

# Динамические структуры данных (язык Си)

1. Указатели
2. Динамические массивы
3. Структуры
4. Списки
5. Стеки, очереди, деки
6. Деревья
7. Графы

# Динамические структуры данных (язык Си)

## Тема 1. Указатели

# Статические данные

---

```
int x, y = 20;  
float z, A[10];  
char str[80];
```

- переменная (массив) имеет имя, по которому к ней можно обращаться
- размер заранее известен (задается при написании программы)
- память выделяется при объявлении
- размер нельзя увеличить во время работы программы

# Динамические данные

---

- размер заранее неизвестен, определяется во время работы программы
- память выделяется во время работы программы
- нет имени?

## Проблема:

как обращаться к данным, если нет имени?

## Решение:

использовать адрес в памяти

## Следующая проблема:

в каких переменных могут храниться адреса?  
как работать с адресами?

# Указатели

**Указатель** – это переменная, в которую можно записывать адрес другой переменной (или блока памяти).

**Объявление:**

```
char *pC; // адрес символа
           // (или элемента массива)
int *pI; // адрес целой переменной
float *pF; // адрес вещественной переменной
```

**Как записать адрес:**

```
int m = 5, *pI;
int A[2] = { 3, 4 };
pI = &m; // адрес переменной m
pI = &A[1]; // адрес элемента массива A[1]
pI = NULL; // нулевой адрес
```

```
scanf ("%d", &m);
```

# Обращение к данным

## Как работать с данными через указатель?

```
int m = 4, n, *pI;
pI = &m;
printf ("m = %d", *pI); // вывод значения
n = 4 * (7 - *pI); // n = 4 * (7 - 4) = 12
*pI = 4 * (n - m); // m = 4 * (12 - 4) = 32
printf("&m = %p", pI); // вывод адреса
```

«ВЫТАЩИТЬ» значение по адресу

## Как работать с массивами?

```
int *pI, i, A[] = {1, 2, 3, 4, 5, 999};
pI = A; // адрес A[0] записывается как A
while ( *pI != 999 ) { // while ( A[i] != 999 )
    *pI += 2; // A[i] += 2;
    pI++; // i++ (переход к следующему)
}
```



Оператор `pI++` увеличивает адрес на `sizeof(int)`!

# Что надо знать об указателях

---

- указатель – это переменная, в которой можно хранить адрес другой переменной;
- при объявлении указателя надо указать тип переменных, на которых он будет указывать, а перед именем поставить знак \*;
- знак & перед именем переменной обозначает ее адрес;
- знак \* перед указателем в рабочей части программы (не в объявлении) обозначает значение ячейки, на которую указывает указатель;
- для обозначения недействительного указателя используется константа **NULL** (нулевой указатель);
- при изменении значения указателя на *n* он в самом деле сдвигается к *n*-ому следующему числу данного типа, то есть для указателей на целые числа на *n \* sizeof(integer)* байт;
- указатели печатаются по формату `%p`.



Нельзя использовать указатель, который указывает неизвестно куда (будет сбой или зависание)!

# Динамические структуры данных (язык Си)

## Тема 2. Динамические массивы



# Где нужны динамические массивы?

---

**Задача.** Ввести размер массива, затем – элементы массива. Отсортировать массив и вывести на экран.

**Проблема:**

размер массива заранее неизвестен.

**Пути решения:**

- 1) выделить память «с запасом»;
- 2) выделять память тогда, когда размер стал известен.

**Алгоритм:**

- 3) ввести размер массива;
- 4) выделить память ;
- 5) ввести элементы массива;
- 6) отсортировать и вывести на экран;
- 7) удалить массив

# Программа

```
#include <stdio.h>
void main()
{
  int *A, N;
  printf ("Введите размер массива > ");
  scanf ("%d", &N);
```

```
A = new int [N];
```

выделить память (C++)

```
if ( A == NULL ) {
  printf("Не удалось выделить память");
  return;
}
```

проверка

```
for (i = 0; i < N; i ++ ) {
  printf ("\nA[%d] = ", i+1);
  scanf ("%d", &A[i]);
}
```

работаем так же,  
как с обычным  
массивом!

```
...
delete A;
```

освободить память

```
}
```

# Динамические массивы

---

- для выделения памяти в языке Си используются функции `malloc` и `calloc`;
- в языке C++ удобнее использовать оператор `new`;  
`указатель = new тип [размер] ;`
- результат работы оператора `new` – адрес выделенного блока памяти, который нужно сохранить в указателе;
- если оператор `new` вернул нулевой указатель (`NULL`), память выделить не удалось;
- с динамическим массивом можно работать так же, как и с обычным (статическим);
- для освобождения блока памяти нужно применить оператор `delete`:  
`delete указатель ;`

# Ошибки при работе с памятью

---

## Запись в «чужую» область памяти:

память не была выделена, а массив используется.

**Что делать:** проверять указатель на NULL.

## Выход за границы массива:

обращение к элементу массива с неправильным номером, при записи портятся данные в «чужой» памяти.

