

Упрощение логических выражений

ПРОВЕРКА ДОМАШНЕГО ЗАДАНИЯ

- (выберете правильный ответ)

1. Чем является предложение «Дети любят игрушки» с точки зрения алгебры логики?

Объектом

Неправильно

Логической переменной

Неправильно

Высказыванием

Правильно

Математическим соотношением

Неправильно

- (выберете правильный ответ)
- 2. Инверсия – это?

Логическое отрицание

Логическая переменная

Логическое сложение

Логическое умножение

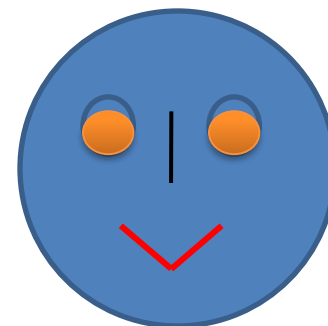
Правильно

Неправильно

Неправильно

Неправильно

- (выберете правильный ответ)
- 3. Логическое сложение – это?



Инверсия

Импликация

Конъюнкция

Дизъюнкция

Неправильно

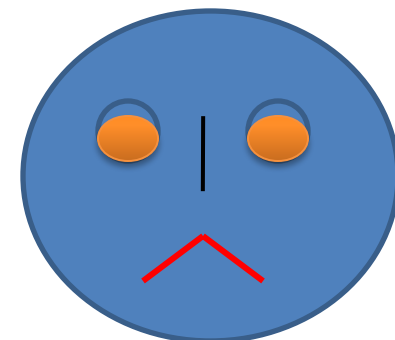
Неправильно

Неправильно

Правильно



- (выберете правильный ответ)
- 4. Логическое умножение?



Конъюнкция

Эквивалентность

Импликация

Дизъюнкция

Правильно

Неправильно

Неправильно

Неправильно



- (выберете правильный ответ)
- 5. Логическое следование (Импликация) обозначается словами или знаком?

В тогда и только тогда, когда А \iff

Если А, то В \implies

Или +

И &

Неправильно

Правильно

Неправильно

Неправильно

- (выберете правильный ответ)
- 6. Операция обозначенная словами В ТОГДА И ТОЛЬКО ТОГДА, КОГДА А называется?

Импликация

Инверсия

Эквивалентность

Логическое умножение

Неправильно

Неправильно

Правильно

Неправильно

7. Один зажиточный человек боялся грабителей и заказал замок, который открывался двумя ключами одновременно. С какой логической операцией можно сравнить процесс открывания? Объясните ответ.

Инверсия

Неправильно

Дизъюнкция

Неправильно

Конъюнкция

Правильно

Логическое умножение, т.к. каждый ключ в отдельности не открывает замок. Только использование двух ключей вместе позволяет его открыть

8. Мальчик Вася был рассеянным и всегда терял ключи. Только поставят родители новый замок, как находилась старый ключ (под ковриком, в портфеле, в кармане). Придумайте «суперзамок» для Васи, чтобы дверь не мог открыть посторонний человек, а Вася наверняка ? Объясните ответ.

