Дифференциальные уравнения в частных производных

Литература.

1.А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. Изд. МГУ. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам" http://window.edu.ru/resource/957/52957

2.Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.3. Учеб. пособие для втузов./Под ред. А. В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: Физматлит, 2009.

3.Уварова Л. А., Карташева Е. Л., Костылев В. Г. , Кузнецов Е. В. , Суков А. И. , Чурбанов А. Г. Прикладная математика. Вводный курс. – М. : Станкин, 1999.

4.Прикладная математика. Задачи, типовые расчёты и приложения: Учебное пособие. . Под ред. Л. А. Уваровой.- М. :Янус-К,2004.

§1. Основные понятия.

- Определение. Дифференциальным уравнением с частными производными (ДУЧП) называется уравнение

$$F\left(x; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}; \dots . \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}; \dots . ; \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \qquad (1)$$

где F - произвольная функция многих переменных, $x=(x_1,x_2,\dots x_n)$- действительный вектор из n-мерного евклидова пространства, $u(x)=u(x_1,x_2,\dots x_n)$ - неизвестная функция, $k_1+k_2+..+k_n=m$.

- Определение. Порядком ДУЧП называется порядок старшей входящей в него производной.
- Определение. Размерностью ДУЧП называется количество входящих в него независимых переменных.

Для обозначения производных используются эквивалентные записи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$$

Пример. Определить порядок и размерность ДУЧП.

$$u_{xx} - y(u_y)^2 + 5(u_{xz})^3 = y$$

$$\sin u_{xx} - y\cos(u_y)^2\,(u_y)^3 + (u_z u_y u_{xx})^3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^4\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 5\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} - 2x^4 u = 0$$

- Определение. Функция $u(x)=u(x_1,x_2,\ldots x_n)$, удовлетворяющая уравнению (1) в некоторой области точек $(x_1,x_2,\ldots x_n)$ называется решением или интегралом ДУЧП.

- Определение. Общим решением (общим интегралом) ДУЧП (1) называется решение, зависящее от произвольной функции.

Количество произвольных функций в общем решении равно m , а количество переменных каждой функции равно (n-1). Чтобы выделить частное решение, надо задать дополнительные (начальные и граничные) условия. Уравнение вместе с условиями называется задачей.

- Определение. ДУЧП (1) называется линейным, если F- линейная функция от u и ее производных.

$\hat{L}u = b$, где $\hat{L}$ - линейный оператор

- Определение. ДУЧП (1) называется однородным, если произведение αu тоже является решением для любого α, отличного от нуля.

Линейное однородное ДУЧП имеет вид $\hat{L}u = 0 \quad (b = 0)$

Для линейных однородных ДУЧП сумма любых двух решений тоже является решением.

Пример. Определить, являются ли уравнения линейными (однородными и неоднородными) или квазилинейными.

1. $u_{xx} + 2xy(u_y)^2 + \ln y\,(u_z)^3 = x$
2. $u_{xx} = \sin y - u_y e^x$
3. $u_x = (z \sin y + \cos y) x u_{xz}$
4. $u_x - u_y = 3 + (u_{xz})^3$

В простейших случаях решение ДУЧП может быть получено непосредственным интегрированием уравнения.

Пример. Найти общее решение $u(x,y)$ ДУЧП $u_{xy} = 2x$.

◀ Интегрируя последовательно левую и правую части уравнения по x и по y и рассматривая при этом вторую переменную как параметр, получим $u_y = x^2 + \tilde{g}_1(y)$ и $u(x,y) = x^2 y + g_1(y) + g_2(x)$. ▸

Пример. Найти общее решение $u(x,y,z)$ ДУЧП $u_{xy} = 2x$.

◀ Интегрируя последовательно левую и правую части уравнения по x и по y, а также учитывая, что u является функцией трех аргументов x, y, z, получим $u_y = x^2 + \tilde{g}_1(y,z)$ и $u(x,y,z) = x^2 y + g_1(y,z) + g_2(x,z)$. ▸

Пример. Найти общее решение $u(x,y)$ ДУЧП $xu_{xy} + u_y = 2x$.

◀ Запишем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial x}(xu_y) = 2x$ и проинтегрируем его по x, рассматривая y как параметр. Получим $xu_y = x^2 + \tilde{g}_1(y)$, или, поделив на x, $u_y = x + \tilde{g}_1(y)/x$. Проводя интегрирования по y и рассматривая x как параметр, найдем $u(x,y) = xy + g_1(y)/x + g_2(x)$▸

§2. ДУЧП первого порядка.

1^0. Линейные однородные уравнения.

- Определение. Уравнение вида

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.1}$$

$$\{a_1(x_1,x_2,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1,x_2,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1,x_2,\dots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0\},$$

где $a(x) = (a_1; a_2; \dots a_n)$ - n-мерный вектор, компоненты которого не зависят от u, называется линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными (ЛОДУЧП) первого порядка.