**Что делать:** если позволяет транслятор, включать проверку выхода за границы массива.

## Указатель удален второй раз:

структура памяти нарушена, может быть все, что угодно.

**Что делать:** в удаленный указатель лучше записывать NULL, ошибка выявится быстрее.

## Утечка памяти:

ненужная память не освобождается.

**Что делать:** убирайте «мусор».

# Динамические матрицы

---

**Задача.** Ввести размеры матрицы и выделить для нее место в памяти во время работы программы.

**Проблема:**

размеры матрицы заранее неизвестны.

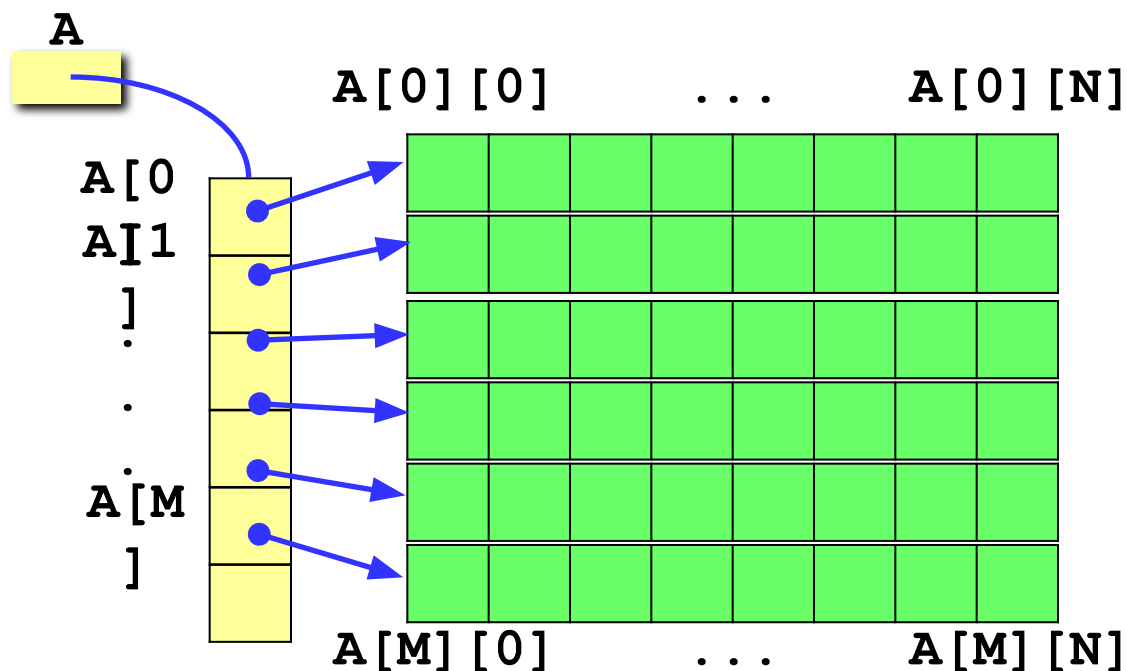
**Пути решения:**

- 1) выделять отдельный блок памяти для каждой строки;
- 2) выделить память сразу на всю матрицу.

# Вариант 1. Свой блок – каждой строке

## Адрес матрицы:

- матрица = массив строк
- адрес матрицы = адрес массива, где хранятся адреса строк
- адрес строки = указатель
- **адрес матрицы = адрес массива указателей**



## Объявление динамической матрицы:

```
int **A;
```

или через объявление  
нового типа данных  
pInt = указатель на int

```
typedef int  
*pInt;  
pInt *A;
```

# Вариант 1. Свой блок – каждой строке

```
typedef int *pInt;
```

```
void main()
```

```
{
```

```
    int M, N, i;
```

```
    pInt *A;
```

```
    ... // ввод M и N
```

```
    A = new pInt[M];
```

```
    for ( i = 0; i < M; i ++ )
```

```
        A[i] = new int[N];
```

```
    ... // работаем с матрицей A, как обычно
```

```
    for ( i = 0; i < M; i ++ )
```

```
        delete A[i];
```

```
    delete A;
```

```
}
```

