Сходимость последовательности СВ

Сходимость по вероятности

Последовательность СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

P

сходится к X по вероятности

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - X\right| < \varepsilon\right) = 1$$

<u>Пример</u> $X_n \sim Ber(p_n),\ p_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

X_n	0	1
P	1- p_n	p_n

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|X_n - 0\right| < \varepsilon\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} P\left(\left|0 - 0\right| < \varepsilon\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - p_n\right) = 1$$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0$$

1

Сходимость последовательности СВ

Сходимость по распределению

d

Последовательность СВ $X_1, X_2, ..., X_n, ...$

сходится к X по распределению

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

в точках непрерывности $F(x)$

<u>Пример</u> $X_n \sim Bin(n; p),\ p << 1$

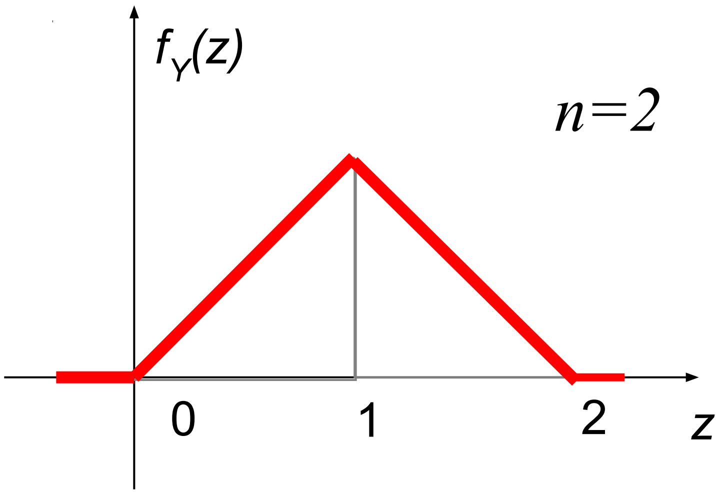
$$X = \lim_{n\to\infty} X_n \sim P(a)$$

$P \Longrightarrow d$

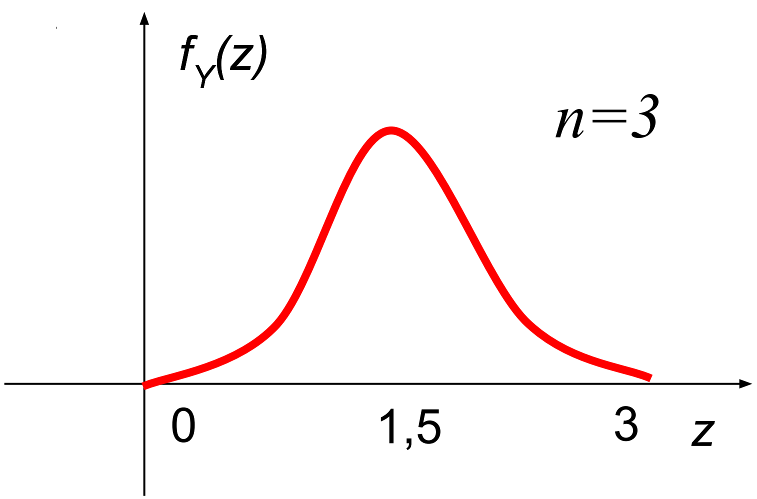
Сходимость по распределению

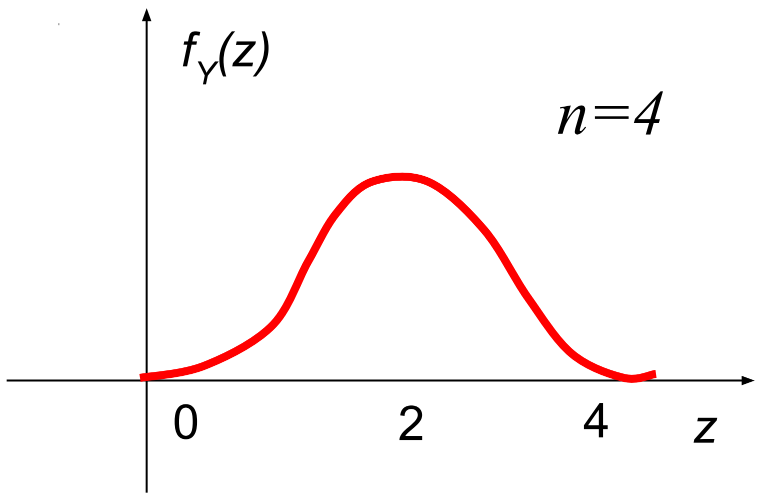
суммы независимых с.в.

