

Занятие 2

Построение ФСР

однородных систем линейных
алгебраических уравнений.

Общее решение однородной системы.

$$\underline{725} \quad \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -a_1 \rightarrow a_2 \\ -3a_1 \rightarrow a_3 \\ -4a_1 \rightarrow a_3 \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } A = 2$$

$$\dim S_0 = 4 - 2 = 2$$

x_1, x_3 - главные неизвестные,
 x_2, x_4 - свободные неизвестные

1) Положим $x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0, x_1 = 2$

$$\Rightarrow \gamma^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Положим $x_2 = 0, x_4 = 7 \Rightarrow x_3 = -5, x_1 = 2$

$$\Rightarrow \gamma^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\text{ФСР: } \{\gamma^1, \gamma^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\alpha_{00} = c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2 = \begin{pmatrix} 2c_1 + 2c_2 \\ c_1 \\ -5c_2 \\ 7c_2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{727} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 5 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 9 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 2 & 14 \\ 0 & 3 & 21 \\ 0 & 7 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} A = 3 \Rightarrow \dim S_0 = 3 - 3 = 0$$

$$\Rightarrow \text{ФСП} = \emptyset \Rightarrow \exists! \text{ реш. } \boxed{\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \downarrow \quad \downarrow \end{matrix}}$$

$$\boxed{732} \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 7 & 10 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 8 & -6 \\ 0 & 3 & -6 & 13 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} -\alpha_1 + \alpha_3 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Rg} A = 3$$

$$\Rightarrow \dim S_0 = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = -x_3 - 2x_5 \\ x_2 + 5x_4 = 2x_3 + 3x_5 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

x_1, x_2, x_4 - главные неизвестные,

x_3, x_5 - свободные неизвестные

1) Положим $x_3 = 1, x_5 = 0 \Rightarrow x_4 = 0,$

$$x_2 = 2, x_1 = -3 \Rightarrow \delta^1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Положим $x_3=0, x_5=1 \Rightarrow x_4=0,$
 $x_2=3, x_1=-5 \Rightarrow \gamma^2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

ФСР: $\{\gamma^1, \gamma^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$
 $\downarrow \quad \downarrow$

$\alpha_{00} = c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2 = \begin{pmatrix} -3c_1 - 5c_2 \\ 2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}$
 $\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

735 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \text{Rg} A = 2, \dim S_0 = 3 - 2 = 1$

x_2 - свободная неизвестная

Положим $x_2 = 2 \Rightarrow x_3 = 7, x_1 = 13$

$\Rightarrow \gamma^1 = \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$
 \downarrow

ФСР: $\{\gamma^1\} = \left\{ \begin{pmatrix} 13 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}, \alpha_{00} = c_1 \gamma^1 = \begin{pmatrix} 13c_1 \\ 2c_1 \\ 7c_1 \end{pmatrix}$
 $\downarrow \quad \downarrow$

737

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 6 & 4 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & -11 \\ 6 & 4 & 1 & 4 & -13 \end{pmatrix}$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -6 & 0 & -18 \\ 0 & 0 & -9 & 0 & -27 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg} A = 2$$

$$\Rightarrow \dim S_0 = 5 - 2 = 3$$

x_2, x_4, x_5 - свободные неизвестные

1) Положим $x_2 = 3, x_4 = 0, x_5 = 0$

$$\Rightarrow x_3 = 0, x_1 = -2 \Rightarrow$$

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Положим $x_2 = 0, x_4 = 3, x_5 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_3 = 0, x_1 = -2 \Rightarrow$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3) Положим $x_2 = 0, x_4 = 0, x_5 = 3 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_3 = -9, x_1 = 8 \Rightarrow$$

$$\gamma^3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\{\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

$\alpha_{00} = c_1 \gamma^1 + c_2 \gamma^2 + c_3 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 2c_1 - 2c_2 + 8c_3 \\ 3c_1 \\ -9c_3 \\ 3c_2 \\ 3c_3 \end{pmatrix}$

3 вектора

741

$$B_1 = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 + 6x_5 = 0 \\ 5x_1 + 9x_2 + 7x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 + 11x_5 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 8x_3 + 5x_4 - 4x_5 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \\ 0 & -14 & -22 & -14 & 18 \\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27 \\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \\ 0 & 7 & 11 & 7 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}A = 2 \Rightarrow \dim S_0 = 5 - 2 = 3$$

$$AB_1^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 & 9 & 4 \\ -24 & -15 & 2 \\ 43 & 8 & 9 \\ -50 & 5 & -20 \\ -5 & 2 & -3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 90 - 96 + 86 - 50 - 30 = 0 & 27 - 60 + 16 + 5 + 12 = 0 & 12 + 8 + 8 - 20 - 12 = 0 \\ 150 - 216 + 301 - 280 - 35 = 0 & 45 - 135 + 56 + 20 + 14 = 0 & 20 + 18 + 63 - 80 - 21 = 0 \\ 120 - 72 - 43 + 50 - 55 = 0 & 36 - 45 - 8 - 5 + 22 = 0 & 16 + 6 - 9 + 20 - 33 = 0 \\ 30 - 144 + 344 - 250 + 20 = 0 & 9 - 90 + 64 + 25 - 8 = 0 & 4 + 12 + 72 - 100 + 12 = 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow строки матрицы B_1 являются решениями системы (*).

$$A \cdot B_2^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & -11 & -15 \\ 9 & 2 & 8 \\ -20 & 13 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12+8+18-20-18=0 & 3-44+4+13+24=0 & 27-60+16+5+12=0 \\ 20+18+63-80-21=0 & 5-99+14+52+28=0 & 45-135+56+20+14=0 \\ 16+5-9+20-33=0 & 4-33-2-13+44=0 & 36-45-8-5+22=0 \\ 4+12+72-100+12=0 & 1-66+16+65-16=0 & 9-30+64+25-8=0 \end{pmatrix}$$

⇒ Строки матрицы B_2 - решения системы (*)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -19 & -10 & 45 & 8 \\ 0 & 546 & 343 & -1400 & 245 \\ 0 & 78 & 49 & -200 & -35 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -19 & -10 & 45 & 8 \\ 0 & 78 & 49 & -200 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } B_1 = 2$$

Не все строки матрицы B_1 линейно независимы

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 0 & 46 & 1 & -72 & -19 \\ 0 & 84 & -10 & -112 & -34 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 0 & 46 & 1 & -72 & -19 \\ 0 & 42 & -5 & -56 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg } B_2 = 3$$

⇒ Строки матрицы B_2 образуют линейно независимую систему

Ответ B_2

Дома: П. 726, 729, 730, 736, 738, 742