Ограниченные функции

Функция $f(x)$ называется ограниченной сверху (снизу) на множестве $X \in \mathbf{R}$, если существует число $M \in \mathbf{R}$, такое, что для всех $x \in X$ выполняется условие

$$f(x) \leq M \ (f(x) \geq M).$$

Функция называется ограниченной на множестве, если она ограничена и сверху и снизу на этом множестве.

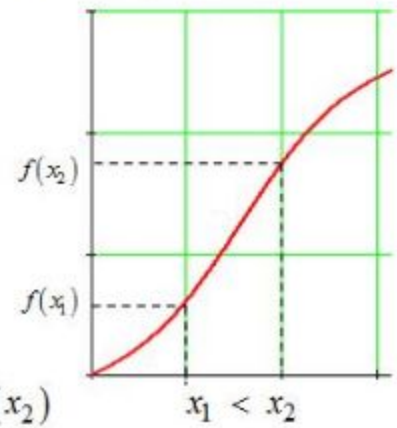
Примеры исследования функций на ограниченность

- Функция $y = x^2$ ограничена снизу на всей числовой оси, так как для любого x выполняется неравенство $x^2 \geq 0$, следовательно, $M = 0$. Данная функция не ограничена сверху.
- Функция $y = \operatorname{tg} x$ не ограничена на всей числовой оси, но ограничена на $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, так как $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ выполняется $0 \leq \operatorname{tg} x \leq 1$. Заметим, что для всех $M \leq 0$ и $N \geq 1$ так же $M \leq \operatorname{tg} x \leq N$.
- Функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой оси, так как для любого числа $M \geq 1$ выполняется $|\sin x| \leq M$.

Монотонные функции

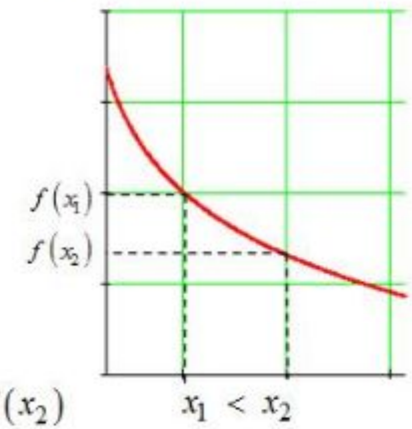
• Функция называется *возрастающей* на некотором промежутке X, лежащем в области её определения $D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ (знак неравенства $x_1 < x_2$ сохраняется).
• Функция называется *убывающей* на некотором промежутке $X \subset D(f)$, если для любых значений $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ (знак неравенства $x_1 < x_2$ меняется на противоположный).

Возрастающая функция



$f(x_1) < f(x_2)$

Убывающая функция



$f(x_1) > f(x_2)$

Возрастающая (убывающая) на промежутке функция называется *строго монотонной* на этом промежутке. Чтобы подчеркнуть характер монотонности, про возрастающие и убывающие функции часто говорят "монотонно возрастающая" и "монотонно убывающая".

Иногда используют понятия нестрогой монотонности:

Если для любых $x_1,\ x_2 \in X \subset D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \le f(x_2)$, то функция называется *неубывающей*.

Если для любых $x_1,\ x_2 \in X \subset D(f)$ из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) \ge f(x_2)$, то функция называется *невозрастающей*.

Примеры монотонных функций

- Функция $y(x) = x$ является монотонно возрастающей на всей действительной оси, так как для любых чисел x_1 и x_2, таких что $x_1 < x_2$ выполняется условие

$$y(x_1) = x_1 < x_2 = y(x_2).$$

- Функция $y(x) = \cos x$ является монотонно убывающей на промежутке $(0, \pi)$. Действительно, приращение функции можно представить следующим образом:

$$\Delta y = y(x_2) - y(x_1) = \cos x_2 - \cos x_1 = -2\sin\frac{x_2+x_1}{2} \cdot \sin\frac{x_2-x_1}{2}.$$

Так как для любых чисел x_1 и x_2 из промежутка $(0, \pi)$, таких что $x_1 < x_2$ имеем

$$0 < \frac{x_1 \pm x_2}{2} < \pi$$

и, следовательно,

$$\sin\frac{x_2 \pm x_1}{2} > 0, \text{ то } \Delta y < 0 \text{ или } y(x_1) < y(x_2),$$

т.е. $y = \cos x$ монотонно убывает на $(0, \pi)$.