$$X_k \sim R(0,1)$$



$$Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$$





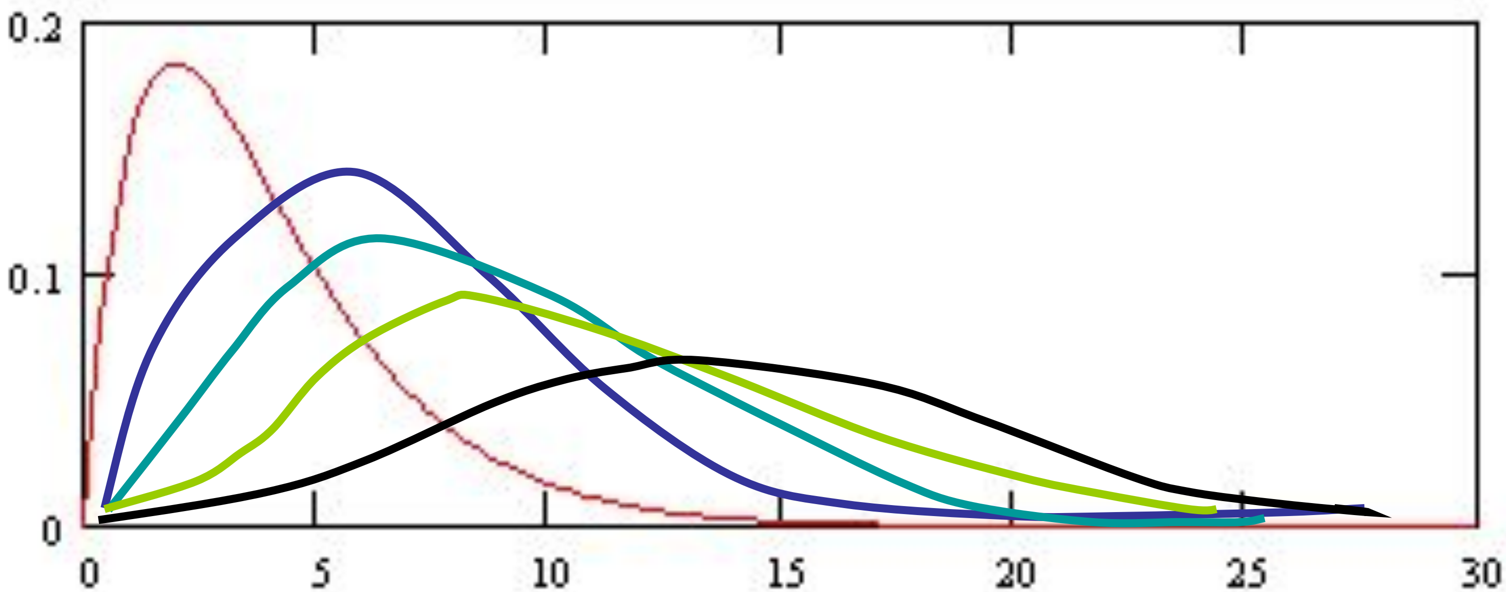
Центральная предельная теорема

Последовательность СВ $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$

d

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} X \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$ в т. непр. $F(x)$

Последовательность СВ **асимптотически нормальна**, если при $n\to\infty$ ее распределение неограниченно приближается к нормальному



Центральная предельная теорема

Пусть СВ $X_1, X_2, \ldots, X_k, \ldots$ независимы, одинаково распределены с м.о. m и с.к.о. $\sigma < +\infty$

Тогда СВ $Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ асимптотически нормальна

$$M(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} M(X_k) = n \cdot m \qquad D(Y_n) = \sum_{k=1}^{n} D(X_k) = n \cdot \sigma^2$$

$$\frac{Y_n - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} N(0, 1)$$

Пример При составлении статистического отчета складывают 300 чисел, округляя каждое до 10^{-3}. В каких пределах с вероятностью 0,997 будет лежать суммарная ошибка?

