Проф. Копытин И.В. и доц. Чуракова Т.А.

Лабораторные занятия
по курсу «Квантовая механика»
Направление 03.03.03 – «Радиофизика»
Бакалавры, 3 курс

Задание на период с **17** марта по **28** марта

1. Разобрать разделы **3.1-3.3** из учебного пособия
«Квантовая механика в примерах и задачах»
(авторы – И.В. Копытин, А.С. Корнев, Н.Л. Манаков)
Его можно найти на сайте **vk.com/as_kornev**
в разделе «Квантовая теория. Методички. **QM-prblm.pdf»**.
Ниже прилагается скан указанных разделов.

2. Уделить особое внимание разбираемым в них примерам,
т.е. уметь решить эти задачи самостоятельно.

3. Решить самостоятельно задачи №№ **29-30, 33, 34**

Глава 3.

Измеримость физических величин

3.1. Средние значения физических величин

Измерение физических величин в квантовой и классической механике существенно различается. Прежде всего квантовую систему нужно привести в то состояние, в котором величину F необходимо измерить. Пусть волновая функция этого состояния $\Psi(\xi)$[1]. В результате того или иного измерения состояние микрообъекта, как правило, разрушается (например, для фиксации летящего электрона на его пути ставят фотопластинку; после взаимодействия с ней этот электрон поглощается и уже не может быть зафиксирован повторно тем же способом). Для повторного измерения квантовую систему необходимо вновь привести в то же самое состояние и т.д. Среднее значение величины F получается усреднением результатов таких многократных измерений. Если известна волновая функция квантовой системы, то среднее значение F вычисляется по формуле

$$\boxed{\langle F\rangle = \int \Psi^*(\xi)\hat{F}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi,} \tag{3.1}$$

где $\hat{F}$ — оператор величины F. Формулу (3.1) можно также понимать как определение оператора величины F. Волновая функция в (3.1) должна быть нормирована на 1 в соответствии с (1.4). Если же используется ненормированная волновая функция *финитного движения*, то формулу (3.1) необходимо обобщить следующим образом:

$$\langle F\rangle = \frac{\int \Psi^*(\xi)\hat{F}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\int |\Psi(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi}.$$

Среднее значение по своему смыслу должно быть величиной вещественной.

[1]зависимость волновой функции от времени не учитываем, так как в данном разделе она не существенна

Пример 3.1. *Показать, что необходимым и достаточным условием вещественности среднего значения величины F является самосопряженность ее оператора $\hat{F}$.*

Решение. Докажем вещественность среднего значения F, предполагая $\hat{F}$ самосопряженным:

$$\langle F\rangle^* \overset{(3.1)}{=} \int \Psi(\xi)\hat{F}^*\Psi^*(\xi)\,\mathrm{d}\xi \overset{(2.39)}{=} \int \Psi^*(\xi)\hat{F}\Psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi \overset{(3.1)}{=} \langle F\rangle.$$

Доказать обратное утверждение несложно. □

Таким образом, *для вещественности среднего значения физической величины оператор этой физической величины должен быть самосопряженным.* Помимо линейности, это второе требование, предъявляемое к оператору физической величины.

Формулу среднего значения F в состоянии с волновой функцией $\Psi(\xi)$ можно также представить в дираковских обозначениях:

$$\boxed{\langle F\rangle = \langle\Psi|\,\hat{F}\,|\Psi\rangle\,.} \qquad (3.2)$$

Пример 3.2. *Показать, что среднее значение квадрата физической величины F неотрицательно.*