Инверсия

Неправильно

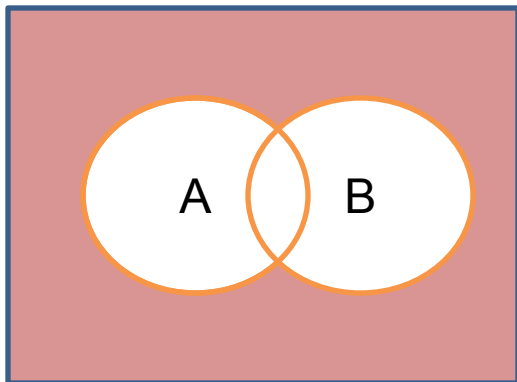
Дизъюнкция

Правильно

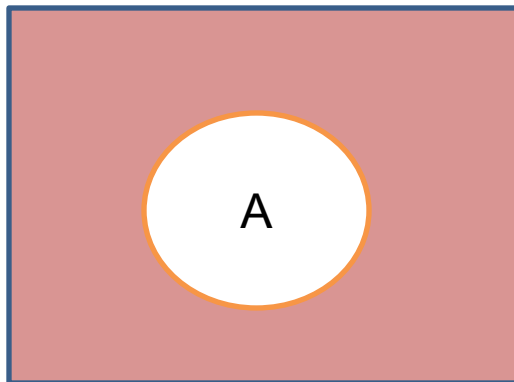
Конъюнкция

Неправильно

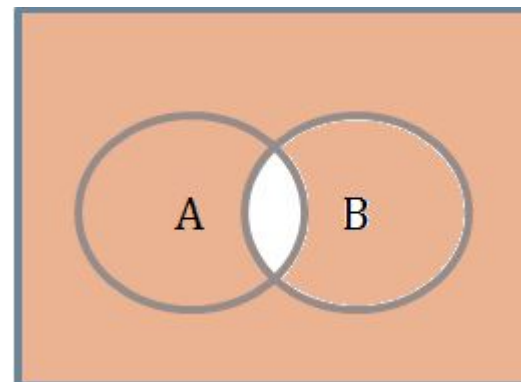
Замок с логическим сложением, чтобы он открывался хотя бы одним оказавшимся под рукой ключом.



1



2



3

Сопоставъте операции

1

- инверсия
- дизъюнкция
- конъюнкция

- Неправильно
- Правильно
- Неправильно

2

- инверсия
- дизъюнкция
- конъюнкция

- Правильно
- Неправильно
- Неправильно

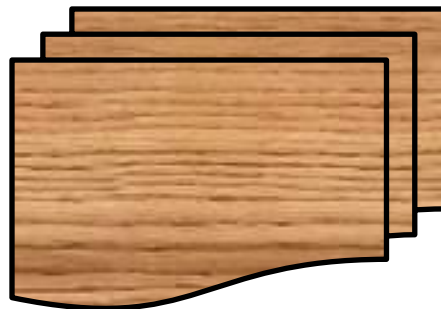
3

- инверсия
- дизъюнкция
- конъюнкция

- Неправильно
- Неправильно
- Правильно

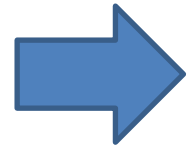
Расставить в правильном порядке выполнение логических операций:

1. **Инверсия**
2. **Дизъюнкция**
3. **Конъюнкция**
4. **Импликация**
5. **Эквивалентность**
6. **Операция в скобках**



Основные законы

- Действия с абсолютно-истинными и абсолютно-ложными высказываниями
- Коммутативность
- Ассоциативность
- Дистрибутивность
- Идемпотентность
- Инволюция
- Поглощение
- Поглощение отрицания
- Законы де Моргана
- Закон исключения
- Закон контрапозиции



Коммутативность
(независимость от
перестановки мест)

$$A \vee B = B \vee A$$

$$A \wedge B = B \wedge A$$



Ассоциативность

(независимость от порядка

выполнения однотипных

действий)

$$(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$



Дистрибутивность

(распределительный закон)

- Относительно логического умножения

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

Относительно логического сложения

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$



Идемпотентность

(отсутствие степеней и коэффициентов)

$$A \vee A = A$$

$$A \wedge A = A$$



Инволюция

(двойное отрицание)

$$\neg(\neg A) = A$$



Действия с абсолютно-истинными и абсолютно-ложными высказываниями

- Закон исключенного третьего

$$A \vee \neg A = 1$$

- Закон противоречия

$$A \wedge \neg A = 0$$



Законы де Моргана

- Отрицание одновременной истинности

$$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$$

- Отрицание вариантов

$$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$$



Поглощение

$$A \vee (A \wedge B) = A$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$



Поглощение отрицания

$$A \vee \neg A \wedge B = A \vee B$$

$$A \wedge (\neg A \vee B) = A \wedge B$$



Закон исключения (склеивания)

$$(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B) = B$$

$$(A \vee B) \wedge (\neg A \vee B) = B$$



Закон контрапозиции

$$\neg(A \rightarrow B) = A \wedge \neg B$$

$$\neg(A \rightarrow B) = \neg A \cdot \neg B \quad A \rightarrow B =$$
$$\neg A + B$$



