Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

Цели урока

- **Рассмотреть теорему о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.**

Новый материал

Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам.

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

$$\text{Дано}: \vec{a}, \vec{b}, c - \text{некомпланарны}$$

$$\vec{p}$$

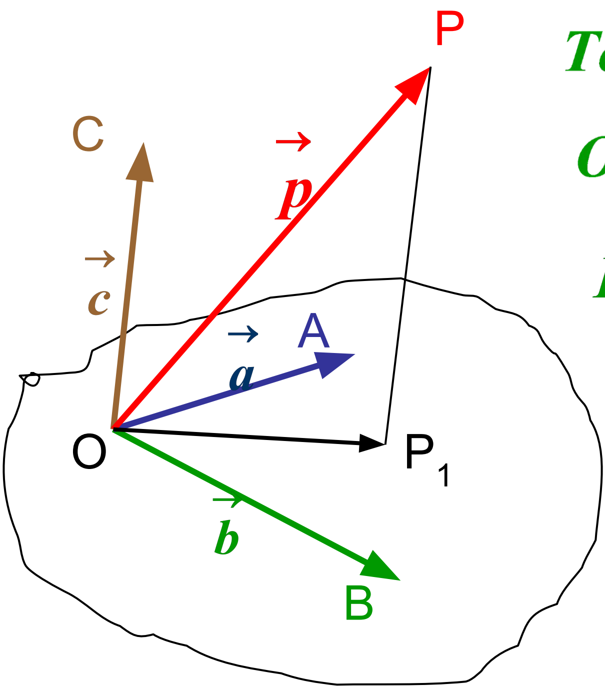
$$\text{Доказать}: 1)\ \vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c},$$

2) *коэффициенты* x, y, z *определяются единственным образом.*

Доказательство

1) *Отложим векторы* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *и* $\vec{p}$ *от одной точки.*

Через точку P, *проведем* $PP_1 \parallel OC$, $P_1 \in (AOB)$.



Тогда по правилу треугольника $\vec{OP} = \vec{OP_1} + \vec{P_1P}$.

$\vec{OP_1} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.к.* $\vec{OP_1}$, $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– компланарны.*

$\vec{P_1P} = z\vec{c}$, *т.к.* $\vec{P_1P} \parallel \vec{c}$.

Следовательно, $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

Если $\vec{p} \parallel \vec{c}$, *то* $\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + z \cdot \vec{c}$.

Доказательство

Докажем единственность коэффициентов разложения.

Пусть $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ *и* $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$,

следовательно, $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$.

$$(x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c} = 0$$

Пусть $x - x_1 \neq 0$. *Делим на* $x - x_1$ *обе части равенства:*

$$\vec{a} + \frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} + \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c} = 0$$

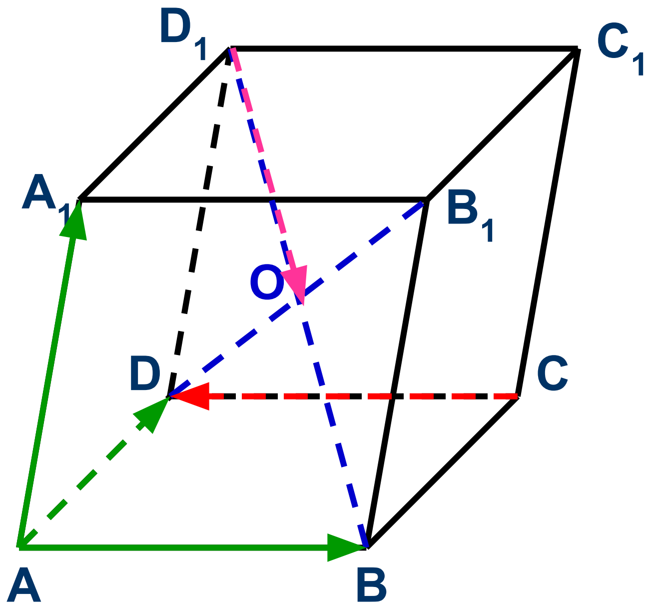
Откуда $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b} - \frac{z - z_1}{x - x_1}\vec{c}$;

т.е. $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *– компланарны, что противоречит условию,*

