени исследования
del=0.001; % шаг по времени
%РЕШЕНИЕ
Feofan=@(t,y) [y(2); (-k*y(1))/m]; % Исходные уравнения: y(2) - скорость,
[T,Y]=ode45(Feofan,[0:del:tk],[L/2 0]); % применяем солвер
%ГРАФИКИ
```



Определим момент, с которого жесткость должна увеличиться:

Из массива перемещений вычитаем значение при котором заработает вторая пружина, т.е.вычитаем –L/4 и ищем ближайшее к нулю значение

```
[eps,i]=min(abs(Y(:,1)+L/4)); % eps - параметр точности решения; i - индекс момента перехода
```

Мы не смогли обеспечить нужную точность в 10e-4.

```
eps =

   1.6788e-04

i =

        2095
```

Уменьшаем на порядок шаг по времени и повторим расчет:

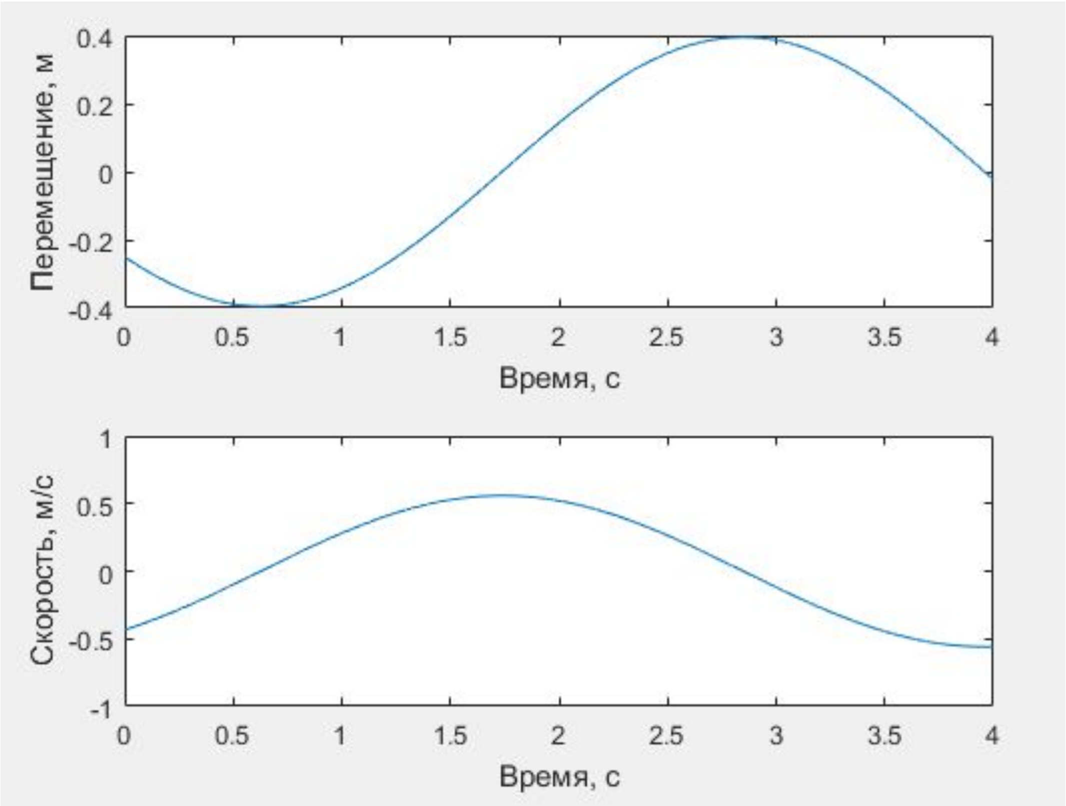
```
eps =

