

Проф. Копытин И.В. и доц. Чуракова Т.А.

Лабораторные занятия

по курсу «Квантовая механика»

Направление **03.03.03** – «Радиофизика»

Бакалавры, **3** курс

Задание на период с **17** марта по **28** марта

- 1.** Разобрать разделы **3.1-3.3** из учебного пособия «Квантовая механика в примерах и задачах» (авторы – И.В. Копытин, А.С. Корнев, Н.Л. Манаков) Его можно найти на сайте **vk.com/as_kornev** в разделе «Квантовая теория. Методички. **QM-prblm.pdf**». Ниже прилагается скан указанных разделов.
- 2.** Уделить особое внимание разбираемым в них примерам, т.е. уметь решить эти задачи самостоятельно.
- 3.** Решить самостоятельно задачи №№ **29-30, 33, 34**

Глава 3.

Измеримость физических величин

3.1. Средние значения физических величин

Измерение физических величин в квантовой и классической механике существенно различается. Прежде всего квантовую систему нужно привести в то состояние, в котором величину F необходимо измерить. Пусть волновая функция этого состояния $\Psi(\xi)$ ¹. В результате того или иного измерения состояние микрообъекта, как правило, разрушается (например, для фиксации летящего электрона на его пути ставят фотопластинку; после взаимодействия с ней этот электрон поглощается и уже не может быть зафиксирован повторно тем же способом). Для повторного измерения квантовую систему необходимо вновь привести в то же самое состояние и т.д. Среднее значение величины F получается усреднением результатов таких многократных измерений. Если известна волновая функция квантовой системы, то среднее значение F вычисляется по формуле

$$\langle F \rangle = \int \Psi^*(\xi) \hat{F} \Psi(\xi) d\xi, \quad (3.1)$$

где \hat{F} — оператор величины F . Формулу (3.1) можно также понимать как определение оператора величины F . Волновая функция в (3.1) должна быть нормирована на 1 в соответствии с (1.4). Если же используется ненормированная волновая функция *финитного движения*, то формулу (3.1) необходимо обобщить следующим образом:

$$\langle F \rangle = \frac{\int \Psi^*(\xi) \hat{F} \Psi(\xi) d\xi}{\int |\Psi(\xi)|^2 d\xi}.$$

Среднее значение по своему смыслу должно быть величиной вещественной.

¹зависимость волновой функции от времени не учитываем, так как в данном разделе она не существенна

Пример 3.1. Показать, что необходимым и достаточным условием вещественности среднего значения величины F является самосопряженность ее оператора \hat{F} .

Решение. Докажем вещественность среднего значения F , предполагая \hat{F} самосопряженным:

$$\langle F \rangle^* \stackrel{(3.1)}{=} \int \Psi(\xi) \hat{F}^* \Psi^*(\xi) d\xi \stackrel{(2.39)}{=} \int \Psi^*(\xi) \hat{F} \Psi(\xi) d\xi \stackrel{(3.1)}{=} \langle F \rangle.$$

Доказать обратное утверждение несложно. \square

Таким образом, для вещественности среднего значения физической величины оператор этой физической величины должен быть самосопряженным. Помимо линейности, это второе требование, предъявляемое к оператору физической величины.

Формулу среднего значения F в состоянии с волновой функцией $\Psi(\xi)$ можно также представить в дираковских обозначениях:

$$\boxed{\langle F \rangle = \langle \Psi | \hat{F} | \Psi \rangle}. \quad (3.2)$$

Пример 3.2. Показать, что среднее значение квадрата физической величины F неотрицательно.

Решение. В соответствии со сказанным выше оператор \hat{F} должен быть самосопряженным. Поэтому \hat{F}^2 тоже будет самосопряженным [см. (2.37)], а $\langle F^2 \rangle$ — вещественным. Дальнейшее доказательство удобно проводить в дираковских обозначениях, предполагая $\hat{F} = \hat{F}^\dagger$:

$$\langle F^2 \rangle \stackrel{(3.2)}{=} \langle \Psi | \hat{F}^2 | \Psi \rangle = \langle \Psi | \hat{F} | \hat{F} \Psi \rangle \stackrel{(2.40)}{=} \langle \hat{F} \Psi | \hat{F} \Psi \rangle = \int |\hat{F} \Psi(\xi)|^2 d\xi.$$

Последний интеграл будет величиной неотрицательной, что и доказывает наше утверждение. \square

Следует предостеречь читателя от возможной путаницы между $\langle F^2 \rangle$ и $\langle F \rangle^2$. И вообще? $\langle f(F) \rangle \neq f(\langle F \rangle)$ только за исключением случая линейной функции $f(z)$.

