Методы решения СЛДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x \in R^n, u \in R^l,$$

$$\text{СЛОДУ} \quad \dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(t_0) = x_0.$$

Фундаментальная матрица

Рассмотрим n независимых векторов в качестве н. усл. $x_0^{(i)} = \begin{pmatrix} x_{10}^{(i)} \\ x_{20}^{(i)} \\ \vdots \\ x_{n0}^{(i)} \end{pmatrix}, i = 1, \ldots, n.$

$$x^{(i)}(t), \quad t \in [t_0, T], i = 1, \ldots n, \qquad \dot{x}^{(i)}(t) = Ax^{(i)}(t), \quad x^{(i)}(t_0) = x_0^{(i)}.$$

$X(t) = \left(x^{(1)}(t) \,|\, x^{(2)}(t) \,|\, \ldots \,|\, x^{(n)}(t)\right).$ - фундаментальная матрица

$$\dot{X}(t) = AX(t), \quad X(t_0) = \left(x_0^{(1)} \,|\, x_0^{(2)} \,|\, \ldots \,|\, x_0^{(n)}\right)$$

Теорема: если существует $t_* \in [t_0, T]$ $\det(X(t_*)) \neq 0$

то для любого момента $t \in [t_0, T]$ $\det(X(t)) \neq 0$

$X(t)$ - невырожденная матрица

$\Phi(t, t_0) = X(t)X^{-1}(t_0),$ - переходная матрица

Свойства переходной матрицы

1 $\Phi(t_0, t_0) = I.$

2 $\det(\Phi(t, t_0)) \neq 0.$

3 $\dfrac{d\Phi(t, t_0)}{dt} = A\Phi(t, t_0).$

4 $\Phi^{-1}(t, t_0) = \Phi(t_0, t)$

Вычисление переходной матрицы

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d\Phi(\tau, t_0)}{d\tau} \cdot d\tau = \int_{t_0}^{t} A\Phi(\tau, t_0) d\tau$$

$$\Phi(t, t_0) = e^{A(t - t_0)}$$

Численное решение СЛОДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t),$$
$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, t \in [t_0, T]$$

$$x(t) = e^{A(t - t_0)} x_0$$

Алгоритм численного решения СЛОДУ

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \ldots, N$$

$$x(t_{i+1}) = e^{Ah} x(t_i).$$

$$\Phi = I + \sum_{i=1}^{N} \frac{A_1^i}{i!}, \ A_1 = Ah$$

Ряд сходится для любого h!

Численное решение СЛНДУ

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x \in R^n, u \in R^l$$

u – известно для каждого момента времени

$$z(t) = \Phi(t_0, t)x(t)$$

$$\frac{dz}{dt} = e^{At_0} e^{-At} Bu(t).$$

$$z(t) - z(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{A(t_0 - \tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Решение: $$\boxed{x(t) = e^{A(t - t_0)} x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.}$$

Алгоритм численного решения СЛНДУ

$$t_i = t_0 + ih, \quad i = 0, \ldots, N$$

$$u(\tau) = u(t_i) = const, \quad \tau \in [t_i, t_i + h],$$

$$x(t_1) = e^{Ah} x(t_0) + \int_{t_0}^{t_0 + h} e^{A(t_0 + h - \tau)} Bu(t_0) d\tau$$

$$x(t_{i+1}) = Px(t_i) + Qu(t_i), \quad i = 0, 1, \ldots, N.$$

$$\Psi = \int_0^h e^{As} ds = \int_0^h \left(I + \frac{As}{1!} + \frac{(As)^2}{2!} + \ldots + \frac{(As)^n}{n!} + \ldots \right) ds =$$

$$= h + \frac{Ah^2}{2!} + \ldots + \frac{A^n h^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots .$$

$$P = I + \Psi A,$$

$$Q = \Psi B.$$

[ad,bd]=c2d(a,b,h)

Преобразование линейных моделей

Пространство состояния:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0,$$
$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad x \in R^n, u \in R^l, y \in R^m,$$

«Вход-выход»

$$y^{(n)}(t) + \alpha_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_1 y^{(1)}(t) + \alpha_0 y(t) =$$
$$= \beta_n u^{(n)}(t) + \beta_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \dots + \beta_1 u^{(1)}(t) + \beta_0 u(t),$$

Операторная форма

$$p = d/dt \qquad \alpha(p) y(t) = \beta(p) u(t)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \begin{pmatrix} w_{11}(p) & \cdots & w_{1l}(p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{m1}(p) & \cdots & w_{ml}(p) \end{pmatrix}.$$

Оператор Лапласа

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Следует различать оператор дифференцирования и оператор Лапласа!

Для линейных систем при нулевых начальных условиях $\quad s \equiv p$

Преобразование Лапласа:

$$x(s) = (Is - A)^{-1} Bu(s),$$
$$y(s) = \left(C(Is - A)^{-1} B + D\right) u(s),$$

Канонические формы ДС в пространстве состояний

$$y^{(n)}(t)+\alpha_{n-1}y^{(n-1)}(t)+\dots+\alpha_1 y^{(1)}(t)+\alpha_0 y(t)=$$
$$=\beta_n u^{(n)}(t)+\beta_{n-1}u^{(n-1)}(t)+\dots+\beta_1 u^{(1)}(t)+\beta_0 u(t),$$

$$p^n y+\alpha_{n-1}p^{n-1}y+\dots+\alpha_1 py+\alpha_0 y=\beta_n p^n u+\dots+\beta_1 pu+\beta_0 u,$$

Введем переменные:

$$x_n=y-\beta_n u,$$
$$x_{n-1}=\frac{1}{p}\left(-\alpha_{n-2}y+\beta_{n-2}u+\frac{1}{p}\left(\dots\left(-\alpha_0 y+\beta_0 u\right)\dots\right)\right)$$

$$A'=\begin{pmatrix}0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_0\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha_1\\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -\alpha_{n-2}\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -\alpha_{n-1}\end{pmatrix},\quad B'=\begin{pmatrix}\beta_0-\alpha_0\beta_n\\ \beta_1-\alpha_0\beta_n\\ \vdots\\ \beta_{n-2}-\alpha_0\beta_n\\ \beta_{n-1}-\alpha_0\beta_n\end{pmatrix},$$

$$C'=\begin{bmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\end{bmatrix},\quad D'=\beta_n u.$$

Многообразие ДС в пространстве состояния

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t).$$

Для произвольной невырожденной матрицы T $\quad x'=Tx$

$$T^{-1}\dot{x}'(t)=AT^{-1}x'(t)+Bu(t),$$

$$y(t)=CT^{-1}x'(t)+Du(t).$$