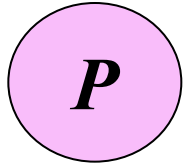


# Сходимость последовательности СВ

## Сходимость по вероятности

Последовательность СВ  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$   
сходится к  $X$  по вероятности



$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

Пример  $X_n \sim \text{Ber}(p_n), p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - 0| < \varepsilon) =$$

$X_n$	0	1
$P$	$1 - p_n$	$p_n$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(|0 - 0| < \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - p_n) = 1 \Rightarrow \underset{1}{X_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} 0$$

# Сходимость последовательности СВ

## Сходимость по распределению

Последовательность СВ

$$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$$

$d$

сходится к  $X$  по распределению

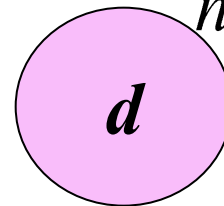
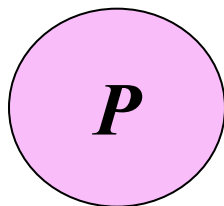
$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

в точках непрерывности  $F(x)$

Пример

$$X_n \sim \text{Bin}(n; p), \quad p \ll 1$$

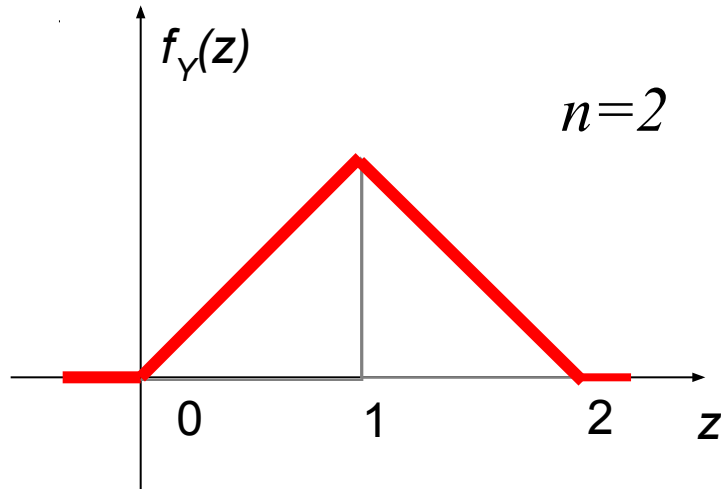
$$X = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n \sim P(a)$$



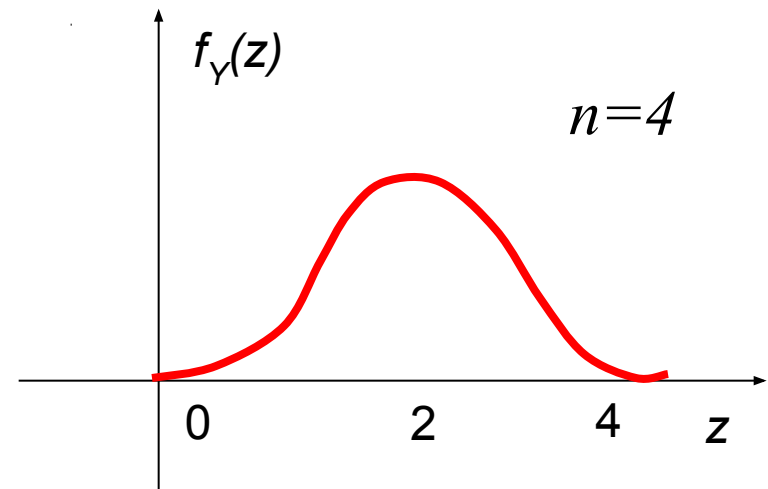
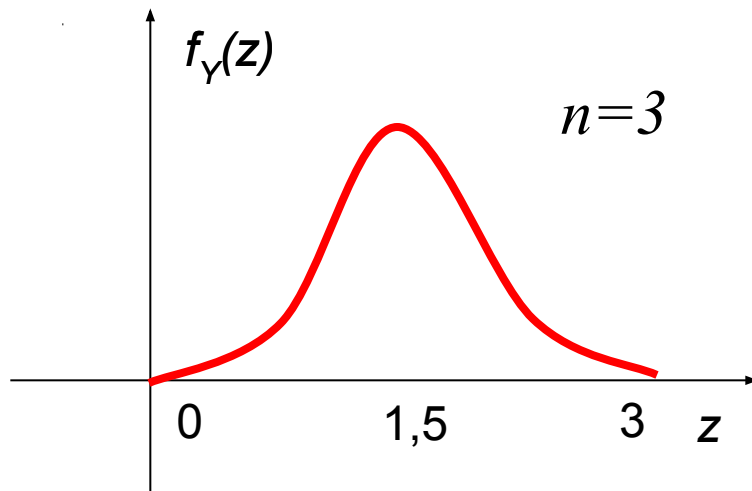
# Сходимость по распределению