Решение. В соответствии со сказанным выше оператор $\hat{F}$ должен быть самосопряженным. Поэтому $\hat{F}^2$ тоже будет самосопряженным [см. (2.37)], а $\langle F^2\rangle$ — вещественным. Дальнейшее доказательство удобно проводить в дираковских обозначениях, предполагая $\hat{F} = \hat{F}^\dagger$:

$$\langle F^2\rangle \overset{(3.2)}{=} \langle\Psi|\,\hat{F}^2\,|\Psi\rangle = \langle\Psi|\,\hat{F}|\,\hat{F}\Psi\rangle \overset{(2.40)}{=} \langle\hat{F}\Psi\,|\,\hat{F}\Psi\rangle = \int |\hat{F}\Psi(\xi)|^2\mathrm{d}\xi.$$

Последний интеграл будет величиной неотрицательной, что и доказывает наше утверждение. □

Следует предостеречь читателя от возможной путаницы между $\langle F^2\rangle$ и $\langle F\rangle^2$. И вообще? $\langle f(F)\rangle \neq f(\langle F\rangle)$ только за исключением случая линейной функции $f(z)$.

Описанный выше способ измерения физической величины F дает с математической точки зрения последовательность случайных чисел. Характеристикой их разброса относительно среднего значения служит *среднеквадратичное отклонение*:

$$\boxed{\langle(\Delta F)^2\rangle \overset{\mathrm{def}}{=} \langle(F - \langle F\rangle)^2\rangle.} \qquad (3.3)$$

Более удобной формулой для вычисления $\langle(\Delta F)^2\rangle$ по сравнению с (3.3) является

$$\boxed{\langle(\Delta F)^2\rangle = \langle F^2\rangle - \langle F\rangle^2.} \tag{3.4}$$

Пример 3.3. *Для волнового пакета из примера 1..3 вычислить* $\langle x\rangle$, $\langle(\Delta x)^2\rangle$; $\langle p_x\rangle$, $\langle(\Delta p_x)^2\rangle$.

Решение. Нормировочная константа вычислена в примере 1..3, так что нормированная волновая функция имеет вид

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}}}\exp\left[-\frac{x^2}{2x_0^2} + \mathrm{i}k_0x\right], \tag{3.5}$$

а средние значения вычисляются по формуле (3.1).

Для координаты

$$\langle x\rangle = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right]\mathrm{d}x = 0$$

вследствие нечетности подынтегральной функции. Обратите внимание на исчезновение множителя $\mathrm{e}^{\mathrm{i}k_0x}$ при возведении его модуля в квадрат! Для среднеквадратичного отклонения координаты

$$\langle(\Delta x)^2\rangle \overset{(3.4)}{=} \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right]\mathrm{d}x =$$
$$= (x = x_0\xi) = \frac{x_0^2}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\xi^2\mathrm{e}^{-\xi^2}\mathrm{d}\xi \overset{(\mathrm{A}.3)}{=} \frac{x_0^2}{2}.$$

Оператор импульса — дифференциальный. Поэтому

$$\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x)\hat{p}_x\Psi(x)\,\mathrm{d}x = -\mathrm{i}\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x)\,\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\frac{\mathrm{i}\hbar}{x_0\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(-\frac{x}{x_0^2} + \mathrm{i}k_0\right)\exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right]\mathrm{d}x = \hbar k_0;$$

$$\langle p_x^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x)\hat{p}_x^2\Psi(x)\,\mathrm{d}x = -\hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(x)\,\frac{\partial^2\Psi(x)}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x =$$
$$= -\hbar^2\underbrace{\Psi^*(x)\,\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \hbar^2\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x}\right|^2\mathrm{d}x =$$

$$
= \frac{\hbar^2}{x_0\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x_0^4} + k_0^2\right) \exp\left[-\frac{x^2}{x_0^2}\right] \mathrm{d}x = \frac{\hbar^2}{2x_0^2} + \hbar^2 k_0^2;
$$

$$
\langle (\Delta p_x)^2 \rangle \overset{(3.4)}{=} \langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2 = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}.
$$