Пусть ε_i -ошибка округления каждого слагаемого

$$\varepsilon_i \sim R\left(-0{,}5\cdot 10^{-3};\, 0{,}5\cdot 10^{-3}\right) \quad M(\varepsilon_i)=0 \quad \sigma(\varepsilon_i)=\frac{10^{-3}}{\sqrt{12}}$$

ЦПТ $\Rightarrow$ $$Y_n=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \sim N\left(0;\, 0{,}5\cdot 10^{-2}\right)$$

«3σ» $\Rightarrow$ $$0{,}997=P\left(\left|Y_n-0\right|<3\sigma_Y\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|Y_n\right|<1{,}5\cdot 10^{-2} \Rightarrow Y_n=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i \in\left(-0{,}015;\, 0{,}015\right)$$

Теоремы Муавра-Лапласа

Пусть имеет место схема испытаний Бернулли и СВ $X_k \sim Ber(p)$

Тогда СВ $$Y_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim Bin(n, p)$$

Так как X_k независимы и одинаково распределены

с м.о. $m = p$ и дисперсией $\sigma^2 = pq$,

то по ЦПТ СВ Y_n асимптотически нормальна ,

$$m_Y = np$$
$$\sigma_Y{}^2 = npq$$

$$\boxed{\frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow[n \to \infty]{d} N(0, 1)}$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Пусть имеет место схема испытаний Бернулли и СВ

$Y_n \sim Bin(n, p)$ Тогда при достаточно больших n

$$P\left(\alpha \le \frac{Y_n - np}{\sqrt{npq}} \le \beta\right) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

$$\boxed{P(a \le Y_n \le b) = \Phi\left(\frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{npq}}\right)} \quad (1)$$

Условия применимости (1):

$$\begin{cases} np - 3\sqrt{npq} \ge 0 \\ np + 3\sqrt{npq} \le n \end{cases} \quad (2)$$

Пример Известно, что левши составляют примерно 10% населения. Какова вероятность того, что среди 160 человек окажется от 10 до 20 левшей?

$$Y \sim Bin(160;0{,}1) \qquad M(Y)=np=16,\ D(Y)=npq=14{,}4$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{npq}\approx 3{,}8$$

$$\begin{cases} np-3\sqrt{npq}=16-3\cdot 3{,}8=4{,}6\geq 0 \\ np+3\sqrt{npq}=16+3\cdot 3{,}8=27{,}4\leq 160 \end{cases}$$

$$P(10\leq Y\leq 20)=\Phi\left(\frac{20-16}{3{,}8}\right)-\Phi\left(\frac{10-16}{3{,}8}\right)\approx$$

$$\approx \Phi(1{,}05)-\Phi(1{,}58)\approx\ 0{,}34+0{,}45=0{,}79$$

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Пусть имеет место схема испытаний Бернулли и СВ $Y_n \sim Bin(n,p)$ Тогда при достаточно больших n

$$\boxed{P(Y_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot e^{-\frac{(k-np)^2}{2npq}}} \qquad (3)$$

Условия применимости (3):

$$\begin{cases} np - 3\sqrt{npq} \geq 0 \\ np + 3\sqrt{npq} \leq n \end{cases} \qquad (2)$$

$$P(Y = 10) = \frac{1}{3,8} f\left(\frac{10-16}{3,8}\right) \approx \frac{1}{3,8} f(1,58) = \frac{0,11}{3,8}$$

Применение теорем Муавра-Лапласа

$Bin(100,\ 0{,}5)$	$Bin(100,\ 0{,}05)$	$Bin(4, 0{,}5)$
$np = 50$ $\sqrt{npq} = 5$	$np = 5$ $\sqrt{npq} = 2{,}18$	$np = 2$ $\sqrt{npq} = 1$
$[35;\ 65]$	$[-1{,}54;\ 11{,}54]$	$[-1;\ 4]$

Условия применимости

$$\begin{cases} np - 3\sqrt{npq} \geq 0 \\ np + 3\sqrt{npq} \leq n \end{cases}$$