Монотонность сложных функций

Пусть $y = f(g(x))$ – сложная функция, где функции $f(g)$ и $g(x)$ монотонно возрастают, для них выполняются неравенства:

$$\text{для } x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad g(x_1) < g(x_2) \text{ и для } g_1 < g_2 \quad \Rightarrow \quad f(g_1) < f(g_2).$$

Тогда для $x_1 < x_2$ следует, что $g(x_1) < g(x_2)$ и, значит, $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, то есть функция y является монотонно возрастающей.

Пусть функции $f(g)$ и $g(x)$ монотонно убывают, т.е. для них выполняются неравенства:

$$\text{для } x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad g(x_1) > g(x_2) \text{ и для } g_1 < g_2 \quad \Rightarrow \quad f(g_1) > f(g_2).$$

Тогда для $x_1 < x_2$ следует, что $g(x_1) > g(x_2)$ и, значит, $f(g(x_1)) < f(g(x_2))$, то есть функция y является монотонно возрастающей.

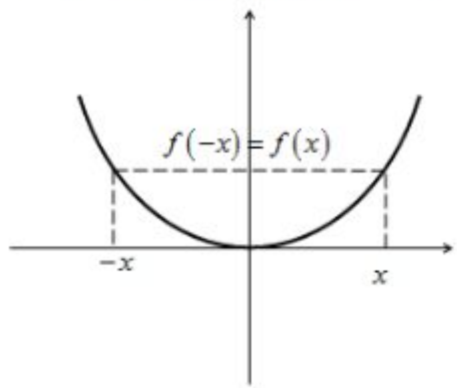
Пусть функция $g(x)$ монотонно возрастает, а функция $f(g)$ монотонно убывает, тогда для $x_1 < x_2$ следует, что $g(x_1) < g(x_2)$ и, значит, $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$, то есть функция y является монотонно убывающей.

Аналогично, если $g(x)$ монотонно убывает, а функция $f(g)$ монотонно возрастает, тогда для $x_1 < x_2$ следует, что $g(x_1) > g(x_2)$ и, значит, $f(g(x_1)) > f(g(x_2))$, то есть функция y является монотонно убывающей.

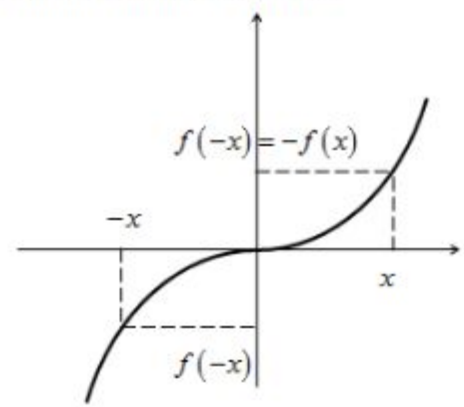
Четные и нечетные функции

Функция $f(x)$, определенная в симметричном интервале $(-l, l)$ называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Замечание. Исходя из определения, нетрудно понять, что графики четных функций симметричны относительно оси ординат, а графики нечетных функций симметричны относительно начала координат.



Четная функция



Нечетная функция

Примеры исследования функций на четность и нечетность

- Функция $f(x) = x - 3x^3$ – нечетна, так как $f(-x) = (-x) - 3(-x)^3 = -x + 3x^3 = -(x - 3x^3) = -f(x)$.