Рекомендуем самостоятельно проделать все промежуточные выкладки.
□

3.2. Определенные значения физических величин

Описанная выше методика измерения физической величины F у микрообъекта дает ненулевые значения $\langle (\Delta F)^2 \rangle$ даже в случае идеального прибора с нулевой погрешностью. Такая *неопределенность* в значении величины F есть объективное свойство движения в микромире. Поэтому возникает проблема поиска состояний с *определенными* значениями F. Определенность (измеримость) величины F в некотором состоянии квантовой системы означает, что при каждом акте ее измерения будет получаться *одно и то же значение* этой величины. Данная проблема решается, если отождествить получаемые в эксперименте значения физической величины F с *собственными значениями* ее оператора $\hat{F}$, а соответствующие состояния изображать соответствующими этим значениям *собственными функциями* оператора $\hat{F}$:

$$
\boxed{\hat{F}\Psi_F(\xi) = F\Psi_F(\xi).} \tag{3.6}
$$

С математической точки зрения уравнение (3.6) представляет собой задачу собственных функций и собственных значений оператора $\hat{F}$. Она требует отыскания *нетривиальных* $[\Psi_F(\xi) \not\equiv 0]$ решений уравнения (3.6) с заданными граничными условиями. Выбор последних диктуется физическими стандартными условиями, которым подчиняется волновая функция (конечность, однозначность, непрерывность). В общем случае $\hat{F}$ представляет собой линейный дифференциальный оператор, так что уравнение (3.6) является *линейным однородным* дифференциальным уравнением[2]. Однородность приводит к неоднозначности его решений: они определены с точностью до произвольного постоянного множителя, т.е. должны быть нормированы.

[2]как правило, не выше *второго* порядка

Пример 3.4. *Показать, что функция* $\Psi(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$ *является собственной функцией оператора* $\hat{F} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x^2$ *и найти соответствующее собственное значение.*

Решение. Необходимо лишь показать, что действие оператора $\hat{F}$ на функцию $\Psi(x)$ приводит к умножению последней на некоторую *константу.* Ее значение при этом будет получено автоматически:

$$\hat{F}\Psi(x) = \left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x^2\right)\mathrm{e}^{-x^2/2} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2} - x^2\mathrm{e}^{-x^2/2} =$$
$$= -\mathrm{e}^{-x^2/2} = \underbrace{-1}_{F}\,\Psi(x).$$

Итак, данное в условии утверждение доказано; найдено собственное значение $F = -1$. □

Собственные значения и собственные функции линейных эрмитовых операторов обладают рядом специфических свойств. Перечислим их:

1) собственные значения вещественны;

2) собственные функции, соответствующие *различным* собственным значениям, взаимно ортогональны[3];

3) система собственных функций *полна* в классе тех функций, на которых этот оператор задается, т.е. она образует *базис* оператора.

Математические выражения важнейших свойств собраны в таблице 3.1 применительно к операторам с дискретным и непрерывным спектром.

Пример 3..4 не характерен для задачи собственных функций и собственных значений оператора $\hat{F}$. Обычно неизвестными бывают как собственные значения F, так и собственные функции $\Psi_F(\xi)$.

Пример 3.5. *Найти наблюдаемые значения* L_z *и соответствующие им волновые функции.*

Решение. В уравнении для собственных функций и собственных значений

$$\hat{L}_z\Psi = L_z\Psi$$

Неизвестными являются как L_z, так и Ψ. Это уравнение удобно переписать в сферической системе координат, где вид $\hat{L}_z$ будет наиболее

[3] Собственные функции, соответствующие одному и тому же *вырожденному* собственному значению, *не обязаны* быть ортогональными; из них, однако, можно построить *ортогональные линейные комбинации* (процедура Грама–Шмидта).