   4.4558e-06

i =

       20945
```

Совсем другое дело! Теперь Феофан

ПОВТОРЯЕМ
РАСЧЕТ

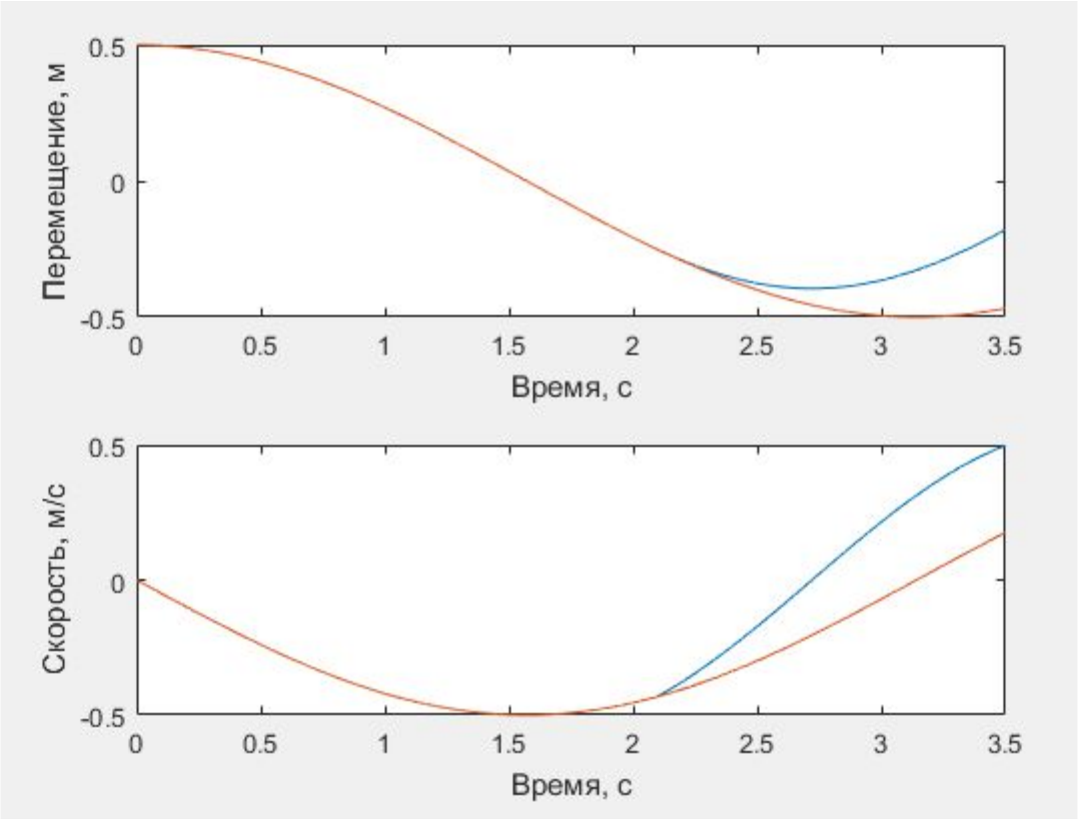
```
Feofan2=@(t,y) [y(2); (-2*k*y(1))/m]; % Исходные уравнения: y(2) - скорость,
[T2,Y2]=ode45(Feofan2,[0:del:tk],[Y(i,1) Y(i,2)]);
```

СТРОИМ
ГРАФИК



Соединяем массивы со значениями без пружины «2» Y и с пружиной «2» Y2, начиная с момента I. Полученный массив назовем Yrez т.е.

```
Yrez(1:i,:)=Y(1:i,:);
Yrez((i+1):(tk/del+1),:)=Y2(1:(tk/del+1-i),:);
```



Ну и наконец узнаем на сколько процентов уменьшится амплитуда при сжатии.

```
>> 100*(min(Y(:,1))-min(Yrez(:,1)))/min(Y(:,1))

ans =

   20.9423
```

Доделав свою работу суровый Феофан наконец то улыбнулся. Теперь Ваш черед .

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ! ПРИСТУПАЙТЕ К ВЫПОЛНЕНИЮСВОЕГО ЗАДАНИЯ.

## БОНУС! РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ ДИФ. УРАВНЕНИЙ

ПРИМЕР

X’’=X/(X+Y)

Y’’=Y/(X+Y)

X0=1; Y0=2

РЕШЕНИЕ:

Z(1)=X

Z(2)=X’

Z(3)=Y

Z(4)=Y’

Z(1)’=Z(2)

Z(2)’=Z(1)/(Z(1)+Z(3))

Z(3)’=Z(4)

Z(4)’=Z(3)/(Z(1)+Z(3))’

```
Dif2=@(t,z) [z(2); z(1)/(z(1)+z(3));z(4);z(3)/(z(1)+z(3))];
[T,Y]=ode45(Dif2,[0:del:tk],[1 0 2 0]); % применяем солвер
plot(T,Y(:,1), T,Y(:,3))
```