# Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

# Цели урока

- **Рассмотреть теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.**

# Новый материал

*Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.*

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

$$\textit{Дано}: \vec{a}, \vec{b}, c - \textit{некомпланарны}$$

$$\vec{p}$$

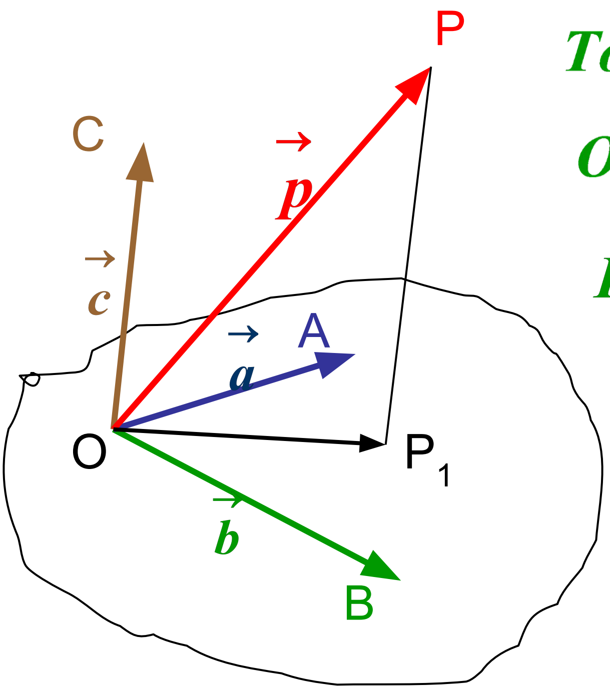
$$\textit{Доказать}: 1)\ \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

$$2)\ \textit{коэффициенты } x, y, z \textit{ определяются единственным образом.}$$

# Доказательство

1)*Отложим векторы* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{p}$ *от одной точки.*

*Через точку* $P$, *проведем* $PP_1 \parallel OC$, $P_1 \in (AOB)$.




*Тогда по правилу треугольника* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1P}$.

$\overrightarrow{OP_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.к.* $\overrightarrow{OP_1}, \vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– компланарны.*

$\overrightarrow{P_1P} = z\vec{c}$, *т.к.* $\overrightarrow{P_1P} \parallel \vec{c}$.

*Следовательно,* $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

*Если* $\vec{p} \parallel \vec{c}$, *то* $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$.

# Доказательство

*Докажем единственность коэффициентов разложения.*

*Пусть* $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ *и* $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$,

*следовательно,* $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$.

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0$$

*Пусть* $x - x_1 \neq 0$. *Делим на* $x - x_1$ *обе части равенства:*

$$\vec{a} + \frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} + \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c} = 0$$

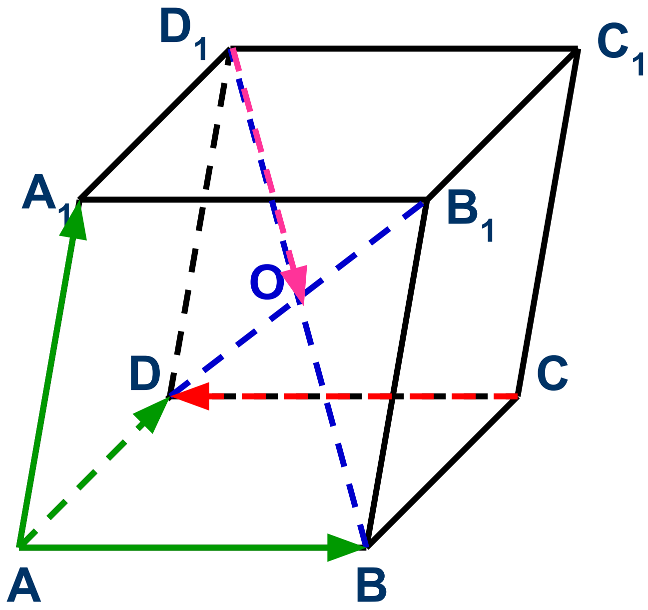
*Откуда* $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} - \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c}$;

