

Дифференциальные уравнения в частных производных

Литература.

1. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. Уравнения математической физики. Изд. МГУ. Информационная система "Единое окно доступа к образовательным ресурсам"
<http://window.edu.ru/resource/957/52957>
2. Сборник задач по математике для вузов. В 4-х частях. Ч.3. Учеб. пособие для вузов./Под ред. А. В. Ефимова и А.С. Поспелова. – М.: Физматлит, 2009.
3. Уварова Л. А., Карташева Е. Л., Костылев В. Г. , Кузнецов Е. В. , Суков А. И. , Чурбанов А. Г. Прикладная математика. Вводный курс. – М. : Станкин, 1999.
4. Прикладная математика. Задачи, типовые расчёты и приложения: Учебное пособие. . Под ред. Л. А. Уваровой.- М. :Янус-К,2004.

§1. Основные понятия.

- Определение. **Дифференциальным уравнением с частными производными (ДУЧП)** называется уравнение

$$F\left(x; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}; \dots; \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}; \dots; \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\right) = 0 \quad (1)$$

где F - произвольная функция многих переменных, $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - действительный вектор из n -мерного евклидова пространства, $u(x)=u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - неизвестная функция, $k_1+k_2+\dots+k_n=m$.

- Определение. **Порядком** ДУЧП называется порядок старшей входящей в него производной.
- Определение. **Размерностью** ДУЧП называется количество входящих в него независимых переменных.

Для обозначения производных используются эквивалентные записи

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{xy}$$

Пример. Определить порядок и размерность ДУЧП.

$$u_{xx} - y(u_y)^2 + 5(u_{xz})^3 = y$$

$$\sin u_{xx} - y \cos(u_y)^2 (u_y)^3 + (u_z u_y u_{xx})^3 = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^4 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} + 5 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} - 2x^4 u = 0$$

- Определение. Функция $u(x)=u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющая уравнению (1) в некоторой области точек (x_1, x_2, \dots, x_n) называется **решением** или **интегралом** ДУЧП.

- Определение. **Общим решением** (**общим интегралом**) ДУЧП (1) называется решение, зависящее от произвольной функции.

Количество произвольных функций в общем решении равно m , а количество переменных каждой функции равно $(n-1)$. Чтобы выделить частное решение, надо задать дополнительные (начальные и граничные) условия. Уравнение вместе с условиями называется задачей.

- Определение. ДУЧП (1) называется **линейным**, если F - линейная функция от u и ее производных.

$$\hat{L}u = b, \text{ где } \hat{L} - \text{линейный оператор}$$

- Определение. ДУЧП (1) называется **однородным**, если произведение αu тоже является решением для любого α , отличного от нуля.

Линейное однородное ДУЧП имеет вид $\hat{L}u = 0$ ($b = 0$)

Для линейных однородных ДУЧП сумма любых двух решений тоже является решением.

Пример. Определить, являются ли уравнения линейными (однородными и неоднородными) или квазилинейными.

1. $u_{xx} + 2xy(u_y)^2 + \ln y (u_z)^3 = x$

2. $u_{xx} = \sin y - u_y e^x$

3. $u_x = (z \sin y + \cos y) x u_{xz}$

4. $u_x - u_y = 3 + (u_{xz})^3$

В простейших случаях решение ДУЧП может быть получено непосредственным интегрированием уравнения.

Пример. Найти общее решение $u(x, y)$ ДУЧП $u_{xy} = 2x$.

◀ Интегрируя последовательно левую и правую части уравнения по x и по y и рассматривая при этом вторую переменную как параметр, получим $u_y = x^2 + \tilde{g}_1(y)$ и $u(x, y) = x^2y + g_1(y) + g_2(x)$. ▶

Пример. Найти общее решение $u(x, y, z)$ ДУЧП $u_{xy} = 2x$.

◀ Интегрируя последовательно левую и правую части уравнения по x и по y , а также учитывая, что u является функцией трех аргументов x, y, z , получим $u_y = x^2 + \tilde{g}_1(y, z)$ и $u(x, y, z) = x^2y + g_1(y, z) + g_2(x, z)$. ▶

Пример. Найти общее решение $u(x, y)$ ДУЧП $xu_{xy} + u_y = 2x$.

◀ Запишем уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial x}(xu_y) = 2x$ и проинтегрируем его по x , рассматривая y как параметр. Получим $xu_y = x^2 + \tilde{g}_1(y)$, или, поделив на x , $u_y = x + \tilde{g}_1(y)/x$. Проводя интегрирования по y и рассматривая x как параметр, найдем $u(x, y) = xy + g_1(y)/x + g_2(x)$. ▶

§2. ДУЧП первого порядка.

1⁰. Линейные однородные уравнения.

