Тригонометрические уравнения

Преподаватель:
Сандакова О.В.

- https://vk.com/club193919258
- https://ege-study.ru/

1. Использование основных формул тригонометрии

1. Рассмотрим уравнение

$$2cos^2x + 5sin\,x = 5.$$

Преобразуем его, применив основное тригонометрическое тождество:

$$2\left(1 - sin^2x\right) + 5sin\,x = 5$$

$$2sin^2x - 5\,sinx + 3 = 0.$$

Заменяя sin *x* на *t*, приходим к квадратному уравнению:

$$2t^2 - 5t + 3 = 0.$$

Решая его, получим:

$$t_1 = \frac{3}{2},\ t_2 = 1.$$

Теперь вспоминаем, что мы обозначили за *t*. Первый корень приводит нас к уравнению $sin\,x = \frac{3}{2}$.. Оно не имеет решений, поскольку $-1 \le sin\,x \le 1$.

Второй корень даёт простейшее уравнение $sinx = 1$. Решаем его: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. Это и есть ответ.

2. Решить уравнение

$$3+cos\,2x+3\sqrt{2}cox\,x=0.$$

Здесь нужно применить формулу косинуса двойного угла. Какую именно? Судя по уравнению – ясно, что ту, которая с косинусом!

$$3+2cos^2x-1+3\sqrt{2}cos\,x=0$$
$$2cos^2x+3\sqrt{2}cos\,x+2=0.$$

Теперь замена $t=cos\,x$ и... дальше вы знаете.

3. Бывает, что оба рассмотренных выше метода нужно комбинировать. Например:

$$2cos\,2x-3cos^2x-2sin\,x=0.$$

Здесь всё подчиняется синусу. Именно через него выражаем косинус двойного угла, а cos^2x выражаем из основного тригонометрического тождества:

$$2\left(1-2sin^2x\right)-3\left(1-sin^2x\right)-2sin\,x=0.$$

Дальше понятно.

Разложение на множители

Очень хорошо, если уравнение удаётся представить в таком виде, что в левой части стоит произведение двух или нескольких множителей, а в правой части – ноль. Произведение двух или нескольких множителей равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из них равен нулю. Сложное уравнение, таким образом, распадается в совокупность более простых.

1. Начнём с уравнения

$$sin\,2x = cos\,x.$$

Применяем формулу синуса двойного угла:

$$2sin\,x\,cos\,x = cos\,x$$

Ни в коем случае не сокращайте на косинус! Ведь может случиться, что cos *x* обратится в нуль, и мы потеряем целую серию решений. Переносим всё в одну часть, и общий множитель – за скобки:

$$2sin\,x\,cos\,x - cos\,x = 0$$
$$cos\,x\,(2sin\,x - 1) = 0.$$

Полученное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $cos\,x = 0$ и $2sin\,x - 1 = 0.$
Решаем каждое из них и берём объединение множества решений.

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

2. Рассмотрим уравнение

$$\sin 3x + \sin 7x = 2\sin 5x.$$

Применим формулу суммы синусов:

$$2\sin 5x \cos 2x = 2\sin 5x.$$

Дальше действуем так же, как и в предыдущей задаче:

$$2\sin 5x \cos 2x - 2\sin 5x = 0$$
$$2\sin 5x\,(\cos 2x - 1) = 0.$$

Решаем уравнение $\sin 5x = 0$:

$$x = \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Решаем уравнение $\cos 2x - 1 = 0$:

$$x = \pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

Ну что, перечисляем обе серии (1) и (2) в ответе через запятую? Нет! Серия (2) является в данном случае частью серии (1). Действительно, если в формуле (1) число n кратно 5, то мы получаем все решения серии (2).

Поэтому ответ: $x = \dfrac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}.$

3. Бывает, что перед разложением суммы или разности тригонометрических функций в произведение надо проделать обратную процедуру: превратить произведение в сумму (разность).

Решим уравнение:

$$sin\,2x\,sin\,6x = cos\,x\,cos\,3x.$$

Домножаем обе части на 2, преобразуем левую часть в разность косинусов, а правую часть – в сумму косинусов:

$$2sin\,2x\,sin\,6x = 2\,cos\,x\,cos\,3x$$
$$cos\,4x - cos\,8x = cos\,2x + cos\,4x$$
$$cos\,2x + cos\,8x = 0$$
$$2cos\,5x\,cos\,3x = 0.$$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi n}{5}$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

4. Ещё пример, где финальное разложение на множители поначалу замаскировано:

$$sin^2 2x + sin^2 3x = 1.$$

Здесь используем формулу понижения степени:

$$sin^2\,\alpha = \frac{1 - cos\,2\alpha}{2}$$

(которая является ни чем иным, как переписанной в другом виде формулой косинуса двойного угла). Получаем:

$$\frac{1 - cos\,4x}{2} + \frac{1 - cos\,6x}{2} = 1$$
$$cos\,4x + cos\,6x = 0$$

и дальше ясно.

5. Многие оказываются в ступоре при виде следующего уравнения:

$$\sin 3x = \cos 5x.$$

Переносим косинус влево и применяем формулу приведения $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$:

$$\sin 3x - \cos 5x = 0$$

$$\sin 3x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 5x\right) = 0.$$

Дальше – дело техники.