*т.е.* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *– компланарны, что противоречит условию,*

*значит,* $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, *ч.т.д.*

# Решение задач

**361**




$$\vec{CD} = -\vec{AB} = 0 \cdot \vec{AA_1} - \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AD};$$

$$\vec{D_1O} = \frac{1}{2}\vec{D_1B} = \frac{1}{2}\left(\vec{D_1A_1} + \vec{D_1C_1} + \vec{D_1D}\right) =$$

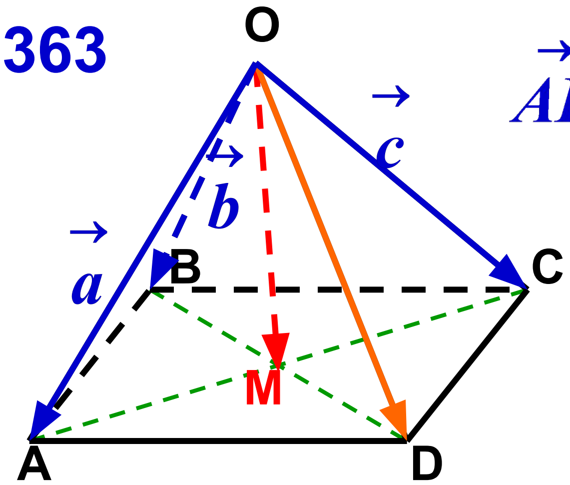
$$= \frac{1}{2}\left(-\vec{AD} + \vec{AB} - \vec{AA_1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{AA_1} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}.$$

Ответ:

# Решение задач

**363**




$$\vec{AD} = \vec{BC}, \text{ так как } ABCD - \text{параллелограмм};$$

$$\vec{OD} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OB};$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB};$$

$$\vec{OD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c};$$

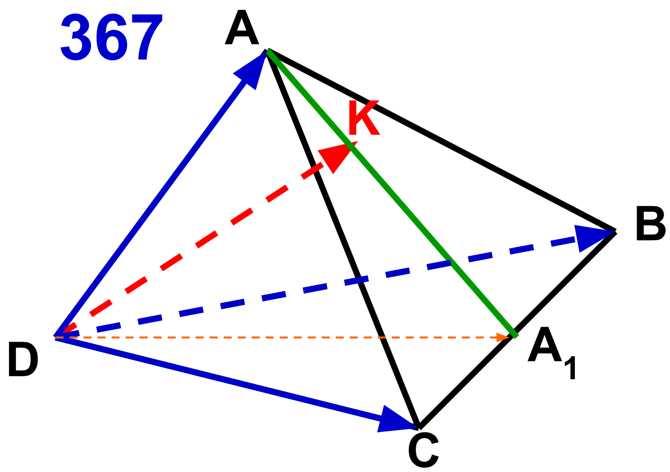
$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OC}\right), \text{ так как } M - \text{середина отрезка } AC;$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Ответ:

# Решение задач

**367**




*Дано :* $ABCD$ *– тетраэдр*

$AA_1$ *– медиана грани* $ABC$,

$K \in AA_1, \dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{3}{7}$.

*Разложить : вектор* $\vec{DK}$ *по векторам* $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$.

*Решение :* $7\vec{AK} = 3\vec{KA_1}$; $\quad 7\left(\vec{DK} - \vec{DA}\right) = 3\left(\vec{DA_1} - \vec{DK}\right)$;

$10\vec{DK} = 7\vec{DA} + 3\vec{DA_1}$;

$\vec{DA_1} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{DB} + \vec{DC}\right)$, *так как* $A_1$ *– середина отрезка* $BC$;

$10\vec{DK} = 7\vec{DA} + 3 \cdot \dfrac{1}{2}\left(\vec{DB} + \vec{DC}\right)$; $\quad \vec{DK} = 0{,}7\vec{DA} + \dfrac{3}{20}\vec{DB} + \dfrac{3}{20}\vec{DC}$;

*Ответ :* $\vec{DK} = 0{,}7\vec{DA} + \dfrac{3}{20}\vec{DB} + \dfrac{3}{20}\vec{DC}$;


Спасибо!