Решение иррациональных уравнений

- *Определение.* Уравнение, содержащее переменные под знаком корня или дробной степени, называют иррациональными.

Основные свойства

$$\sqrt{a} = b, \text{если } b \geq 0 \text{ и } b^2 = a$$

$$\sqrt{x^2} = |x|; \; a\sqrt{x} = \left[\begin{array}{l} \sqrt{a^2 x}, a \geq 0 \\ -\sqrt{a^2 x}, a < 0 \end{array}\right.$$

$$\sqrt{a} = b, \text{если } b \geq 0 \text{ и } b^2 = a$$

Формулы сложных радикалов

$$\sqrt{A+\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}+\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},B\geq 0,\ A\geq\sqrt{B}$$

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},B\geq 0,\ A\geq\sqrt{B}$$

Формулы сокращенного умножения

$$1.\ \sqrt{A}-\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}+\sqrt{B}},\ A\geq 0,\ B\geq 0,\ A^2+B^2\neq 0;$$

$$2.\ \sqrt{A}+\sqrt{B}=\frac{A-B}{\sqrt{A}-\sqrt{B}},\ A\geq 0,\ B\geq 0,\ A\neq B;$$

$$3.\ \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}=\frac{A+B}{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}},\ A^2+B^2\neq 0$$

$$4.\ \sqrt[3]{A}-\sqrt[3]{B}=\frac{A-B}{\sqrt[3]{A^2}+\sqrt[3]{AB}+\sqrt[3]{B^2}},\ A^2+B^2\neq 0;$$

Равносильные переходы

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Методы решения

- 1.Возведение в степень
- 2.Метод замены
- 3.Метод тригонометрической подстановки
- 4.Умножение обеих частей уравнения
- 5.Специальные методы

Возведение в степень

$$1.\sqrt{x^2+5x+1}=2x-1$$

$$2.\sqrt{x^2-x-1}=\sqrt{2x^2-2}$$

$$3.\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}=2$$

$$4.\sqrt{5x-7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}$$

$$5.\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{2x+4}+\sqrt{x+1}$$

Выполнить № 1, 2, 4

№ 3, 5- домашнее задание

Метод замены

$$1.\sqrt{3x-5}-\sqrt{x-2}=1$$

$$2.\sqrt{x^3+8}+\sqrt[4]{x^3+8}=6$$

$$3.\sqrt{3x^2+5x+8}-.\sqrt{3x^2+5x+1}=1$$

$$4.\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$$

$$5.3x^2+x+2-4x\sqrt{x+2}=0$$

$$6.\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=1$$

$$7.\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3$$

Выполнить № 1, 3,4, 6

№ 2, 5, 7- домашнее задание

Тригонометрическая подстановка

1. $x = a\sin t$ Если в уравнение входит $\sqrt{a^2 - x^2}$

   $x = a\cos t$

2. $x = a\,tgt$ Если в уравнение входит $\sqrt{a^2 + x^2}$

3. $x = \dfrac{1}{\sin t}$ Если в уравнение входит $\sqrt{a} = b$, если $b \geq 0$ и $b^2 = a$

Тригонометрическая подстановка

$$1.\sqrt{x^2+1}-x=\frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$$

$$2.x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$$

Выполнить № 1

№ 2- домашнее задание

Метод умножения

Домножение на $\sqrt{g(x)}$

3) $\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4}=\dfrac{1}{\sqrt{x-4}};$

4) $\dfrac{2}{3}\sqrt{x+9}-\sqrt{\dfrac{x^2+8x}{x+9}}=\dfrac{3}{\sqrt{x+9}}.$

Выполнить № 3

№ 4- домашнее задание

Метод умножения

Домножение на «сопряженное»

$$1.\sqrt{x^2-3x+6}+\sqrt{x^2-3x+3}=3$$

$$2.\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+4}=4x+3$$

$$3.\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\frac{2}{x}$$

Метод умножения

Выполнить дома:

$$5)\ \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}}=\frac{x-3\sqrt{x-2}+2}{9};$$

$$6)\ \frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}.$$

Специальные методы

1. ОДЗ

7) $\sqrt{\sqrt{x+4}+1}+\sqrt{\sqrt{3-x}+2}=x^2-x-42;$

8) $\sqrt{x^2-4x+3}+\sqrt{-x^2+3x-2}=\sqrt{x^2-x}.$

Выполнить № 7

№ 8- домашнее задание

Использование монотонности:

1) $\sqrt[3]{3-5x}-\sqrt[3]{x+1}=2;$

2) $\sqrt{7+3x}-\sqrt{5-4x}=1-2\sqrt{x+2};$

3) $(2x+1)\left(1+\sqrt{(2x+1)^2+7}\right)+x\left(1+\sqrt{x^2+7}\right)=0;$

4) $3x-2|x+2|=3\sqrt{3x+18}-2\left|\sqrt{3x+18}-2\right|;$

5) $\dfrac{3+2\sqrt{x^2+3x-4}}{5+3\sqrt{x^2+3x-4}}=\dfrac{2x+5}{3x+8};$

6) $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$

Выполнить № 1, 3, 4
№ 2, 5, 6- домашнее задание

Уравнения вида: $f\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)=x$

1) $\left(x^2+4x+2\right)^2+4\left(x^2+4x+2\right)+2=x;$

2) $x=\sqrt{5+\sqrt{5+\sqrt{\ldots+\sqrt{5+x}}}}\,;$

3) $\left(x^4+x^2-6\right)\left(8\sqrt[3]{8x-7}-x^3-7\right)=0;$

4) $\dfrac{\sqrt[4]{2-x}}{\sqrt{2\sqrt{2-x}-1}}=x;$

5) $x^9-6x^6+12x^3-6=\sqrt[3]{2-x}.$

Выполнить № 1, 3, № 2, 4, 5- домашнее задание

$$\sqrt{26+\sqrt{11-x^2-2x}}-\sqrt{13-\sqrt{158+x^2+2x}}=\sqrt{13+9\sqrt{2}}$$