- Функция $f(x) = x\frac{2^x-1}{2^x+1}$ – четна, так как $f(-x) = (-x)\frac{2^{(-x)}-1}{2^{(-x)}+1} = -x\frac{\frac{1}{2^x}-1}{\frac{1}{2^x}+1} = -x\frac{(1-2^x)\cdot 2^x}{(1+2^x)\cdot 2^x} = x\frac{2^x-1}{2^x+1} = f(x)$.

Периодические функции

Функция $f(x)$, определенная в D, называется *периодической*, если существует число $T \neq 0$ такое, что $\forall x \in D$ выполняется $x \pm T \in D$ и $f(x \pm T) = f(x)$. Число T называется *периодом* функции.

Обычно, говоря о периоде, указывают наименьший положительный (*основной*) период функции $f(x)$, если он существует. Тогда kT $(k = \pm 1, \pm 2, \ldots)$ – период функции в широком смысле слова.

Константа является периодической функцией, не имеющей наименьшего положительного периода.

Теорема. *Если функция* $f(x)$, *определенная в* D_1, *имеет период* T_1, *а функция* $g(x)$, *определенная в* D_2, *– период* T_2, *то функция* $f(x) \pm g(x)$, *определенная в* $D = D_1 \cap D_2$ *будет периодической только в случае, если отношение* $\frac{T_1}{T_2}$ *– рациональное число; при этом ее период* T *– наименьшее общее кратное чисел* T_1 *и* T_2.

Примеры исследования функций на периодичность

Найти, если существует, период функции $f(x) = \sin ax$ $(a \neq 0)$.

Р е ш е н и е. Функция определена $\forall\ x \in \mathbf{R}$. По определению

$$\sin a(x+T) = \sin ax \text{ или } \sin(ax + aT) - \sin ax = 0$$

Последнее уравнение преобразуем, используя тригонометрическое тождество для разности синусов:

$$2\cos\left(ax + \frac{aT}{2}\right)\sin\frac{aT}{2} = 0.$$

Так как x – любое из $\mathbf{R}$, то последнее уравнение выполняется, если

$$\sin\frac{aT}{2} = 0, \text{ отсюда } \frac{aT}{2} = \arcsin 0 + \pi k = \pi k, \text{ т.е. } T = \frac{2\pi k}{a}.$$

Наименьшее положительное (отличное от нуля) T получим при $k = 1$. Итак, функция $f(x) = \sin ax$ – периодическая с периодом $T = \frac{2\pi}{a}$.

Замечание. Функции $\sin ax$, $\cos ax$ имеют период $T = \frac{2\pi}{a}$, функции $\operatorname{tg} ax$, $\operatorname{ctg} ax$ – период $T = \frac{\pi}{a}$.

Будет ли периодической функция $u(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$?

Р е ш е н и е . Функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = \sin\left(x\sqrt{2}\right)$ определены $\forall\ x \in \mathbf{R}$ и имеют периоды

$$T_1 = 2\pi \text{ и } T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \pi\sqrt{2}$$

соответственно. Тогда $u(x)$ определена $\forall\ x \in \mathbf{R}$.

Так как $\frac{T_1}{T_2} = \frac{2\pi}{\pi\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ – иррациональное число, то функция $u(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{2}\right)$ – непериодическая.

Каждой функции поставьте в соответствие одно из указанных свойств

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$	ограниченная
$f(x) = x + \sin x$	неограниченная
$f(x) = 100\cos x$	ограниченная
$f(x) = x\sin x$	неограниченная

Каждой функции поставьте в соответствие одно из указанных свойств

$f(x) = x \arcsin x$	ограничена сверху и снизу
$f(x) = \lvert\ln x\rvert$	ограниченная снизу
$f(x) = 3 - x^2$	ограниченная сверху
$f(x) = \lvert x\rvert - 5$	ограниченная снизу
$f(x) = \operatorname{arctg}^2 x$	ограничена сверху и снизу

