

Решение квадратных неравенств с параметрами

Учитель математики
МАОУ лицей №3 города
Кропоткин Краснодарского
края Зозуля Елена
Алексеевна



Цели:

формировать умения решать
квадратные неравенства;

развивать логическое мышление,
умение работать в проблемной
ситуации;

активизировать познавательную и
творческую деятельность.

Задание 1

При каких значениях a неравенство
 $ax^2+2ax+2x+2a+2\leq 0$
выполняется при любых значениях x ?

Решение:

а) неравенство выполняется при любых значениях x ,

$$\text{если } \begin{cases} a < 0 \\ D \leq 0 \end{cases}$$

$$ax^2 + x \cdot (2a+2) + 2a+2 \leq 0$$

$$D = (2a)^2 - 4a \cdot (2a+2) = 4a^2 + 8a + 4 - 8a^2 - 8a = 4 - 4a = 4 \cdot (1-a^2) = 4 \cdot (1-a) \cdot (1+a)$$

$$\begin{cases} a < 0 \\ 4(1-a)(1+a) \leq 0 \end{cases}$$

Итак, при $a \leq -1$, уравнение имеет корни при любых значениях x

Ответ: при $a \leq -1$


Задание 2

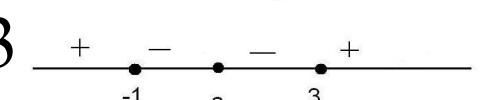
- а) При каких значениях a решением неравенства $(x-a)^2(x-3)(x+1) \leq 0$ является сплошной промежуток?
- б) При каких значениях a неравенство
$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0$$
 выполняется при всех значениях x из отрезка $[1; 2]$

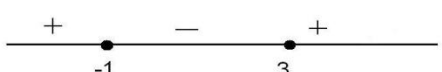
Решение а):

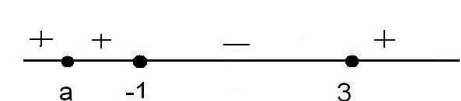
а) рассмотрим «плавающую» точку a на отрезке прямой относительно точек -1 и 3

1) $a < 3$  $x \in [-1; 3] \cup \{a\}$ не удв.услов.

2) $a = 3$  удв.услов. $[1; 3]$

3) $-1 < a < 3$  удв.услов. $[1; 3]$

4) $a = -1$  $x \in [-1; 3]$ удв.услов.

5) $a < -1$  $x \in [-1; 3] \cup \{a\}$ не удв.услов.

Ответ: при $-1 \leq a \leq 3$

Решение б):

$$\frac{x - 2a - 1}{x - a} < 0 \quad \frac{x - (2a + 1)}{x - a} < 0$$

$$x \in [1; 2]$$

$$1) \text{ при } a > 0 \quad \begin{cases} a > 0 \\ a < 1 \\ 2a + 1 > 2 \end{cases} \quad \begin{cases} a > 0 \\ a < 1 \\ a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} < a < 1$$

2) при $a < 0$ нет решений

Ответ: при $a \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

Задание 3

Найти все a , при которых неравенство

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - a + 2 \leq 0$$

имеет не менее трех целых решений.

Решение:

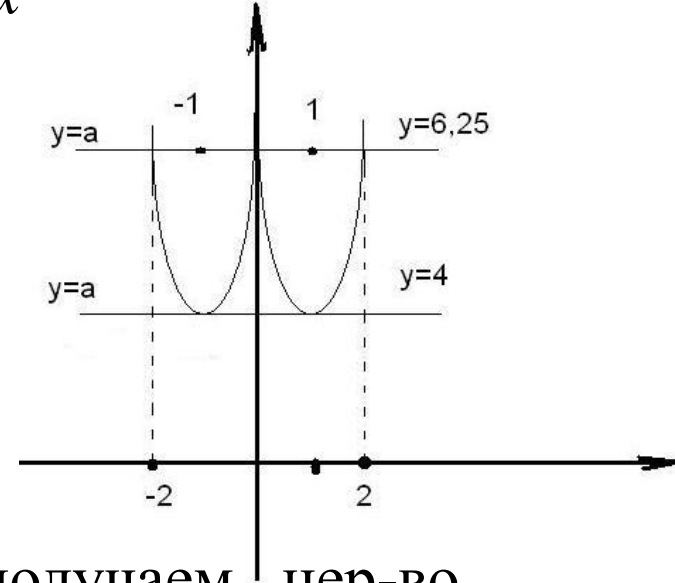
$$x^2 + \frac{1}{x^2} - a + 2 \leq 0$$

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} \leq a$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \leq a$$

$$y = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$y = a$$



Рассмотрим две функции и выполним рисунок:

При $a=4$ нер-во примет вид

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4 \leq 0 \quad \frac{(x-1)(x+1)^2}{x^2} \leq 0$$

+ - - +

-1 0 1

при $x=\pm 2$ получаем нер-во

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 \leq a \quad a \geq 6,25$$

Всего 2 целых решения(не удв.усл.) получается 4 целых корня: 2;1;1;2

При всех $a \geq 6,25$, тоже 4 корня, т.е. больше 3

Ответ: $a \in [6,25; +\infty)$

Задание 4

Найти все a , при которых неравенство

$$4x^2 + \frac{4}{x^2} - 5a - 8 \leq 0$$

имеет ровно два целых решения.

Решение:

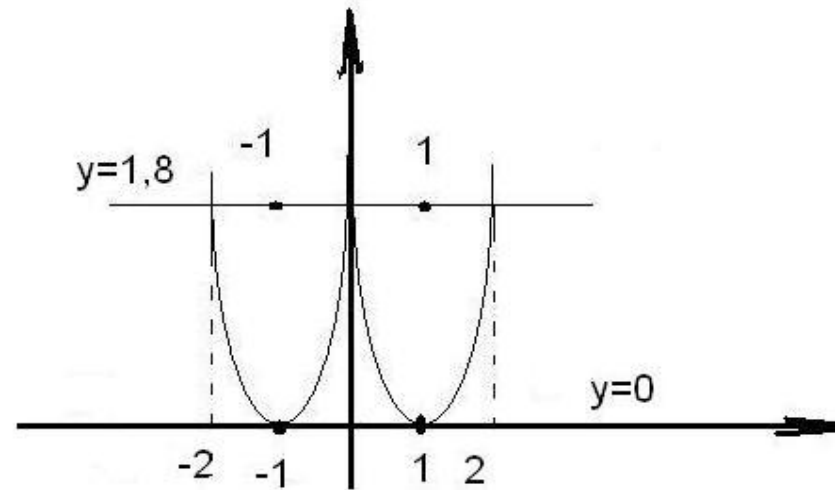
$$4x^2 + \frac{4}{x^2} - 5a - 8 \leq 0$$

$$4\left(x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5a \leq 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 \leq \frac{5}{4}a$$

Рассмотрим две функции и выполним рисунок:

$$y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \quad y = \frac{5}{4}a$$



При $0 \leq a < 1,8$ нер-во имеет ровно 2 целых решения

при $x = \pm 2$ нер-во имеет 4 целых решения, значит при $x > 2$ найдем все a

$$\left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}a$$

$$\frac{9}{4} = \frac{5}{4}a$$

$$a = 1,8$$

Ответ:

$$a \in [0; 1,8)$$

Задание на дом

Найдите все значения x , для каждого из которых неравенство

$$(2-x)a^2 + (x^2 - 2x + 3)a - 3x \geq 0$$

выполняется для любого значения a , принадлежащего промежутку $[-3; 0]$.

● Ответ: -1