# Решение квадратных неравенств с параметрами

Учитель математики
МАОУ лицей №3 города Кропоткин Краснодарского края Зозуля Елена Алексеевна

- Цели:
формировать умения решать квадратные неравенства;
развивать логическое мышление, умение работать в проблемной ситуации;
активизировать познавательную и творческую деятельность.

# Задание 1

При каких значениях $a$ неравенство

$$ax^2+2ax+2x+2a+2\leq 0$$

выполняется при любых значениях $x$?

# Решение:

а)неравенство выполняется при любых значениях ***x***, если $\begin{cases} a < 0 \\ D \le 0 \end{cases}$

$ax^2+x\cdot(2a+2)+2a+2\le 0$

$D = (2a)^2-4a\cdot(2a+2)=4a^2+8a+4-8a^2-8a=4-4a=4\cdot(1-a^2)=4\cdot(1-a)\cdot(1+a)$

$$\begin{cases} a < 0 \\ 4(1-a)(1+a) \le 0 \end{cases}$$

Итак, при а ≤-1, уравнение имеет корни при любых значениях ***x***

Ответ: при $a \le -1$

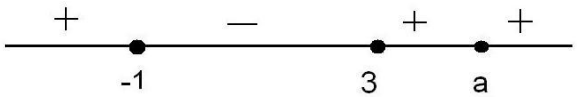
# Задание 2

а)При каких значениях ***a*** решением неравенства $(x-a)^2(x-3)(x+1) \leq 0$ является сплошной промежуток?

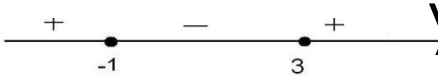
б) При каких значениях ***a*** неравенство $\frac{x-2a-1}{x-a} < 0$ выполняется при всех значениях ***x*** из отрезка $[1;2]$

# Решение а):

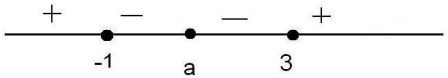
а)рассмотрим «плавающую» точку ***а*** на отрезке прямой относительно точек -1 и 3

1) a<3 

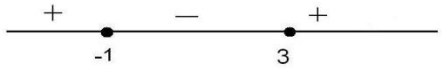
$x \in [-1;3] \cup \{a\}$ не удв.услов.

2) a=3 

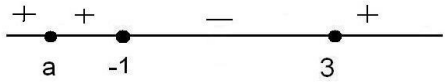
удв.услов. $x \in [-1;3]$

3) -1<a<3 

удв.услов. $x \in [-1;3]$

4) a= -1 

$x \in [-1;3]$ удв.услов.

5) a< -1 

$x \in [-1;3] \cup \{a\}$ не удв.услов.

Ответ: при -1≤a≤3

# Решение б):

$$\frac{x-2a-1}{x-a}<0 \qquad \frac{x-(2a+1)}{x-a}<0$$

$$x\in[1;2]$$

1) при а >0 $\begin{cases} a>0 \\ a<1 \\ 2a+1>2 \end{cases}$ $\begin{cases} a>0 \\ a<1 \\ a>\frac{1}{2} \end{cases}$

$\frac{1}{2}$<a<1

2)при а<0 нет решений

Ответ: при $a\in\left(\frac{1}{2};1\right)$

# Задание 3

Найти все ***a***, при которых неравенство

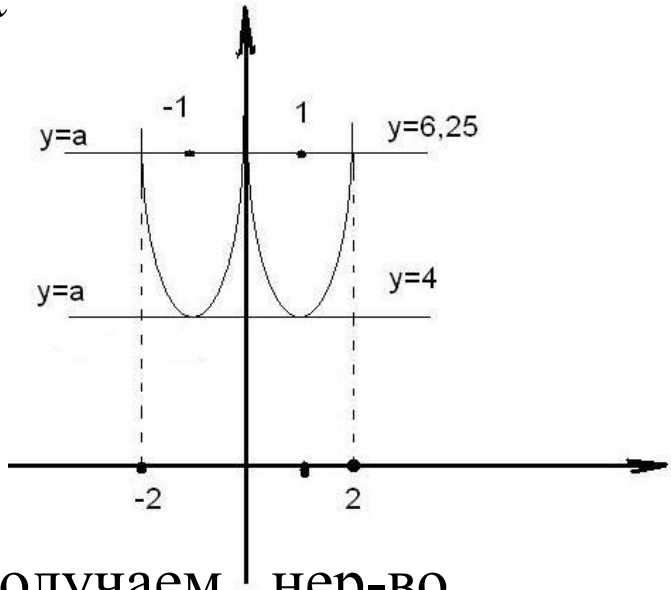
$$x^2 + \frac{1}{x^2} - a + 2 \le 0$$

имеет не менее трех целых решений.