• Определение. Уравнением характеристик называется система ОДУ

$$\dot{x} = a(x) \qquad \{\frac{dx}{d\tau} = a(x) \text{ или } \frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} = \cdots = \frac{dx_n}{a_n(x)}\} \qquad (2.2)$$

где τ- искусственно введенный параметр.

Система (2.2) имеет *n-1* первых интегралов, не зависящих от τ: $\varphi_1(x)=const$, $\varphi_2(x)=const, \ldots, \varphi_{n-1}(x)=const$. Все множество первых интегралов называют полным интегралом, Кривые, на которых постоянны $\varphi_i(x)$, называются характеристиками.

Общее решение (общий интеграл) (2.1)

$$u(x)=g(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)), \qquad (2.3)$$

где g – произвольная гладкая функция.

Пример. Решить ЛОДУЧП: $yu_x - xu_y = 0$

Уравнение характеристик: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \rightarrow x^2+y^2=C \rightarrow \varphi_1(x,y)= x^2+y^2$

Общее решение: $u(x,y)=g(\varphi_1(x,y))=g(x^2+y^2)$

Если $g(z)=z$, то $u(x,y)=g(\varphi_1(x,y))=\varphi_1(x,y)=x^2+y^2$ (параболоид вращения)

Если $g(z)=z^{1/2}$, то $u(x,y)=g(\varphi_1(x,y))=(x^2+y^2)^{0,5}$ (конус)

II способ

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Rightarrow \text{характ. ур-ие} \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\begin{cases} x = c_1 \sin\tau + c_2 \cos\tau \\ y = c_1 \cos\tau - c_2 \sin\tau \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = c_1^2 + c_2^2 = c$$

$$\Rightarrow \varphi(x,y) = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow u(x,y) = g(x^2 + y^2)$$

Пример

$$\frac{1}{x}u_x - y u_y = 0$$

I способ: $\frac{dx}{1/x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow x\,dx = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\ln y + c_1 \Rightarrow \ln y = c_1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = e^{c_1 - \frac{x^2}{2}} \Rightarrow$

$y = ce^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \underline{\underline{ye^{\frac{x^2}{2}} = C}} \Rightarrow \varphi(x,y) = ye^{\frac{x^2}{2}}$

$$u(x,y) = g\left(ye^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

II способ: $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} \\ \dot{y} = -y \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{x^2}{2} = \tau + c_1 \\ y = c_2 e^{-\tau} \end{cases} \Rightarrow y = ce^{-\frac{x^2}{2}}$

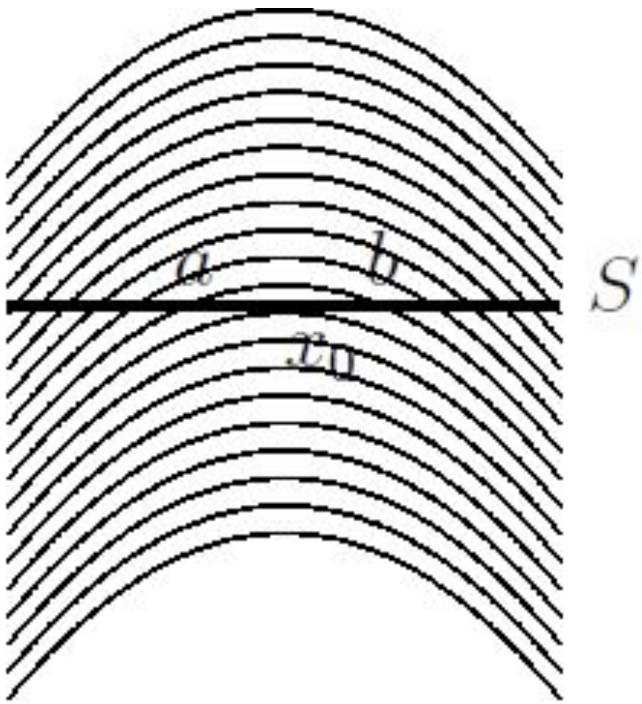
$$u(x,y) = g\left(ye^{x^2/2}\right).$$

2^0. Задача Коши.

- $a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$ (2.1)
- $u\big|_S = f(x)$ *- начальное условие* (2.4)

- Определение. Говорят, что кривая трансверсальна поверхности S, если она пересекает поверхность под ненулевым углом.

- Теорема. Решение задачи Коши (2.1) и (2.4) в окрестности точки x_0 , принадлежащей S , существует и единственно, если проходящая через точку x_0 характеристика трансверсальна поверхности S.