- Определение. Уравнение вида

$$a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

$$\{a_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + a_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0\},$$

где $a(x) = (a_1; a_2; \dots a_n)$ - n -мерный вектор, компоненты которого не зависят от u , называется **линейным однородным дифференциальным уравнением с частными производными (ЛОДУЧП) первого порядка.**

- Определение. Уравнением характеристик называется система ОДУ

$$\dot{x} = a(x) \quad \left\{ \frac{dx}{d\tau} = a(x) \text{ или } \frac{dx_1}{a_1(x)} = \frac{dx_2}{a_2(x)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x)} \right\} \quad (2.2)$$

где τ - искусственно введенный параметр.

Система (2.2) имеет $n-1$ первых интегралов, не зависящих от τ : $\varphi_1(x)=const$, $\varphi_2(x)=const, \dots, \varphi_{n-1}(x)=const$. Все множество первых интегралов называют полным интегралом, Кривые, на которых постоянны $\varphi_i(x)$, называются **характеристиками**.

Общее решение (общий интеграл) (2.1)

$$u(x)=g(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), \quad (2.3)$$

где g – произвольная гладкая функция.

Пример. Решить ЛОДУЧП: $yu_x - xu_y = 0$

Уравнение характеристик: $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x} \rightarrow x^2 + y^2 = C \rightarrow \varphi_1(x, y) = x^2 + y^2$

Общее решение: $u(x, y) = g(\varphi_1(x, y)) = g(x^2 + y^2)$

Если $g(z) = z$, то $u(x, y) = g(\varphi_1(x, y)) = \varphi_1(x, y) = x^2 + y^2$ (параболоид вращения)

Если $g(z) = z^{1/2}$, то $u(x, y) = g(\varphi_1(x, y)) = (x^2 + y^2)^{0,5}$ (конус)

II способ.

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases} \Rightarrow \text{характ. ур-ие} \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 \\ -1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$$

$$\begin{cases} x = C_1 \sin \tau + C_2 \cos \tau \\ y = C_1 \cos \tau - C_2 \sin \tau \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = C_1^2 + C_2^2 = C$$

$$\Rightarrow \varphi(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow u(x, y) = g(x^2 + y^2)$$

Пример

$$\frac{1}{x} u_x - y u_y = 0$$

$$\text{I способ: } \frac{dx}{1/x} = \frac{dy}{-y} \Rightarrow x dx = -\frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} = -\ln y + C_1 \Rightarrow \ln y = C_1 - \frac{x^2}{2} \Rightarrow y = e^{C_1 - \frac{x^2}{2}} \Rightarrow$$

$$y = C e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow \underline{y e^{\frac{x^2}{2}} = C} \Rightarrow \varphi(x, y) = y e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$u(x, y) = g\left(y e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

$$\text{II способ: } \begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{x^2}{2} = z + C_1 \\ y = C_2 e^{-z} \end{cases} \Rightarrow y = C e^{-\frac{x^2}{2}}$$

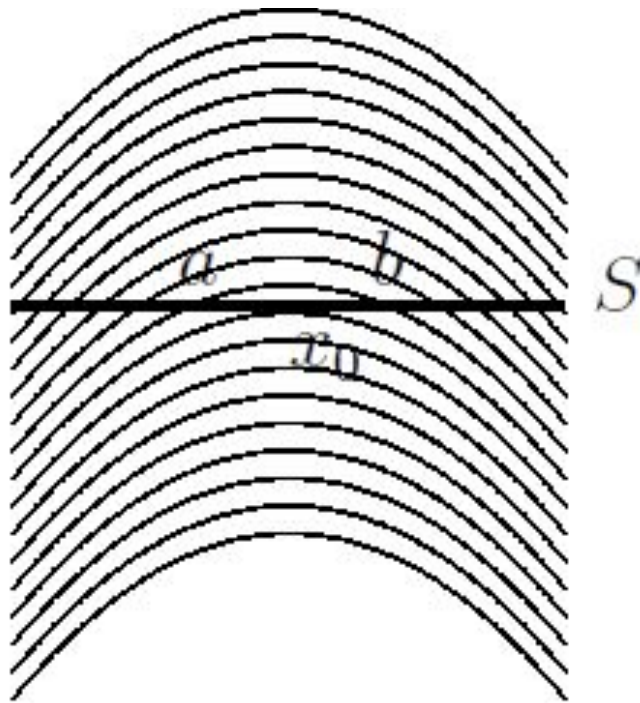
$$u(x, y) = g\left(y e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

2⁰. Задача Коши.

- $a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ (2.1)

- $u|_S = f(x)$ - начальное условие (2.4)

- Определение. Говорят, что кривая трансверсальна поверхности S , если она пересекает поверхность под ненулевым углом.
- Теорема. Решение задачи Коши (2.1) и (2.4) в окрестности точки x_0 , принадлежащей S , существует и единственно, если проходящая через точку x_0 характеристика трансверсальна поверхности S .