Описанный выше способ измерения физической величины F дает с математической точки зрения последовательность случайных чисел. Характеристикой их разброса относительно среднего значения служит *среднеквадратичное отклонение*:

$$\boxed{\langle (\Delta F)^2 \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle (F - \langle F \rangle)^2 \rangle}. \quad (3.3)$$

Более удобной формулой для вычисления $\langle(\Delta F)^2\rangle$ по сравнению с (3.3) является

$$\langle(\Delta F)^2\rangle = \langle F^2\rangle - \langle F\rangle^2. \quad (3.4)$$

Пример 3.3. Для волнового пакета из примера 1..3 вычислить $\langle x\rangle$, $\langle(\Delta x)^2\rangle$; $\langle p_x\rangle$, $\langle(\Delta p_x)^2\rangle$.

Решение. Нормировочная константа вычислена в примере 1..3, так что нормированная волновая функция имеет вид

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}} \exp\left[-\frac{x^2}{2x_0^2} + ik_0x\right], \quad (3.5)$$

а средние значения вычисляются по формуле (3.1).

Для координаты

$$\langle x\rangle = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right] dx = 0$$

вследствие нечетности подынтегральной функции. Обратите внимание на исчезновение множителя e^{ik_0x} при возведении его модуля в квадрат! Для среднеквадратичного отклонения координаты

$$\begin{aligned} \langle(\Delta x)^2\rangle &\stackrel{(3.4)}{=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right] dx = \\ &= (x = x_0\xi) = \frac{x_0^2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2 e^{-\xi^2} d\xi \stackrel{(A.3)}{=} \frac{x_0^2}{2}. \end{aligned}$$

Оператор импульса — дифференциальный. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle p_x\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \hat{p}_x \Psi(x) dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} dx = \\ &= -\frac{i\hbar}{x_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\frac{x}{x_0^2} + ik_0\right) \exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right] dx = \hbar k_0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle p_x^2\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \hat{p}_x^2 \Psi(x) dx = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x) \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} dx = \\ &= -\hbar^2 \underbrace{\Psi^*(x) \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_0 + \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right|^2 dx = \end{aligned}$$

$$= \frac{\hbar^2}{x_0 \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x_0^4} + k_0^2 \right) \exp \left[-\frac{x^2}{x_0^2} \right] dx = \frac{\hbar^2}{2x_0^2} + \hbar^2 k_0^2;$$

$$\langle (\Delta p_x)^2 \rangle \stackrel{(3.4)}{=} \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}.$$

Рекомендуем самостоятельно проделать все промежуточные выкладки.
□

3.2. Определенные значения физических величин

Описанная выше методика измерения физической величины F у микрообъекта дает ненулевые значения $\langle (\Delta F)^2 \rangle$ даже в случае идеального прибора с нулевой погрешностью. Такая *неопределенность* в значении величины F есть объективное свойство движения в микромире. Поэтому возникает проблема поиска состояний с *определенными* значениями F . Определенность (измеримость) величины F в некотором состоянии квантовой системы означает, что при каждом акте ее измерения будет получаться *одно и то же значение* этой величины. Данная проблема решается, если отождествить получаемые в эксперименте значения физической величины F с *собственными значениями* ее оператора \hat{F} , а соответствующие состояния изображать соответствующими этим значениям *собственными функциями* оператора \hat{F} :

$$\boxed{\hat{F}\Psi_F(\xi) = F\Psi_F(\xi)}. \quad (3.6)$$

С математической точки зрения уравнение (3.6) представляет собой задачу собственных функций и собственных значений оператора \hat{F} . Она требует отыскания *нетривиальных* [$\Psi_F(\xi) \neq 0$] решений уравнения (3.6) с заданными граничными условиями. Выбор последних диктуется физическими стандартными условиями, которым подчиняется волновая функция (конечность, однозначность, непрерывность). В общем случае \hat{F} представляет собой линейный дифференциальный оператор, так что уравнение (3.6) является *линейным однородным дифференциальным уравнением*². Однородность приводит к неоднозначности его решений: они определены с точностью до произвольного постоянного множителя, т.е. должны быть нормированы.