Идея доказательства состоит в том, чтобы рассматривать не одну характеристику, а все семейство характеристик. Пусть характеристика в точке хо касается начальной поверхности S. Тогда соседняя характеристика пересекает S в двух точках a и b. Значит возникает конфликт между значением, заданным в точке b, и другим значением, которое приносит характеристика из точки a. Такой конфликт делает задачу, вообще говоря неразрешимой.

<u>Пример.</u> Задача Коши для ЛОДУЧП.

$$\frac{1}{x}u_x - y\,u_y = 0$$

$$u(0,y) = y^2$$

Общее решение: $u(x,y) = g\left(y e^{x^2/2}\right)$.

$$u(0,y) = g(y) = y^2$$

$$\Rightarrow g(z) = z^2$$

$$\Rightarrow u(x,y) = y^2 e^{x^2}$$

3^0. Линейные неоднородные уравнения.

- Определение. Уравнение вида

$$a(x)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x) \tag{2.5}$$

называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка.

Уравнение характеристик:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x) \\ \dot{u} &= b(x) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Общее решение:

$$u(x)=g(\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\dots,\ \varphi_{n-1}(x))+\int_{\tau_0}^{\tau} b(x(t))dt$$

Пример

$$\frac{1}{x}u_x - y\,u_y = y$$

I способ: $\dfrac{dx}{1/x} = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{du}{y}$

$y e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 = \varphi_1(x,y)$; $u = -y + C_2$

$\Rightarrow u = -y + g\left(y e^{x^2/2}\right)$

II способ: $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} \\ \dot{y} = -y \Rightarrow \ldots \\ \dot{u} = y \end{cases}$

+ нач условие $\Rightarrow$ задача Коши

$u(0,y) = y^2$

$u(0,y) = -y + g(y) = y^2 \Rightarrow$

$g(y) = y^2 + y \Rightarrow g(z) = z^2 + z$

$\Rightarrow u(x,y) = -y + y^2 e^{x^2} + y e^{x^2/2}$

4^0. Квазилинейные уравнения.

Определение. Уравнение вида

$$a(x,u)\frac{\partial u}{\partial x} = b(x,u) \qquad (2.7)$$

называется квазилинейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка.

Уравнение характеристик:

$$\dot{x} = a(x,u)\ , \quad \dot{u} = b(x,u) \qquad (2.8)$$

Общее решение:

$$G(\varphi_1(x\ ,u),\ \varphi_2(x\ ,u), \ldots,\ \varphi_n(x\ ,u))=0$$

Пример.

$$\frac{1}{x}u_x - y u_y = u$$

Iсп: $x\,dx = \dfrac{dy}{-y} = \dfrac{du}{u}$ $\qquad \varphi_1(x,y) = y e^{\frac{x^2}{2}}$

$$-\ln y = \ln u + c_1 \Rightarrow \ln(u\cdot y) = -c_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow uy = c_2 \Rightarrow \quad \varphi_2(x,y,u) = uy$$

$u(x,y) = ?$

$$G\left(y e^{\frac{x^2}{2}};\ uy\right) = 0.$$

$$\Rightarrow uy = g\left(y e^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{y}\, g\left(y e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

Пример

$$(2y-u)\,u_x + y\,u_y = u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y-u \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = u \end{cases} \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u}{y} = C_1 = \varphi_1(x,y,u)$$

$$\frac{dx}{2y-y} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dx}{y(2-c_1)} = \frac{dy}{y} \Rightarrow dx = (2-c_1)\,dy$$

$$\Rightarrow x = 2y - c_1 y + c_2 = 2y - u + c_2.$$

$$\Rightarrow x - 2y + u = c_2 = \varphi_2(x,y,u)$$

$$G\left(\frac{u}{y};\ x-2y+u\right) = 0$$

① Решить задачу Коши.

$$x\,u_x - 2y\,u_y + xy\,u_z = 0$$

$$u\big|_{z=0} = x^2 + y^2$$

4^0. Нелинейные уравнения.

Определение. Уравнение вида

$$F(x,p,u)=0,\quad x=(x_1,x_2,\ldots x_n),\quad p=\frac{\partial u}{\partial x}=\left(\frac{\partial u}{\partial x_1};\ldots.\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) \qquad (2.9)$$

называется нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка.

Уравнение характеристик:

$$\dot{x}_i=\frac{\partial F}{\partial p_i},\qquad \dot{p}_i=-\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{\partial F}{\partial u}p_i,\qquad \dot{u}=\frac{\partial F}{\partial p_i}\,p_i \qquad (2.10)$$

$$\{\dot{x}=F_p,\qquad \dot{p}=-F_x-pF_u,\qquad \dot{u}=pF_p\,\}$$

Общее решение:

$$G(\varphi_1(x\,,p,u),\ \varphi_2(x\,,p,u),\ldots,\ \varphi_{2n}(x\,,p,u))=0$$