Законы алгебры логики

название	для И	для ИЛИ
двойного отрицания	$\overline{\overline{A}} = A$	
исключения третьего	$A \cdot \overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
операции с константами	$A \cdot 0 = 0, A \cdot 1 = A$	$A + 0 = A, A + 1 = 1$
повторения	$A \cdot A = A$	$A + A = A$
поглощения	$A \cdot (A + B) = A$	$A + A \cdot B = A$
переместительный	$A \cdot B = B \cdot A$	$A + B = B + A$
сочетательный	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
распределительный	$A + B \cdot C = (A + B) \cdot (A + C)$	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
законы де Моргана	$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$
Закон контрапозиции	$\neg(A \rightarrow B) = \neg A \cdot \neg B$	$A \rightarrow B = \neg A + B$



Упрощение логических выражений

Шаг 1. Заменить операции \rightarrow и \leftrightarrow на их выражения через **И**, **ИЛИ** и **НЕ**:

$$A \rightarrow B = \bar{A} + B$$

$$A \leftrightarrow B = A \cdot B + \bar{A} \cdot \bar{B}$$

Шаг 2. Раскрыть инверсию сложных выражений по формулам де Моргана:

Шаг 3. Используя законы логики, упрощать выражение, стараясь применять закон исключения третьего.

Упрощение логических выражений

$$Q = M \cdot X \cdot \bar{H} + \bar{M} \cdot X \cdot \bar{H} = (M + \bar{M}) \cdot X \cdot \bar{H} = X \cdot \bar{H}$$

$$X = (B \rightarrow A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (A \rightarrow C)$$

раскрыли \rightarrow

$$= (\bar{B} + A) \cdot \overline{(A + B)} \cdot (\bar{A} + C)$$

формула де Моргана



$$= (\bar{B} + A) \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

распределительный

$$= (\bar{B} \cdot \bar{A} + A \cdot \bar{A}) \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

исключения третьего

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot (\bar{A} + C)$$

повторения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A} \cdot (\bar{A} + C)$$

поглощения

$$= \bar{B} \cdot \bar{A}$$

Задачи (упрощение):

$$X \cdot Y \vee X \cdot \bar{Y}$$

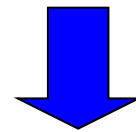
Воспользуемся распределительным законом:

$$A \cdot (B \vee C) = A \cdot B \vee A \cdot C$$

(или вынесем общий множитель за скобку)

$$\underline{X} \cdot Y \vee \underline{X} \cdot \bar{Y} =$$

$$X \cdot (Y \vee \bar{Y}) =$$



1

$$= X \cdot 1 = X$$

Задачи (упрощение)

Какое логическое выражение равносильно выражению

$A \wedge \neg(\neg B \vee C)$?

1) $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

2) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$

3) $A \wedge B \wedge \neg C$

4) $A \wedge \neg B \wedge C$

1) $\overline{A + B + C}$

2) $A \cdot \overline{B} \cdot \overline{C}$

3) $A \cdot B \cdot \overline{C}$

4) $A \cdot \overline{B} \cdot C$



$$A \cdot \overline{(\overline{B} + C)} = A \cdot \overline{\overline{B}} \cdot \overline{C} = A \cdot B \cdot \overline{C}$$

Примеры

$$(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \vee B)$$

$$\neg(\neg A \wedge B)$$

$$\neg(\neg A \wedge B) \wedge \neg(\neg A \wedge C)$$

$$\neg(A \vee \neg B)$$