²как правило, не выше *второго* порядка

Пример 3.4. Показать, что функция $\Psi(x) = e^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = \frac{d^2}{dx^2} - x^2$ и найти соответствующее собственное значение.

Решение. Необходимо лишь показать, что действие оператора \hat{F} на функцию $\Psi(x)$ приводит к умножению последней на некоторую константу. Ее значение при этом будет получено автоматически:

$$\begin{aligned}\hat{F}\Psi(x) &= \left(\frac{d^2}{dx^2} - x^2 \right) e^{-x^2/2} = \frac{d^2}{dx^2} e^{-x^2/2} - x^2 e^{-x^2/2} = \\ &= -e^{-x^2/2} = \underbrace{-1}_F \Psi(x).\end{aligned}$$

Итак, данное в условии утверждение доказано; найдено собственное значение $F = -1$. \square

Собственные значения и собственные функции линейных эрмитовых операторов обладают рядом специфических свойств. Перечислим их:

- 1) собственные значения вещественны;
- 2) собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, взаимно ортогональны³;
- 3) система собственных функций *полна* в классе тех функций, на которых этот оператор задается, т.е. она образует *базис* оператора.

Математические выражения важнейших свойств собраны в таблице 3.1 применительно к операторам с дискретным и непрерывным спектром.

Пример 3.4 не характерен для задачи собственных функций и собственных значений оператора \hat{F} . Обычно неизвестными бывают как собственные значения F , так и собственные функции $\Psi_F(\xi)$.

Пример 3.5. Найти наблюдаемые значения L_z и соответствующие им волновые функции.

Решение. В уравнении для собственных функций и собственных значений

$$\hat{L}_z \Psi = L_z \Psi$$

Неизвестными являются как L_z , так и Ψ . Это уравнение удобно переписать в сферической системе координат, где вид \hat{L}_z будет наиболее

³ Собственные функции, соответствующие одному и тому же вырожденному собственному значению, не обязаны быть ортогональными; из них, однако, можно построить ортогональные линейные комбинации (процедура Грама–Шмидта).

простым [см. (2.31)]:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi(\varphi)}{\partial \varphi} = L_z \Psi(\varphi); \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (3.7)$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Поэтому его решение ищем в виде

$$\Psi(\varphi) = A e^{i\lambda\varphi}, \quad (3.8)$$

где A — произвольная ненулевая константа, обусловленная однородностью уравнения (2.31), λ — подлежащая определению константа. Выбор решения в виде (3.8) обеспечивает *конечность* (почему?) и *непрерывность* волновой функции.

После подстановки (3.8) дифференциальное уравнение (3.7) превращается в алгебраическое:

$$\hbar\lambda = L_z. \quad (3.9)$$

В уравнении (3.8) неизвестное L_z выражается через неизвестное λ . Тем не менее, значения λ определяются требованием *однозначности*: функция полярного угла должна быть 2π -периодичной (см. пример 1.4). Поэтому λ может принимать *только целые значения*: $\lambda_{m_l} = m_l = 0, \pm 1, \dots$. Соответственно

$$L_{z, m_l} \stackrel{(3.9)}{=} \hbar m_l; \quad m_l = 0, \pm 1, \dots \quad (3.10)$$

В том же примере получены и нормированные собственные функции (1.11).

Таким образом, спектр оператора \hat{L}_z дискретный и невырожденный.

Рекомендуем самостоятельно проверить свойства собственных значений и собственных функций линейного эрмитова оператора \hat{L}_z . \square

Пример 3.6. Найти наблюдаемые значения проекции импульса и соответствующие им волновые функции.

Решение. Для удобства рассмотрим декартову компоненту импульса p_x . Вид оператора \hat{p}_x дается выражением (2.15), так что уравнение для собственных функций и собственных значений принимает вид:

$$-i\hbar \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} = p_x \Psi(x). \quad (3.11)$$

Неизвестными здесь будут как сама функция, так и собственное значение p_x . В отличие от (3.7) аргумент функции изменяется в *бесконечных* пределах.

