

Решение иррациональных уравнений

- *Определение.* Уравнение, содержащее переменные под знаком корня или дробной степени, называют иррациональными.

Основные свойства

$$\sqrt{a} = b, \text{ если } b \geq 0 \text{ и } b^2 = a$$

$$\sqrt{x^2} = |x|; \quad a\sqrt{x} = \begin{cases} \sqrt{a^2 x}, & a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 x}, & a < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{a} = b, \text{ если } b \geq 0 \text{ и } b^2 = a$$

Формулы сложных радикалов

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, B \geq 0, A \geq \sqrt{B}$$

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}, B \geq 0, A \geq \sqrt{B}$$

Формулы сокращенного умножения

$$1. \sqrt{A} - \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}, A \geq 0, B \geq 0, A^2 + B^2 \neq 0;$$

$$2. \sqrt{A} + \sqrt{B} = \frac{A - B}{\sqrt{A} - \sqrt{B}}, A \geq 0, B \geq 0, A \neq B;$$

$$3. \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} = \frac{A + B}{\sqrt[3]{A^2} - \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}, A^2 + B^2 \neq 0$$

$$4. \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B} = \frac{A - B}{\sqrt[3]{A^2} + \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}}, A^2 + B^2 \neq 0;$$

Равносильные переходы

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Методы решения

- *1. Возведение в степень*
- *2. Метод замены*
- *3. Метод тригонометрической подстановки*
- *4. Умножение обеих частей уравнения*
- *5. Специальные методы*

Возведение в степень

$$1. \sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$$

$$2. \sqrt{x^2 - x - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$$

$$3. \sqrt{x - 2} + \sqrt{x + 3} = 2$$

$$4. \sqrt{5x - 7} - \sqrt{2x + 3} = \sqrt{3x + 4}$$

$$5. \sqrt{2x + 1} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{2x + 4} + \sqrt{x + 1}$$

Выполнить № 1, 2, 4

№ 3, 5- домашнее задание

Метод замены

$$1. \sqrt{3x-5} - \sqrt{x-2} = 1$$

$$2. \sqrt{x^3+8} + \sqrt[4]{x^3+8} = 6$$

$$3. \sqrt{3x^2+5x+8} - \sqrt{3x^2+5x+1} = 1$$

$$4. \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16$$

$$5. 3x^2 + x + 2 - 4x\sqrt{x+2} = 0$$

$$6. \sqrt{x+5} - 4\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} = 1$$

$$7. \sqrt{x^3+x^2-1} + \sqrt{x^3+x^2+2} = 3$$

Выполнить № 1, 3, 4, 6

№ 2, 5, 7- домашнее задание

Тригонометрическая подстановка

1. $x = a \sin t$

$x = a \cos t$

Если в уравнение входит

$$\sqrt{a^2 - x^2}$$

2. $x = a \operatorname{tg} t$

Если в уравнение входит

$$\sqrt{a^2 + x^2}$$

3. $x = \frac{1}{\sin t}$

Если в уравнение входит

$$\sqrt{a} = b, \text{ если } b \geq 0 \text{ и } b^2 = a$$

Тригонометрическая подстановка

$$1. \sqrt{x^2 + 1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$2. x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}$$

Выполнить № 1

№ 2- домашнее задание

Метод умножения

Домножение на $\sqrt{g(x)}$

$$3) \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\sqrt{x - 4}} + \sqrt{x - 4} = \frac{1}{\sqrt{x - 4}};$$

$$4) \frac{2}{3} \sqrt{x + 9} - \sqrt{\frac{x^2 + 8x}{x + 9}} = \frac{3}{\sqrt{x + 9}}.$$

Выполнить № 3

№ 4- домашнее задание

Метод умножения

Домножение на «сопряженное»

$$1. \sqrt{x^2 - 3x + 6} + \sqrt{x^2 - 3x + 3} = 3$$

$$2. \sqrt{5x + 7} - \sqrt{x + 4} = 4x + 3$$

$$3. \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x} - \sqrt{2-x}} = \frac{2}{x}$$

Метод умножения

Выполнить дома:

$$5) \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}} = \frac{x - 3\sqrt{x-2} + 2}{9};$$

$$6) \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}.$$

Специальные методы

1. ОДЗ

$$7) \sqrt{\sqrt{x+4}+1} + \sqrt{\sqrt{3-x}+2} = x^2 - x - 42;$$

$$8) \sqrt{x^2 - 4x + 3} + \sqrt{-x^2 + 3x - 2} = \sqrt{x^2 - x}.$$

Выполнить № 7

№ 8- домашнее задание

Использование монотонности:

$$1) \sqrt[3]{3-5x} - \sqrt[3]{x+1} = 2;$$

$$2) \sqrt{7+3x} - \sqrt{5-4x} = 1 - 2\sqrt{x+2};$$

$$3) (2x+1)\left(1 + \sqrt{(2x+1)^2 + 7}\right) + x\left(1 + \sqrt{x^2 + 7}\right) = 0;$$

$$4) 3x - 2|x+2| = 3\sqrt{3x+18} - 2|\sqrt{3x+18} - 2|;$$

$$5) \frac{3 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 4}}{5 + 3\sqrt{x^2 + 3x - 4}} = \frac{2x + 5}{3x + 8};$$

$$6) \sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}$$

**Выполнить
№ 1, 3, 4
№ 2, 5, 6-
домашнее
задание**

$$f(f(f(x))) = x$$

Уравнения вида:

$$1) (x^2 + 4x + 2)^2 + 4(x^2 + 4x + 2) + 2 = x;$$

$$2) x = \sqrt{5 + \sqrt{5 + \sqrt{\dots + \sqrt{5 + x}}}};$$

$$3) (x^4 + x^2 - 6)(8\sqrt[3]{8x - 7} - x^3 - 7) = 0;$$

$$4) \frac{\sqrt[4]{2 - x}}{\sqrt{2\sqrt{2 - x} - 1}} = x;$$

$$5) x^9 - 6x^6 + 12x^3 - 6 = \sqrt[3]{2 - x}.$$

*Выполнить
№ 1, 3,
№ 2, 4, 5-
домашнее
задание*

$$\sqrt{26 + \sqrt{11 - x^2 - 2x}} - \sqrt{13 - \sqrt{158 + x^2 + 2x}} = \sqrt{13 + 9\sqrt{2}}$$