простым [см. (2.31)]:

$$-\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi(\varphi)}{\partial\varphi} = L_z\Psi(\varphi); \qquad 0 \leqslant \varphi < 2\pi. \tag{3.7}$$

Это линейное однородное дифференциальное уравнение первого порядка. Поэтому его решение ищем в виде

$$\Psi(\varphi) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\varphi}, \tag{3.8}$$

где A — произвольная ненулевая константа, обусловленная однородностью уравнения (2.31), λ — *подлежащая определению* константа. Выбор решения в виде (3.8) обеспечивает *конечность* (почему?) и *непрерывность* волновой функции.

После подстановки (3.8) дифференциальное уравнение (3.7) превращается в алгебраическое:

$$\hbar\lambda = L_z. \tag{3.9}$$

В уравнении (3.8) неизвестное L_z выражается через неизвестное λ. Тем не менее, значения λ определяются требованием *однозначности*: функция полярного угла должна быть 2π-периодичной (см. пример 1..4). Поэтому λ может принимать *только целые значения*: $\lambda_{m_l} = m_l = 0, \pm1, \ldots$ Соответственно

$$\boxed{L_{z,m_l} \overset{(3.9)}{=} \hbar\, m_l; \qquad m_l = 0, \pm1, \ldots} \tag{3.10}$$

В том же примере получены и нормированные собственные функции (1.11).

Таким образом, спектр оператора $\hat{L}_z$ дискретный и невырожденный.

Рекомендуем самостоятельно проверить свойства собственных значений и собственных функций линейного эрмитова оператора $\hat{L}_z$. □

Пример 3.6. *Найти наблюдаемые значения проекции импульса и соответствующие им волновые функции.*

Решение. Для удобства рассмотрим декартову компоненту импульса p_x. Вид оператора $\hat{p}_x$ дается выражением (2.15), так что уравнение для собственных функций и собственных значений принимает вид:

$$-\mathrm{i}\hbar\,\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x} = p_x\Psi(x). \tag{3.11}$$

Неизвестными здесь будут как сама функция, так и собственное значение p_x. В отличие от (3.7) аргумент функции изменяется в *бесконечных* пределах.

Таблица 3.1. Свойства собственных значений и собственных функций линейного эрмитова оператора

Свойство	Дискретный спектр	Непрерывный сректр
уравнение	$\hat{F}\Psi_n(\xi) = F_n\Psi_n(\xi)$	$\hat{F}\Psi_F(\xi) = F\Psi_F(\xi)$
ортонорм.	$\int \Psi^*_{n'}(\xi)\Psi_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \delta_{n'n}$	$\int \Psi^*_{F'}(\xi)\Psi_F(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \delta(F'-F)$
полнота	$\sum_n \Psi^*_n(\xi)\Psi_n(\xi') = \delta(\xi'-\xi)$	$\int \Psi^*_F(\xi)\Psi_F(\xi')\,\mathrm{d}F = \delta(\xi'-\xi)$
разлож.	$\Phi(\xi) = \sum_n c_n\Psi_n(\xi)$	$\Phi(\xi) = \int c(F)\Psi_F(\xi)\,\mathrm{d}F$
по	$c_n = \int \Psi^*_n(\xi)\Phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$	$c(F) = \int \Psi^*_F(\xi)\Phi(\xi)\,\mathrm{d}\xi$
базису	$\sum_n \lvert c_n\rvert^2 = 1$	$\int \lvert c(F)\rvert^2\,\mathrm{d}F = 1$

Подобно (3.7) уравнение (3.11) является линейным однородным дифференциальным уравнением первого порядка. Поэтому его решение также ищется в виде

$$\Psi(x) = A\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda x} \tag{3.12}$$

с неизвестной в общем случае *комплексной* константой λ.