Таблица 3.1. Свойства собственных значений и собственных функций линейного эрмитова оператора

Свойство	Дискретный спектр	Непрерывный спектр
уравнение	$\hat{F}\Psi_n(\xi) = F_n\Psi_n(\xi)$	$\hat{F}\Psi_F(\xi) = F\Psi_F(\xi)$
ортонорм.	$\int \Psi_{n'}^*(\xi)\Psi_n(\xi) d\xi = \delta_{n'n}$	$\int \Psi_{F'}^*(\xi)\Psi_F(\xi) d\xi = \delta(F' - F)$
полнота	$\sum_n \Psi_n^*(\xi)\Psi_n(\xi') = \delta(\xi' - \xi)$	$\int \Psi_F^*(\xi)\Psi_F(\xi') dF = \delta(\xi' - \xi)$
разлож. по базису	$\Phi(\xi) = \sum_n c_n \Psi_n(\xi)$ $c_n = \int \Psi_n^*(\xi)\Phi(\xi) d\xi$ $\sum_n c_n ^2 = 1$	$\Phi(\xi) = \int c(F)\Psi_F(\xi) dF$ $c(F) = \int \Psi_F^*(\xi)\Phi(\xi) d\xi$ $\int c(F) ^2 dF = 1$

Подобно (3.7) уравнение (3.11) является линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Поэтому его решение также ищется в виде

$$\Psi(x) = A e^{i\lambda x} \quad (3.12)$$

с неизвестной в общем случае комплексной константой λ .

Выражение (3.12) удовлетворяет условиям однозначности и непрерывности функции $\Psi(x)$. Подстановка (3.12) в уравнение (3.11) превращает его в алгебраическое уравнение

$$p_x = \hbar\lambda \quad (3.13)$$

с двумя неизвестными p_x и λ . Чтобы определить допустимые значения λ , представим эту константу в явном комплексном виде:

$$\lambda = \lambda_0 + i\mu_0,$$

где λ_0 и μ_0 — вещественные. При таком представлении λ легко заметить, что функция (3.12) будет конечной только при $\mu_0 = 0$, т.е. при вещественных λ . Поэтому, в соответствии с (3.13), собственным значением проекции импульса будет произвольное вещественное число, т.е. у оператора \hat{p}_x будет непрерывный спектр.

Вычислим теперь нормировочную константу. В соответствии с табл. 3.1, собственные функции оператора с непрерывным спектром должны быть нормированы на δ -функцию:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi_{p'_x}^*(x) \Psi_{p_x}(x) dx &= |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[\frac{i}{\hbar} x(p_x - p'_x) \right] dx \stackrel{(Г.20)}{=} \\ &= 2\pi |A|^2 \delta \left(\frac{p_x - p'_x}{\hbar} \right) \stackrel{(Г.19)}{=} 2\pi \hbar |A|^2 \delta(p'_x - p_x) = \delta(p'_x - p_x), \end{aligned}$$

Откуда $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$.

Выпишем собственные функции оператора проекции импульса:

$$\boxed{\Psi_{p_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_x x \right]}. \quad (3.14)$$

Предлагаем самостоятельно проверить свойства собственных функций и собственных значений \hat{p}_x . Как и в случае с \hat{L}_z , спектр \hat{p}_x будет тоже невырожденным. \square

Пример 3.7. Найти собственные функции и собственные значения оператора \hat{F}^2 , зная базис и спектр оператора \hat{F} .

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что собственные функции не изменятся, а собственные значения возведутся в квадрат. \square

Следствие 1. Если невырожденные собственные значения оператора \hat{F} располагаются симметрично относительно нуля, то собственные значения \hat{F}^2 будут двукратно вырождены.