значит, $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$, *ч.т.д.*

Решение задач

361



$$\vec{CD} = -\vec{AB} = 0\cdot\vec{AA_1} - \vec{AB} + 0\cdot\vec{AD};$$

$$\vec{D_1O} = \frac{1}{2}\vec{D_1B} = \frac{1}{2}\left(\vec{D_1A_1} + \vec{D_1C_1} + \vec{D_1D}\right) =$$

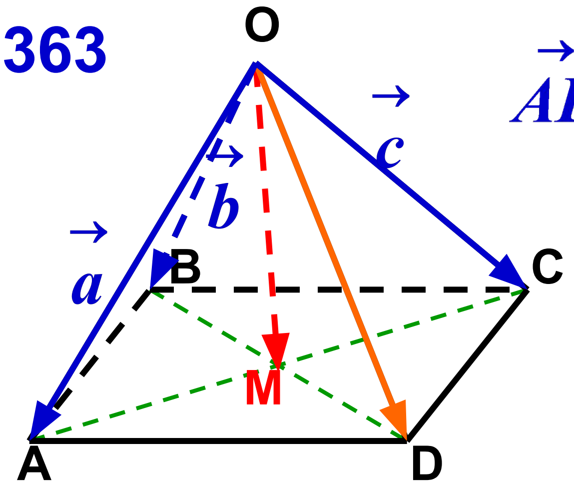
$$= \frac{1}{2}\left(-\vec{AD} + \vec{AB} - \vec{AA_1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{AA_1} + \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AD}.$$

Ответ:

Решение задач

363



$$\vec{AD} = \vec{BC}, \textit{ так как } ABCD - \textit{параллелограмм};$$

$$\vec{OD} - \vec{OA} = \vec{OC} - \vec{OB};$$

$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{OC} - \vec{OB};$$

$$\vec{OD} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c};$$

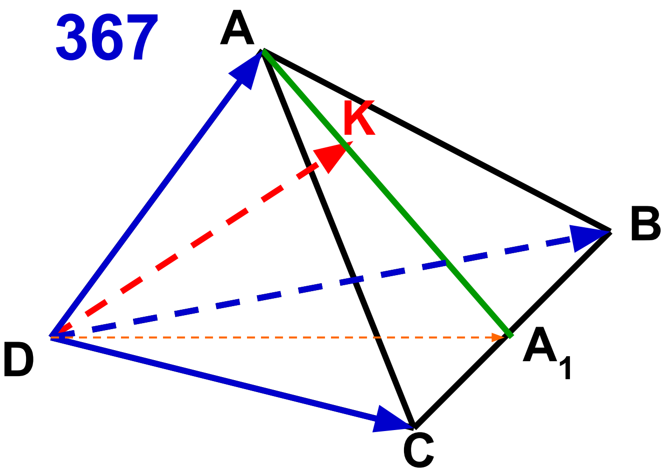
$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\left(\vec{OA} + \vec{OC}\right), \textit{ так как } M - \textit{середина отрезка } AC;$$

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a} + 0 \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Ответ:

Решение задач

367



Дано : ABCD – тетраэдр

AA_1 *– медиана грани ABC,*

$K \in AA_1,\ \dfrac{AK}{KA_1} = \dfrac{3}{7}.$

Разложить : вектор $\vec{DK}$ *по векторам* $\vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$.

Решение : $7\vec{AK} = 3\vec{KA_1};\quad 7\left(\vec{DK} - \vec{DA}\right) = 3\left(\vec{DA_1} - \vec{DK}\right);$

$10\vec{DK} = 7\vec{DA} + 3\vec{DA_1};$

$\vec{DA_1} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{DB} + \vec{DC}\right)$, *так как* A_1 *– середина отрезка BC;*

$10\vec{DK} = 7\vec{DA} + 3\cdot\dfrac{1}{2}\left(\vec{DB} + \vec{DC}\right);\quad \vec{DK} = 0{,}7\vec{DA} + \dfrac{3}{20}\vec{DB} + \dfrac{3}{20}\vec{DC};$

Ответ : $\vec{DK} = 0{,}7\vec{DA} + \dfrac{3}{20}\vec{DB} + \dfrac{3}{20}\vec{DC};$


Спасибо!