# Решение:

$$x^2+\frac{1}{x^2}-a+2\le 0 \qquad x^2+2+\frac{1}{x^2}\le a \qquad (x+\frac{1}{x})^2\le a$$

$$y=(x+\frac{1}{x})^2 \qquad y=a$$

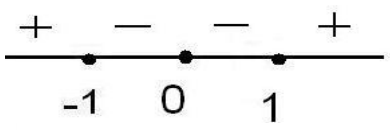



Рассмотрим две функции

и выполним рисунок:

При ***a=4*** нер-во примет вид $(x+\frac{1}{x})^2-4\le 0$

$$\frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2}\le 0$$




при ***x=±2*** получаем нер-во $(2+\frac{1}{2})^2\le a \qquad a\ge 6,25$

Всего 2 целых решения(не удв.усл.) получается 4 целых корня: 2;1;1;2

При всех $a\ge 6,25$ , тоже 4 корня, т.е. больше 3

Ответ: $a\in[6,25;+\infty)$

# Задание 4

Найти все ***a***, при которых неравенство

$$4x^2 + \frac{4}{x^2} - 5a - 8 \le 0$$

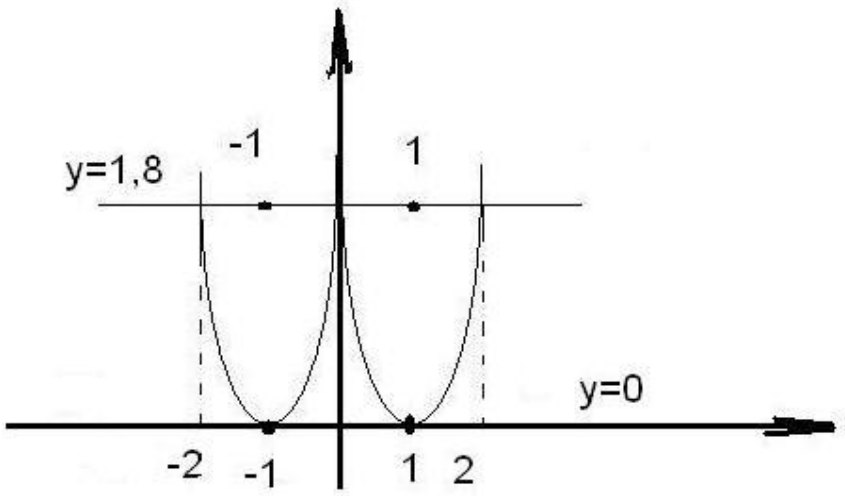
имеет ровно два целых решения.

# Решение:

$4x^2+\frac{4}{x^2}-5a-8\le 0$ $\quad 4(x^2-2+\frac{1}{x^2})-5a\le 0$ $\quad (x+\frac{1}{x})^2\le\frac{5}{4}a$

Рассмотрим две функции и выполним рисунок:

$y=(x-\frac{1}{x})^2$ $\quad y=\frac{5}{4}a$




При о≤***a<1,8*** нер-во имеет ровно 2 целых решения

при ***x=±2*** нер-во имеет 4 целых решения, значит при ***x>2*** найдем все ***a***

$(2+\frac{1}{2})^2=\frac{5}{4}a$ $\quad \frac{9}{4}=\frac{5}{4}a$ $\quad a=1{,}8$

Ответ:

$a\in[0;1{,}8)$

$a^2$

# Задание на дом

Найдите все значения x, для каждого из которых неравенство

$(2-x)a^2+(x^2-2x+3)a-3x\geq 0$

выполняется для любого значения a, принадлежащего промежутку [-3;0].

- Ответ: -1