Следствие 2. Если функция $f(z)$ допускает разложения в ряд Тейлора, а у оператора \hat{F} известны базис и спектр, то

$$f(\hat{F})\Psi_n(\xi) = f(F_n)\Psi_n(\xi). \quad (3.15)$$

Проясним теперь смысл коэффициентов разложения произвольной функции $\Phi(\xi)$ по базису оператора \hat{F} (см. таблицу 3.1). Для определенности ограничимся случаем дискретного спектра:

$$\Phi(\xi) = \sum_n c_n \Psi_n(\xi). \quad (3.16)$$

Функция $\Phi(\xi)$ задает такое состояние, в котором в общем случае величина F не имеет определенного значения. Данный факт проявляется в том, что при многократных измерениях получается некоторый разброс наблюдаемых значений F . Каждое из них появляется с вероятностью

$$w_n = |c_n|^2. \quad (3.17)$$

Если известны наблюдаемые значения величины F в состоянии $\Psi(\xi)$ и вероятности их обнаружения, то в соответствии с теоремой о математическом ожидании для вычисления среднего значения можно использовать выражение:

$$\langle F \rangle = \sum_n F_n w_n = \sum_n F_n |c_n|^2, \quad (3.18)$$

которое эквивалентно (3.1).

Пример 3.8. Плоский ротатор приведен в состояние с волновой функцией

$$\Phi(\varphi) = A[1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi]. \quad (3.19)$$

Найти: наблюдаемые значения L_z , вероятности их обнаружения, $\langle L_z \rangle$, $\langle (\Delta L_z)^2 \rangle$.

Решение. Специфическая зависимость $\Phi(\varphi)$ позволяет решить задачу алгебраическими методами на основе формулы Эйлера и результатов примера 3.5. Вначале разложим функцию $\Phi(\varphi)$ по базису оператора \hat{L}_z [см. (1.13)]:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= A \left[1 + \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2} \right] \quad (1.11) \\ &= \sqrt{2\pi} A \left[\Psi_0(\varphi) + \frac{\Psi_1(\varphi)}{2} + \frac{\Psi_{-1}(\varphi)}{2} + \frac{\Psi_2(\varphi)}{2} + \frac{\Psi_{-2}(\varphi)}{2} \right]. \quad (3.20) \end{aligned}$$

Выражение (3.20) приведено к виду (3.16) с ненулевыми коэффициентами $c_0 = \sqrt{2\pi} A$, $c_{\pm 1} = c_{\pm 2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} A$. Нормировочную константу удобно найти из условия

$$\sum_m |c_m|^2 = 1,$$

Откуда $A = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$; $c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $c_{\pm 1} = c_{\pm 2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Таким образом, при измерении будут наблюдаться следующие значения L_z : $L_{z,0}$ с вероятностью $\frac{1}{2}$ и $L_{z,\pm 1} = \pm \hbar$, $L_{z,\pm 2} = \pm 2\hbar$ с одинаковыми вероятностями $w_{\pm 1} = w_{\pm 2} = \frac{1}{8}$.

Средние значения вычисляются по формуле (3.18):

$$\langle L_z \rangle = \sum L_{z,m} w_m = 0.$$

Для вычисления среднеквадратичного отклонения воспользуемся результатом примера (3.7):

$$\langle (\Delta L_z)^2 \rangle = \langle L_z^2 \rangle - \langle L_z \rangle^2 = \langle L_z^2 \rangle = \sum_m L_{z,m}^2 w_m = \frac{5}{4} \hbar^2.$$

□

3.3. Совместная измеримость физических величин. Соотношение неопределенностей

Физические величины \hat{F} и \hat{G} называются *измеримыми совместно*, если существуют такие состояния, в каждом из которых будет измерима как величина F , так и G . Математически это выражается в наличии у операторов \hat{F} и \hat{G} *общих* собственных функций. Существование общих собственных функций проверяется с помощью следующего критерия:

необходимым и достаточным условием существования у линейных⁴ операторов общих собственных функций является коммутация данных операторов.

У операторов неизмеримых совместно величин, естественно, общих собственных функций нет. При совместном измерении таких величин в произвольном состоянии всегда наблюдается разброс наблюдаемых значений. Величина этого разброса, характеризуемая среднеквадратичными отклонениями, удовлетворяет неравенству

$$\langle (\Delta F)^2 \rangle \langle (\Delta G)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \langle B \rangle^2, \quad (3.21)$$

называемому *соотношением неопределенностей Гейзенберга*. Здесь \hat{B} — самосопряженный оператор (см. задачу 21), определяемый из соотношения:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = i\hat{B}. \quad (3.22)$$

Все усреднения в (3.21) производятся в *одном и том же* состоянии.