6. А в этом примере нужны совсем другие манипуляции:

$$\sin 2x - \cos x + 2\sin x = 1.$$

Раскладываем синус двойного угла, всё собираем в левой части и группируем:

$$2\sin x\cos x - \cos x + 2\sin x - 1 = 0$$

$$\cos x\left(2\sin x - 1\right) + \left(2\sin x - 1\right) = 0$$

$$\left(2\sin x - 1\right)\left(\cos x + 1\right) = 0.$$

Цель достигнута.

Однородные уравнения

Рассмотрим уравнение:

$$sin^2 x + 2sin\, x\, cos\, x - 3cos^2 x = 0.$$

Степень каждого слагаемого в левой части равна двум. Точно так же, как в обычном многочлене

$$a^2 + 2ab - 3b^2$$

степень каждого слагаемого равна двум (степень одночлена – это сумма степеней входящих в него сомножителей). Поскольку степени всех слагаемых одинаковы, такое уравнение называют *однородным*. Для однородных уравнений существует стандартный приём решения – деление обеих его частей на $cos^2 x$. Возможность этого деления, однако, должна быть обоснована: а что, если косинус равен нулю?

Следующий абзац предлагаем выучить наизусть и всегда прописывать его при решении однородных уравнений.

Предположим, что $cos\, x = 0$. *Тогда в силу уравнения и* $sin\, x = 0$, *что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Следовательно, любое решение данного уравнения удовлетворяет условию* $cos\, x \neq 0$, *и мы можем поделить обе его части на* $cos^2 x$.

В результате деления приходим к равносильному квадратному уравнению относительно тангенса:

$$tg^2 x + 2tg\, x - 3 = 0$$

и дальнейший ход решения трудностей не представляет

1. Рассмотрим уравнение

$$10sin^2x + 5sin\,x\,cos\,x + cos^2x = 3.$$

Если бы в правой части стоял нуль, уравнение было бы однородным. Мы поправим ситуацию изящным приёмом: заменим число 3 на выражение $3\left(sin^2x + cos^2x\right)$:

$$10sin^2x + 5sin\,x\,cos\,x + cos^2x = 3\left(sin^2x + cos^2x\right)$$

$$7sin^2x + 5sin\,x\,cos\,x - 2cos^2x = 0$$

и дело сделано.

2. Неожиданным образом сводится к однородному следующее уравнение:

$$3cos\,x + 2sin\,x = 1.$$

Казалось бы, где тут однородность? Переходим к половинному углу!

$$3\left(cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2}\right) + 4sin\,\frac{x}{2}\,cos\,\frac{x}{2} = cos^2\frac{x}{2} + sin^2\frac{x}{2}$$

$$4sin^2\frac{x}{2} - 4sin\,\frac{x}{2}\,cos\,\frac{x}{2} - 2cos^2\frac{x}{2} = 0$$

$$2tg^2\frac{x}{2} - 2tg\,\frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$tg\,\frac{x}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

откуда

$$x = 2arctg\,\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}. \qquad (3)$$

Введение дополнительного угла

Этот метод применяется для уравнений вида $a\,cos\,x + b\,sin\,x = c$. Он присутствует в школьных учебниках. Правда, в них рассматриваются только частные случаи – когда числа a и b являются значениями синуса и косинуса углов в 30°, 45° или 60°.

1. Рассмотрим уравнение

$$\sqrt{3} sin\,x + cos\,x = 2.$$

Делим обе части на 2:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} sin\,x + \frac{1}{2} cos\,x = 1.$$

Замечаем, что $\frac{\sqrt{3}}{2} = cos\,\frac{\pi}{6}, \frac{1}{2} = sin\,\frac{\pi}{6}$:

$$cos\,\frac{\pi}{6}\,sin\,x + sin\,\frac{\pi}{6}\,cos\,x = 1.$$

В левой части получили синус суммы:

$sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1,$

откуда $x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

2. Другой пример:

$$\cos x + \sin x = 1.$$

Делим обе части на $\sqrt{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Сделаем теперь для разнообразия в левой части косинус разности:

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos x + \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ x_2 = 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}.$$

4. Рассмотрим уравнение

$$\sin 2x \sin 5x = 1.$$

Ясно, что данное равенство может выполняться лишь в двух случаях: когда оба синуса одновременно равны 1 или −1. Действуя так, мы должны были бы поочерёдно рассмотреть две системы уравнений.

Лучше поступить по-другому: умножим обе части на 2 и преобразуем левую часть в разность косинусов:

$$2\sin 2x \sin 5x = 2$$
$$\cos 3x - \cos 7x = 2.$$

Тем самым мы сокращаем работу вдвое, получая лишь одну систему:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1, \\ \cos 7x = -1. \end{cases}$$

Имеем:

$$\begin{cases} 3x = 2\pi n \\ 7x = \pi + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi n}{3}, \\ x = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7} \end{cases}, n, k \in \mathbb{Z}.$$

Ищем пересечение:

$$\frac{2\pi n}{3} = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi k}{7}.$$

Умножаем на 21 и сокращаем на π:

$$14n = 3 + 6k.$$

Данное равенство невозможно, так как в левой части стоит чётное число, а в правой — нечётное.

Ответ: решений нет.