суммы независимых с.в.

$$X_k \sim R(0, 1)$$



$$Y = \sum_{k=1}^n X_k$$

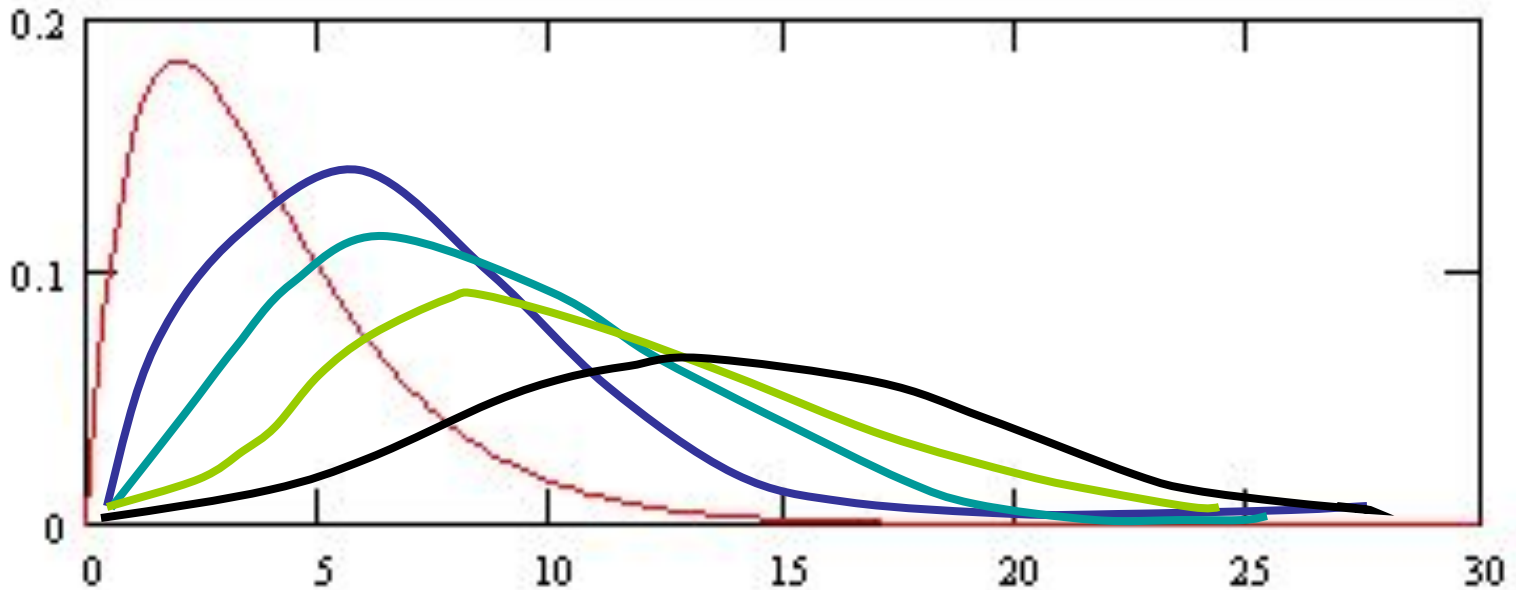


# Центральная предельная теорема

Последовательность СВ  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$   $d$

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} X \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x) \quad \text{в т. непр. } F(x)$$

Последовательность СВ **асимптотически нормальна**, если при ее ~~распределение~~ распределение неограниченно приближается к нормальному



# Центральная предельная теорема

Пусть СВ  $X_1, X_2, \dots, X_k, \dots$  независимы, одинаково распределены с м.о.  $m$  и с.к.о.  $\sigma < +\infty$

Тогда СВ  $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$  асимптотически нормальна

$$M(Y_n) = \sum_{k=1}^n M(X_k) = n \cdot m \quad D(Y_n) = \sum_{k=1}^n D(X_k) = n \cdot \sigma^2$$

$$\frac{Y_n - nm}{\sigma \sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

5

**Пример** При составлении статистического отчета складывают 300 чисел, округляя каждое до  $10^{-3}$ . В каких пределах с вероятностью 0,997 будет лежать суммарная ошибка?