Пример 3.9. *Записать соотношение неопределенностей для декартовой координаты и соответствующей проекции импульса.*

Решение. Соответствующее соотношение неопределенностей может быть получено с использованием выражения (2.17), которое по форме соответствует (3.22). Поэтому достаточно сделать в (3.21) замены:

⁴Самосопряженность здесь не требуется!

$F \rightarrow x, G \rightarrow p_x, B \rightarrow \hbar$:

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle \langle (\Delta p_x)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} \hbar^2. \quad (3.23)$$

Проанализируем соотношение (3.23). Зададимся целью *неограниченного* снижения неопределенности, скажем, координаты. Будем для этого подбирать соответствующие состояния. При этом в силу *ненулевой* правой части (3.23) неопределенность импульса *обязана неограниченно возрастать*.

Исследуем теперь соотношение (3.23) для макромира. Рассмотрим, например, движение тела массой 1 кг со скоростью 1 м/с. Пусть приемлемой погрешностью в определении скорости будет 0,001 м/с. Оценим с помощью соотношения неопределенностей (3.23) предельно достижимую точность в определении координаты. Она оказывается порядка $5 \cdot 10^{-32}$ м, что много меньше размеров атомного ядра. \square

Таким образом, *в макромире соотношение неопределенностей практически не сказывается*. Можно сказать, что физическая система будет микрообъектом, если в соотношении Гейзенберга неопределенности будут сравнимы со средними значениями физических величин. Поэтому соотношение неопределенностей удобно использовать для оценки различных физических величин в квантовых системах.

Пример 3.10. *Частица массы m совершает одномерное финитное движение вдоль отрезка длиной a . Оценить наименьшую энергию частицы.*

Решение. Если считать, что неопределенность координаты порядка длины отрезка, то, вспоминая нерелятивистскую связь между энергией и импульсом, получаем $E_{\min} \gtrsim \hbar^2 / (ma^2)$. \square

Задачи для самостоятельного решения

27. Частица приведена в состояние с волновой функцией

$$\Psi(x) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi n x}{a} & \text{при } 0 \leq x \leq a; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } x > a, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, \dots$. Вычислить $\langle x \rangle$, $\langle (\Delta x)^2 \rangle$, $\langle p_x \rangle$, $\langle (\Delta p_x)^2 \rangle$.
(Ответ: $a/2$, $\frac{a^2}{2} \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2 n^2} \right]$, 0, $\left[\frac{\pi n \hbar}{a} \right]^2$ соответственно.)

28. Показать, что функция $\Psi(x) = xe^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = \frac{d^2}{dx^2} - x^2$ и найти соответствующее собственное значение.

29. Показать, что функция $\Psi(\theta) = \cos \theta$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d}{d\theta} \right)$ и найти соответствующее собственное значение.

30. Показать, что функция $\Psi(\theta, \varphi) = \sin \theta e^{\pm i\varphi}$ является собственной функцией оператора L^2 [см. (2.32)] и найти соответствующее собственное значение.

31. Показать, что функция $\Psi(\xi) = \frac{\sin \xi}{\xi}$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{2}{\xi} \frac{d}{d\xi}$ и найти соответствующее собственное значение.

32. Показать, что функция $\Psi(\rho) = e^{-\rho/3} \rho^3$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} - \frac{6}{\rho^2}$ и найти соответствующее собственное значение.

33. Найти собственные значения и собственные функции оператора \hat{p} . (Ответ: \mathbf{p} — произвольный вещественный вектор; $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = (2\pi\hbar)^{-3/2} \exp[i\mathbf{p}\mathbf{r}/\hbar]$.)

34. Найти собственные значения и соответствующие собственные функции антиэрмитова оператора $\frac{\partial}{\partial x}$. В чем заключается принципиальное отличие ответа от случая эрмитова оператора?

35. Записать и проанализировать соотношение неопределенностей для случая совместно измеримых величин.

36. Среди величин \mathbf{r} , \mathbf{p} , \mathbf{L} , L^2 найти пары совместно измеримых. Для совместно неизмеримых записать соотношения неопределенностей.

37. Проверить соотношение (3.23) для задачи 27 и волнового пакета из примера 1..3. (Указание: см. пример 3..3.)

38. Зная заряд электрона e и его массу m_e , оценить размер атома. (Ответ: $\hbar^2/(m_e e^2)$.)