Занятие 2

Построение ФСР однородных систем линейных алгебраических уравнений. Общее решение однородной системы.

725

$$\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & -6 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 17 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 21 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} -a_1 + \to a_2 \\ -3a_1 + \to a_2 \\ -4a_1 + \to a_3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\,A = 2$$

$$\dim S_0 = 4-2 = 2$$

x_1, x_3 – главные неизвестные,

x_2, x_4 – свободные неизвестные

1) Положим $x_2 = 1,\ x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0,\ x_1 = 2$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Положим $x_2 = 0,\ x_4 = 7 \Rightarrow x_3 = -5,\ x_1 = 2$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Следовательно, $\boxed{\text{ФСР}: \{\vec{\gamma}^1, \vec{\gamma}^2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}}$

$$\boxed{\vec{\alpha}_{00} = c_1\vec{\gamma}^1 + c_2\vec{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 2c_1+2c_2 \\ c_1 \\ -5c_2 \\ 7c_2 \end{pmatrix}}$$

727)

$$A=\begin{pmatrix}3&5&2\\4&7&5\\1&1&-4\\2&9&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-4\\0&2&14\\0&3&21\\0&7&14\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-4\\0&1&7\\0&1&7\\0&1&2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-4\\0&1&2\\0&0&5\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow \quad Rg\,A=3\Rightarrow \dim S_0=3-3=0$$

$\Rightarrow$ ФСР $=\varnothing \Longrightarrow \exists!$ реш. $\boxed{\underset{\downarrow}{\alpha}=\underset{\downarrow}{0}}$

732)

$$A=\begin{pmatrix}3&4&1&2&3\\5&7&1&3&4\\4&5&2&1&5\\7&10&1&6&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&1&-2&5&-3\\0&2&-4&8&-6\\0&3&-6&13&-9\end{pmatrix}\begin{matrix}-a_1\to a_3\\ \sim\end{matrix}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&1&-2&5&-3\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&-2&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&1&-1&2\\0&1&-2&5&-3\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\quad Rg\,A=3$$

$$\Rightarrow \dim S_0=5-3=2$$

$$\begin{cases}x_1+x_2-x_4=-x_3-2x_5\\ \quad x_2+5x_4=2x_3+3x_5\\ \qquad x_4=0\end{cases}$$

x_1, x_2, x_4 – главные неизвестные,

x_3, x_5 – свободные неизвестные

1) Положим $x_3=1$, $x_5=0\Rightarrow x_4=0$,

$x_2=2$, $x_1=-3\Rightarrow \underset{\downarrow}{\gamma}^1=\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix}$

2) Положим $x_3=0$, $x_5=1 \Rightarrow x_4=0$, $x_2=3$, $x_1=-5 \Rightarrow \vec{\gamma}^2=\begin{pmatrix}-5\\3\\0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned}&\text{ФСР: } \{\vec{\gamma}^1,\vec{\gamma}^2\}=\left\{\begin{pmatrix}-3\\2\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-5\\3\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\\ &\vec{\alpha}_{oo}=c_1\vec{\gamma}^1+c_2\vec{\gamma}^2=\begin{pmatrix}-3c_1-5c_2\\2c_1+3c_2\\c_1\\0\\c_2\end{pmatrix}\end{aligned}}$$

<u>735</u>

$$A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\3&5&-7\\4&-5&-6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-3\\0&-7&2\\0&-21&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&4&-3\\0&-7&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow Rg A=2$, $\dim S_0=3-2=1$

x_2 – свободная неизвестная

Положим $x_2=2 \Rightarrow x_3=7$, $x_1=13$

$\Rightarrow \vec{\gamma}^1=\begin{pmatrix}13\\2\\7\end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{ФСР: } \{\vec{\gamma}^1\}=\left\{\begin{pmatrix}13\\2\\7\end{pmatrix}\right\},\ \vec{\alpha}_{oo}=c_1\vec{\gamma}^1=\begin{pmatrix}13c_1\\2c_1\\7c_1\end{pmatrix}}$$

737

$$A=\begin{pmatrix}3&2&5&2&7\\6&4&7&4&5\\3&2&-1&2&-11\\6&4&1&4&-13\end{pmatrix}$$

$$A\sim\begin{pmatrix}3&2&5&2&7\\0&0&-3&0&-9\\0&0&-6&0&-18\\0&0&-9&0&-27\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}3&2&5&2&7\\0&0&1&0&3\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow Rg A=2$$

$$\Rightarrow \dim S_0=5-2=3$$

x_2, x_4, x_5 – свободные неизвестные

1) Положим $x_2=3,\ x_4=0,\ x_5=0$

$\Rightarrow x_3=0,\ x_1=-2 \Rightarrow \vec{\gamma}^1=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix}$