Выражение (3.12) удовлетворяет условиям однозначности и непрерывности функции $\Psi(x)$. Подстановка (3.12) в уравнение (3.11) превращает его в алгебраическое уравнение

$$p_x = \hbar\lambda \tag{3.13}$$

с двумя неизвестными p_x и λ. Чтобы определить допустимые значения λ, представим эту константу в явном комплексном виде:

$$\lambda = \lambda_0 + \mathrm{i}\mu_0,$$

где λ_0 и μ_0 — вещественные. При таком представлении λ легко заметить, что функция (3.12) будет конечной только при $\mu_0 = 0$, т.е. при *вещественных* λ. Поэтому, в соответствии с (3.13), собственным значением проекции импульса будет *произвольное вещественное число*, т.е. у оператора $\hat{p}_x$ будет *непрерывный* спектр.

Вычислим теперь нормировочную константу. В соответствии с табл. 3.1, собственные функции оператора с непрерывным спектром должны быть нормированы на δ-функцию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*_{p'_x}(x)\Psi_{p_x}(x)\,\mathrm{d}x = |A|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,x(p_x - p'_x)\right]\,\mathrm{d}x \overset{(\Gamma.20)}{=}$$
$$= 2\pi|A|^2\delta\left(\frac{p_x - p'_x}{\hbar}\right) \overset{(\Gamma.19)}{=} 2\pi\hbar|A|^2\delta(p'_x - p_x) = \delta(p'_x - p_x),$$

Откуда $A = 1/\sqrt{2\pi\hbar}$.

Выпишем собственные функции оператора проекции импульса:

$$\boxed{\Psi_{p_x}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\,\exp\left[\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\,p_x x\right].} \tag{3.14}$$

Предлагаем самостоятельно проверить свойства собственных функций и собственных значений $\hat{p}_x$. Как и в случае с $\hat{L}_z$, спектр $\hat{p}_x$ будет тоже невырожденным. □

Пример 3.7. *Найти собственные функции и собственные значения оператора $\hat{F}^2$, зная базис и спектр оператора $\hat{F}$.*

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что собственные функции не изменятся, а собственные значения возведутся в квадрат. □

Следствие 1. Если *невырожденные* собственные значения оператора $\hat{F}$ располагаются *симметрично* относительно нуля, то собственные значения $\hat{F}^2$ будут *двукратно вырождены.*

Следствие 2. Если функция $f(z)$ допускает разложения в ряд Тейлора, а у оператора $\hat{F}$ известны базис и спектр, то

$$f(\hat{F})\Psi_n(\xi) = f(F_n)\Psi_n(\xi). \tag{3.15}$$

Проясним теперь смысл коэффициентов разложения произвольной функции $\Phi(\xi)$ по базису оператора $\hat{F}$ (см. таблицу 3.1). Для определенности ограничимся случаем дискретного спектра:

$$\Phi(\xi) = \sum_n c_n\Psi_n(\xi). \tag{3.16}$$

Функция $\Phi(\xi)$ задает такое состояние, в котором в общем случае величина F не имеет определенного значения. Данный факт проявляется в том, что при многократных измерениях получается некоторый *разброс наблюдаемых* значений F. Каждое из них появляется *с вероятностью*

$$w_n = |c_n|^2. \tag{3.17}$$

Если известны наблюдаемые значения величины F в состоянии $\Psi(\xi)$ и вероятности их обнаружения, то в соответствии с теоремой о математическом ожидании для вычисления среднего значения можно использовать выражение:

$$\langle F\rangle = \sum_n F_n w_n = \sum_n F_n |c_n|^2, \tag{3.18}$$

которое эквивалентно (3.1).

Пример 3.8. *Плоский ротатор приведен в состояние с волновой функцией*

$$\Phi(\varphi) = A[1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi]. \tag{3.19}$$

Найти: наблюдаемые значения L_z, вероятности их обнаружения, $\langle L_z\rangle$, $\langle(\Delta L_z)^2\rangle$.