Идея доказательства состоит в том, чтобы рассматривать не одну характеристику, а все семейство характеристик. Пусть характеристика в точке x_0 касается начальной поверхности S . Тогда соседняя характеристика пересекает S в двух точках a и b . Значит возникает конфликт между значением, заданным в точке b , и другим значением, которое приносит характеристика из точки a . Такой конфликт делает задачу, вообще говоря неразрешимой.

Пример. Задача Коши для ПДУЧП.

$$\frac{1}{x} u_x - y u_y = 0$$

$$u(0, y) = y^2$$

Общее решение: $u(x, y) = g(y e^{x^2/2})$.

$$u(0, y) = g(y) = y^2$$

$$\Rightarrow g(z) = z^2$$

$$\Rightarrow u(x, y) = y^2 e^{x^2}$$

3⁰. Линейные неоднородные уравнения.

- Определение. Уравнение вида

$$a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x) \quad (2.5)$$

называется **линейным неоднородным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка.**

Уравнение характеристик:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a(x) \\ \dot{u} &= b(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Общее решение:

$$u(x) = g(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)) + \int_{\tau_0}^{\tau} b(x(t)) dt$$

Пример

$$\frac{1}{x} u_x - y u_y = y$$

I способ: $\frac{dx}{1/x} = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{y}$

$$y e^{\frac{x^2}{2}} = C_1 = \varphi_1(x, y); \quad u = -y + C_2$$
$$\Rightarrow u = -y + g(y e^{x^2/2})$$

II способ: $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{x} \\ \dot{y} = -y \Rightarrow \dots \\ \dot{u} = y \end{cases}$

+ на 2 условие \Rightarrow задана Коши
 $u(0, y) = y^2$

$$u(0, y) = -y + g(y) = y^2 \Rightarrow$$

$$g(y) = y^2 + y \Rightarrow g(z) = z^2 + z$$

$$\Rightarrow u(x, y) = -y + y^2 e^{x^2} + y e^{x^2/2}$$

4⁰. Квазилинейные уравнения.

Определение. Уравнение вида

$$a(x, u) \frac{\partial u}{\partial x} = b(x, u) \quad (2.7)$$

называется **квазилинейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка.**

Уравнение характеристик:

$$\dot{x} = a(x, u), \quad \dot{u} = b(x, u) \quad (2.8)$$

Общее решение:

$$G(\varphi_1(x, u), \varphi_2(x, u), \dots, \varphi_n(x, u)) = 0$$

Пример.

$$\frac{1}{x} u_x - y u_y = u$$

Иск: $x dx = \frac{dy}{-y} = \frac{du}{u}$

$$u_1(x, y) = y e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$-\ln y = \ln u + C_1 \Rightarrow \ln(u \cdot y) = -C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u y = C_2 \Rightarrow u_2(x, y) = u y$$

$$u(x, y) = ?$$

$$G\left(y e^{\frac{x^2}{2}}; u y\right) = 0.$$

$$\Rightarrow u y = g\left(y e^{\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{y} g\left(y e^{\frac{x^2}{2}}\right).$$

Пример

$$(2y - u) u_x + y u_y = u$$

$$\begin{cases} \dot{x} = 2y - u \\ \dot{y} = y \\ \dot{u} = u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{du}{u} \Rightarrow \frac{u}{y} = C_1 = \mathcal{U}_1(x, y, u)$$

$$\frac{dx}{2y - y} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \frac{dx}{y(2 - C_1)} = \frac{dy}{y} \Rightarrow dx = (2 - C_1) dy$$

$$\Rightarrow x = 2y - C_1 y + C_2 = 2y - u + C_2$$

$$\Rightarrow x - 2y + u = C_2 = \mathcal{U}_2(x, y, u)$$

$$G\left(\frac{u}{y}; x - 2y + u\right) = 0$$

① Решить задачу Коши.

$$x u_x - 2y u_y + xy u_z = 0$$

$$u|_{z=0} = x^2 + y^2$$

4⁰. Нелинейные уравнения.

Определение. Уравнение вида

$$F(x, p, u) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad p = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}; \dots; \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) \quad (2.9)$$

называется **нелинейным дифференциальным уравнением с частными производными первого порядка**.

Уравнение характеристик:

$$\dot{x}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial u} p_i, \quad \dot{u} = \frac{\partial F}{\partial p_i} p_i \quad (2.10)$$

$$\{ \dot{x} = F_p, \quad \dot{p} = -F_x - pF_u, \quad \dot{u} = pF_p \}$$

Общее решение:

$$G(\varphi_1(x, p, u), \varphi_2(x, p, u), \dots, \varphi_{2n}(x, p, u)) = 0$$