2) Положим $x_2=0,\ x_4=3,\ x_5=0\Rightarrow$

$\Rightarrow x_3=0,\ x_1=-2 \Rightarrow \vec{\gamma}^2=\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\3\\0\end{pmatrix}$

3) Положим $x_2=0,\ x_4=0,\ x_5=3\Rightarrow$

$\Rightarrow x_3=-9,\ x_1=8 \Rightarrow \vec{\gamma}^3=\begin{pmatrix}8\\0\\-9\\0\\3\end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{gathered}\text{ФСР: }\{\vec{\gamma}^1,\vec{\gamma}^2,\vec{\gamma}^3\}=\left\{\begin{pmatrix}-2\\3\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2\\0\\0\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\0\\-9\\0\\3\end{pmatrix}\right\}\\ \vec{\alpha}_{oo}=c_1\vec{\gamma}^1+c_2\vec{\gamma}^2+c_3\vec{\gamma}^3=\begin{pmatrix}-2c_1-2c_2+8c_3\\3c_1\\-9c_3\\3c_2\\3c_3\end{pmatrix}\end{gathered}}$$

741)

$$B_1=\begin{pmatrix}30 & -24 & 43 & -50 & -5\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3\end{pmatrix},$$

$$B_2=\begin{pmatrix}4 & 2 & 9 & -20 & -3\\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4\\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5=0\\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5=0\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5=0\\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5=0\end{cases} \qquad (*)$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 1 & 6\\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7\\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11\\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 6 & 8 & 5 & -4\\ 0 & -14 & -22 & -14 & 18\\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27\\ 0 & -21 & -33 & -21 & 27\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 6 & 8 & 5 & -4\\ 0 & 7 & 11 & 7 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow RgA=2\Rightarrow \dim S_0=5-2=3$$

$$AB_1^T=\begin{pmatrix}3 & 4 & 2 & 1 & 6\\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7\\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11\\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}30 & 9 & 4\\ -24 & -15 & 2\\ 43 & 8 & 9\\ -50 & 5 & -20\\ -5 & 2 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}90-96+86-50-30=0 & 27-60+16+5+12=0 & 12+8+18-20-18=0\\ 150-216+301-200-35=0 & 45-135+56+20+14=0 & 20+18+63-80-21=0\\ 120-72-43+50-55=0 & 36-45-8-5+22=0 & 16+6-9+20-33=0\\ 30-144+344-250+20=0 & 9-90+64+25-8=0 & 4+12+72-100+12=0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ строки матрицы B_1 являются решениями системы $(*)$

$$A \cdot B_2^T = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 & 6 \\ 5 & 9 & 7 & 4 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & -1 & 11 \\ 1 & 6 & 8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 2 & -11 & -15 \\ 9 & 2 & 8 \\ -20 & 13 & 5 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 12+8+18-20-18=0 & 3-44+4+13+24=0 & 27-60+16+5+12=0 \\ 20+18+63-80-21=0 & 5-99+14+52+28=0 & 45-135+56+20+14=0 \\ 16+6-9+20-33=0 & 4-33-2-13+44=0 & 36-45-8-5+22=0 \\ 4+12+72-100+12=0 & 1-66+16+65-16=0 & 9-90+64+25-8=0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Строки матрицы B_2 − решения системы (*)

$$B_1 = \begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & -50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -19 & -10 & 45 & 8 \\ 0 & 546 & 343 & -1400 & -245 \\ 0 & 78 & 49 & -200 & -35 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -19 & -10 & 45 & 8 \\ 0 & 78 & 49 & -200 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\, B_1 = 2$$

Не все строки матрицы B_1 линейно независимые

$$B_2 = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 0 & 46 & 1 & -72 & -19 \\ 0 & 84 & -10 & -112 & -34 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 0 & 46 & 1 & -72 & -19 \\ 0 & 42 & -5 & -56 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow Rg\, B_2 = 3$$

$\Rightarrow$ Строки матрицы B_2 образуют линейно независимую систему

$\boxed{\text{Ответ } B_2}$

Дома: П. 726, 729, 730, 736, 738, 742