Решение. Специфическая зависимость $\Phi(\varphi)$ позволяет решить задачу алгебраическими методами на основе формулы Эйлера и результатов примера 3..5. Вначале разложим функцию $\Phi(\varphi)$ по базису оператора $\hat{L}_z$ [см. (1.13)]:

$$\Phi(\varphi) = A\left[1 + \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} + \frac{e^{2i\varphi} + e^{-2i\varphi}}{2}\right] \overset{(1.11)}{=}$$
$$= \sqrt{2\pi}\, A\left[\Psi_0(\varphi) + \frac{\Psi_1(\varphi)}{2} + \frac{\Psi_{-1}(\varphi)}{2} + \frac{\Psi_2(\varphi)}{2} + \frac{\Psi_{-2}(\varphi)}{2}\right]. \tag{3.20}$$

Выражение (3.20) приведено к виду (3.16) с *ненулевыми* коэффициентами $c_0 = \sqrt{2\pi}\, A$, $c_{\pm 1} = c_{\pm 2} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\, A$. Нормировочную константу удобно найти из условия

$$\sum_m |c_m|^2 = 1,$$

Откуда $A = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi}}$; $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $c_{\pm 1} = c_{\pm 2} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

Таким образом, при измерении будут наблюдаться следующие значения L_z: $L_{z,0}$ с вероятностью $\dfrac{1}{2}$ и $L_{z,\pm 1} = \pm\hbar$, $L_{z,\pm 2} = \pm 2\hbar$ с одинаковыми вероятностями $w_{\pm 1} = w_{\pm 2} = \dfrac{1}{8}$.

Средние значения вычисляются по формуле (3.18):

$$\langle L_z\rangle = \sum L_{z,m} w_m = 0.$$

Для вычисления среднеквадратичного отклонения воспользуемся результатом примера (3..7):

$$\langle(\Delta L_z)^2\rangle = \langle L_z^2\rangle - \langle L_z\rangle^2 = \langle L_z^2\rangle = \sum_m L_{z,m}^2 w_m = \frac{5}{4}\,\hbar^2.$$

□

3.3. Совместная измеримость физических величин. Соотношение неопределенностей

Физические величины $\hat{F}$ и $\hat{G}$ называются *измеримыми совместно*, если существуют такие состояния, в каждом из которых будет измерима как величина F, так и G. Математически это выражается в наличии у операторов $\hat{F}$ и $\hat{G}$ *общих* собственных функций. Существование общих собственных функций проверяется с помощью следующего критерия:

необходимым и достаточным условием существования у линейных[4] *операторов общих собственных функций является коммутация данных операторов.*

У операторов неизмеримых совместно величин, естественно, общих собственных функций нет. При совместном измерении таких величин в *произвольном* состоянии *всегда наблюдается разброс наблюдаемых значений.* Величина этого разброса, характеризуемая среднеквадратичными отклонениями, удовлетворяет неравенству

$$\langle(\Delta F)^2\rangle\langle(\Delta G)^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\,\langle B\rangle^2, \tag{3.21}$$

называемому *соотношением неопределенностей Гейзенберга.* Здесь $\hat{B}$ — самосопряженный оператор (см. задачу 21), определяемый из соотношения:

$$[\hat{F}, \hat{G}] = \mathrm{i}\hat{B}. \tag{3.22}$$

Все усреднения в (3.21) производятся в *одном и том же* состоянии.

Пример 3.9. *Записать соотношение неопределенностей для декартовой координаты и соответствующей проекции импульса.*

Решение. Соответствующее соотношение неопределенностей может быть получено с использованием выражения (2.17), которое по форме соответствует (3.22). Поэтому достаточно сделать в (3.21) замены:

---

[4]Самосопряженность здесь не требуется!

$F \to x$, $G \to p_x$, $B \to \hbar$:

$$\boxed{\langle(\Delta x)^2\rangle\langle(\Delta p_x)^2\rangle \geqslant \frac{1}{4}\,\hbar^2.} \tag{3.23}$$

Проанализируем соотношение (3.23). Зададимся целью *неограниченного* снижения неопределенности, скажем, координаты. Будем для этого подбирать соответствующие состояния. При этом в силу *ненулевой* правой части (3.23) неопределенность импульса *обязана неограниченно возрастать*.