Пусть  $\varepsilon_i$  -ошибка округления каждого слагаемого

$$\varepsilon_i \sim R\left(-0,5 \cdot 10^{-3}; 0,5 \cdot 10^{-3}\right) \quad M(\varepsilon_i) = 0 \quad \sigma(\varepsilon_i) = \frac{10^{-3}}{\sqrt{12}}$$

**ЦПТ**  $\Rightarrow Y_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \sim N\left(0; 0,5 \cdot 10^{-2}\right)$

«3 $\sigma$ »  $\Rightarrow 0,997 = P(|Y_n - 0| < 3\sigma_Y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow |Y_n| < 1,5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow Y_n = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \in (-0,015; 0,015)$$

# Теоремы Муавра-Лапласа

Пусть имеет место схема испытаний Бернулли и

$$\text{СВ } X_k \sim \text{Ver}(p)$$

Тогда СВ

$$Y_n = \sum_{k=1}^n X_k \sim \text{Bin}(n, p)$$

Так как  $X_k$  независимы и одинаково распределены с м.о.  $m = p$  и дисперсией  $\sigma^2 = pq$ ,

то по ЦПТ СВ  $Y_n$  асимптотически нормальна ,

$$m_Y = np$$

$$\sigma_Y^2 = npq$$

$$\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} N(0, 1)$$

# Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть имеет место схема испытаний Бернулли и СВ

$Y_n \sim \text{Bin}(n, p)$  Тогда при достаточно больших  $n$

$$P\left(\alpha \leq \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \leq \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$P(a \leq Y_n \leq b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right) \quad (1)$$

Условия  
применимости (1):

$$\begin{cases} np - 3\sqrt{npq} \geq 0 \\ np + 3\sqrt{npq} \leq n \end{cases} \quad (2)$$



**Пример** Известно, что левши составляют примерно 10% населения. Какова вероятность того, что среди 160 человек окажется от 10 до 20 левшей?

$$Y \sim \text{Bin}(160; 0,1) \quad M(Y) = np = 16, \quad D(Y) = npq = 14,4$$
$$\sigma(Y) = \sqrt{npq} \approx 3,8$$

$$\begin{cases} np - 3\sqrt{npq} = 16 - 3 \cdot 3,8 = 4,6 \geq 0 \\ np + 3\sqrt{npq} = 16 + 3 \cdot 3,8 = 27,4 \leq 160 \end{cases}$$

$$P(10 \leq Y \leq 20) = \Phi\left(\frac{20 - 16}{3,8}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 16}{3,8}\right) \approx$$

$$\approx \Phi(1,05) - \Phi(-1,58) \approx 0,34 + 0,45 = 0,79$$

# Локальная теорема Муавра-Лапласа

Пусть имеет место схема испытаний Бернулли и СВ  $Y_n \sim \text{Bin}(n, p)$  Тогда при достаточно больших  $n$

$$P(Y_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}} \quad (3)$$

Условия применимости (3):

$$\begin{cases} np - 3\sqrt{npq} \geq 0 \\ np + 3\sqrt{npq} \leq n \end{cases} \quad (2)$$

$$P(Y = 10) = \frac{1}{3,8} f\left(\frac{10-16}{3,8}\right) \approx \frac{1}{3,8} f_{10}(1,58) = \frac{0,11}{3,8}$$

# Применение теорем Муавра-Лапласа

$Bin(100, 0,5)$	$Bin(100, 0,05)$	$Bin(4, 0,5)$
$np = 50$ $\sqrt{npq} = 5$	$np = 5$ $\sqrt{npq} = 2,18$	$np = 2$ $\sqrt{npq} = 1$
$[35; 65]$	$[-1,54; 11,54]$	$[-1; 4]$

Условия  
применимости

$$\begin{cases} np - 3\sqrt{npq} \geq 0 \\ np + 3\sqrt{npq} \leq n \end{cases}$$