Из указанных функций выделите ограниченные

- [x] $f(x) = \frac{2+\cos x}{3-\sin x}$
- [x] $f(x) = \cos 5x$
- [ ] $f(x) = \frac{1}{3x}$
- [x] $f(x) = \sin \frac{1}{x}$
- [ ] $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{x}{2}}$

Укажите наименьшее число, ограничивающее функцию $f(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \cos 5x$ сверху

- $\frac{5}{2}$
- $\frac{2}{3}$
- $\frac{4}{3}$
- $\frac{3}{2}$

Укажите наименьшее число, ограничивающее функцию $f(x) = 3\sin\left(\frac{1}{3x}\right)$ сверху

- $\frac{1}{3}$
- -1
- 1
- 3

Укажите наименьшее число, ограничивающее функцию $f(x) = e^{-|x|}$ сверху

- -1
- 0
- e
- 1

Укажите наименьшее число, ограничивающее функцию $f(x) = -|\ln x|$ сверху

- e
- -1
- 1
- 0

Отметьте все четные функции

- [ ] $2x^2 - x + 1$
- [ ] $xe^{-|x|}$
- [x] $x \operatorname{tg} x$
- [x] $\sin^2 \operatorname{tg} x$

Отметьте все четные функции

- [x] $\cos\frac{1}{x}$
- [x] $x\sin x$
- [ ] $e^x - e^{-x}$
- [ ] $4x^3 + x$

Отметьте все нечетные функции

- [ ] e^{x^3}
- [x] $2x^3 - 8x$
- [x] $x^2 \sin x$
- [ ] $\operatorname{tg} \frac{1}{1-x}$

Отметьте все нечетные функции:

- [ ] $|\sin x|$
- [x] $2x(x^2+1)$
- [x] xe^{x^2}
- [ ] $\mathrm{tg}(x-1)$

Отметьте все функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными

- [ ] $x^2 \cos x$
- [ ] $\sqrt[3]{x}(x + x^3)$
- [x] $x(x-2)^2$
- [ ] $x^3 e^{x^2}$

Отметьте все функции, не являющиеся ни четными, ни нечетными

- [x] $x^3 e^x$
- [ ] $\operatorname{tg}^2 \frac{1}{x}$
- [ ] $x^3 \cos x$
- [x] $\sqrt[3]{x}(x + |x|)$

Выберите все функции, монотонно возрастающие в области определения

- [ ] $x \operatorname{arctg} x$
- [x] $\operatorname{arctg} x$
- [x] $\log_2 \operatorname{arctg} x$
- [x] $x + \operatorname{arctg} x$

Выберите все функции, монотонно возрастающие в области определения.

- [x] $\log_{0,5} \operatorname{arcctg} x$
- [ ] $\operatorname{arcctg} x$
- [ ] $\operatorname{arcctg} x - \frac{\pi}{2}$
- [x] $x - \operatorname{arcctg} x$

Выберите все функции, монотонно убывающие в области определения

- [x] $\arccos x$
- [ ] $\cos \frac{1}{x}$
- [x] $e^{\arccos x}$
- [ ] $\cos x$

Выберите все функции, монотонно убывающие в области определения

- [ ] $\arcsin x$
- [x] $e^{-\arcsin x}$
- [ ] $\sin x$
- [ ] $1 - \sin x$

Выберите все функции, монотонно убывающие в области определения

- [x] $\frac{1}{1+2^x}$
- [ ] $2^{\sqrt[3]{x^2}}$
- [ ] $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2^{-x}}}$
- [x] $\sqrt[3]{2^{-x}}$

Выберите все функции, монотонно возрастающие в области определения.

- [x] $\frac{1}{1+\sqrt[3]{2^{-x}}}$
- [ ] $\sqrt[3]{2^{-x}}$
- [ ] $\frac{1}{1+2^{x}}$
- [x] $2^{\sqrt[3]{x}}$