Исследуем теперь соотношение (3.23) для макромира. Рассмотрим, например, движение тела массой 1 *кг* со скоростью 1 *м/с*. Пусть приемлемой погрешностью в определении скорости будет 0,001 *м/с*. Оценим с помощью соотношения неопределенностей (3.23) предельно достижимую точность в определении координаты. Она оказывается порядка $5{\cdot}10^{-32}$ *м*, что много меньше размеров атомного ядра. □

Таким образом, *в макромире соотношение неопределенностей практически не сказывается.* Можно сказать, что физическая система будет микрообъектом, если в соотношении Гейзенберга неопределенности будут сравнимы со средними значениями физических величин. Поэтому соотношение неопределенностей удобно использовать для оценки различных физических величин в квантовых системах.

Пример 3.10. *Частица массы m совершает одномерное финитное движение вдоль отрезка длиной a. Оценить наименьшую энергию частицы.*

Решение. Если считать, что неопределенность координаты порядка длины отрезка, то, вспоминая нерелятивистскую связь между энергией и импульсом, получаем $E_{\min} \gtrsim \hbar^2/(ma^2)$. □

Задачи для самостоятельного решения

27. Частица приведена в состояние с волновой функцией

$$\Psi(x) = \begin{cases} A\sin\dfrac{\pi n x}{a} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a; \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ или } x > a, \end{cases}$$

где $n = 1, 2, \ldots$ Вычислить $\langle x\rangle$, $\langle(\Delta x)^2\rangle$, $\langle p_x\rangle$, $\langle(\Delta p_x)^2\rangle$.
(*Ответ*: $a/2$, $\frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2 n^2}\right]$, 0, $\left[\frac{\pi n\hbar}{a}\right]^2$ соответственно.)

28. Показать, что функция $\Psi(x) = x\mathrm{e}^{-x^2/2}$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - x^2$ и найти соответствующее собственное значение.

29. Показать, что функция $\Psi(\theta) = \cos\theta$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = -\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\right)$ и найти соответствующее собственное значение.

30. Показать, что функция $\Psi(\theta,\varphi) = \sin\theta\,\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\varphi}$ является собственной функцией оператора $\boldsymbol{L}^2$ [см. (2.32)] и найти соответствующее собственное значение.

31. Показать, что функция $\Psi(\xi) = \dfrac{\sin\xi}{\xi}$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} + \dfrac{2}{\xi}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}$ и найти соответствующее собственное значение.

32. Показать, что функция $\Psi(\rho) = \mathrm{e}^{-\rho/3}\rho^3$ является собственной функцией оператора $\hat{F} = \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + \dfrac{2}{\rho} - \dfrac{6}{\rho^2}$ и найти соответствующее собственное значение.

33. Найти собственные значения и собственные функции оператора $\hat{\boldsymbol{p}}$. (*Ответ*: $\boldsymbol{p}$ — произвольный вещественный вектор; $\Psi_{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{r}) = (2\pi\hbar)^{-3/2}\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}/\hbar]$.)

34. Найти собственные значения и соответствующие собственные функции антиэрмитова оператора $\dfrac{\partial}{\partial x}$. В чем заключается принципиальное отличие ответа от случая эрмитова оператора?

35. Записать и проанализировать соотношение неопределенностей для случая совместно измеримых величин.

36. Среди величин $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{L}$, $\boldsymbol{L}^2$ найти пары совместно измеримых. Для совместно неизмеримых записать соотношения неопределенностей.

37. Проверить соотношение (3.23) для задачи 27 и волнового пакета из примера 1..3. (*Указание*: см. пример 3..3.)

38. Зная заряд электрона e и его массу m_e, оценить размер атома. (*Ответ*: $\hbar^2/(m_e e^2)$.)