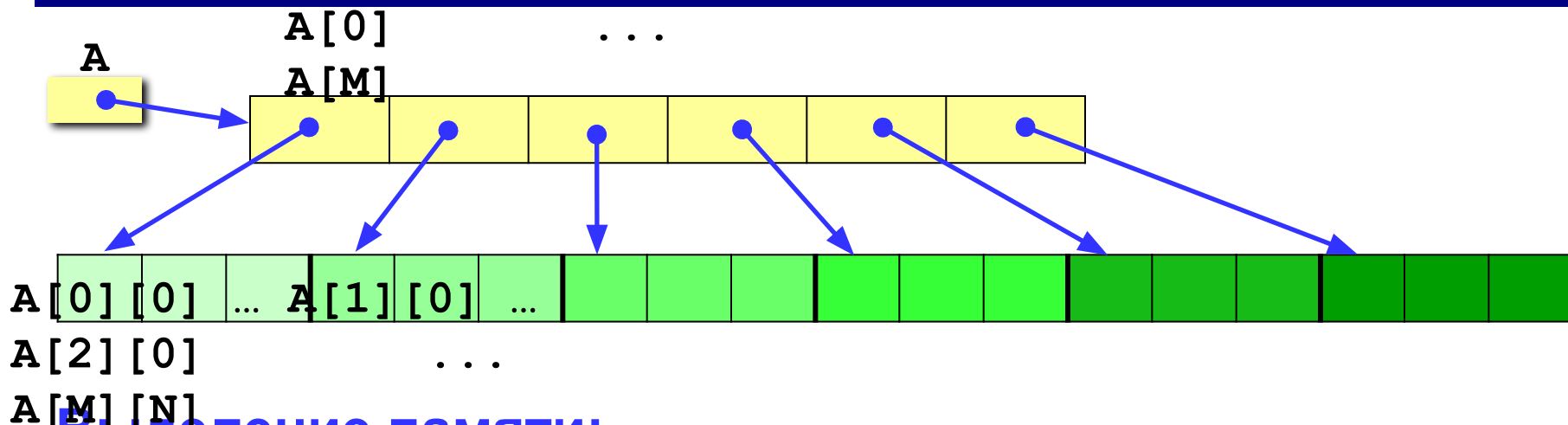
выделяем массив  
указателей

выделяем массив  
под каждую строку

освобождаем память  
для строк

освобождаем массив  
адресов строк

## Вариант 2. Один блок на матрицу



### Выделение памяти:

```
A = new pInt[M];
A[0] = new int [M*N];
```

### Расстановка указателей:

```
for ( i=1; i<N; i++ ) A[i] = A[i-1] + N;
```

### Освобождение памяти:

```
delete A[0];
delete A;
```



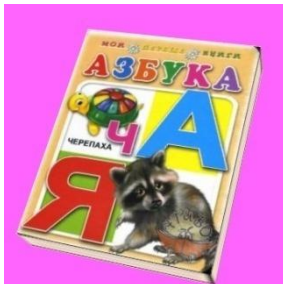
Можно ли поменять строки местами?



# Динамические структуры данных (язык Си)

## Тема 3. Структуры

# Структуры



## Свойства:

- автор (*строка*)
- название (*строка*)
- год издания (*целое число*)
- количество страниц (*целое число*)

**Задача:** объединить эти данные в единое целое

**Структура** – это тип данных, который может включать в себя несколько *полей* – элементов разных типов (в том числе и другие структуры).

## Как ввести новый тип данных-структур?

структура

название

поля

```
struct Book {
    char author[40]; // автор, символьная строка
    char title[80]; // название, символьная строка
    int year; // год издания, целое число
    int pages; // количество страниц, целое число
};
```



**Память не выделяется!**

# Как работать со структурами?

## Объявление:

```
Book b; // здесь выделяется память!  
Book b1 = { "А.С. Пушкин",  
           "Полтава", 1998, 223 };
```

## Заполнение полей:

```
strcpy ( b.author, "А.С. Пушкин" );  
strcpy ( b.title, "Полтава" );  
b.year = 1998;  
b.pages = 223;
```



Для обращения к полю структуры используется точка!

## Ввод полей с клавиатуры:

```
printf ( "Автор " );  
gets ( b.author );  
printf ( "Название книги " );  
gets ( b.title );  
printf ( "Год издания, кол-во страниц " );  
scanf ( "%d%d", &b.year, &b.pages );
```

# Копирование структур

**Задача:** скопировать структуру b1 в b2.

**По элементам:**

```
Book b1, b2;  
...    // здесь вводим b1  
strcpy ( b2.author, b1.author );  
strcpy ( b2.title, b1.title );  
b2.year = b1.year;  
b2.pages = b1.pages;
```

**Копирование «бит в бит»:**

```
#include <mem.h>  
...  
memcpy ( &b2, &b1, sizeof(Book) );
```

куда      откуда      сколько байт



Первые два параметра – адреса структур!

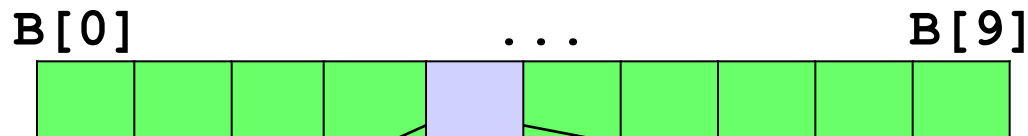
**или просто так:**

```
b2 = b1;
```

# Массивы структур

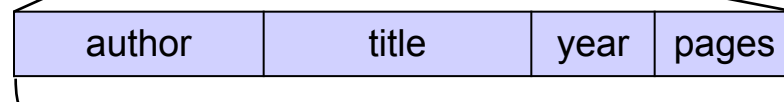
## Объявление:

```
Book V[10];
```



## Обращение к полям:

```
for ( i = 0; i < 10; i ++ )
    V[i].year = 2008;
```



## Запись в двоичный файл:

```
FILE *f;
f = fopen("input.dat", "wb");
fwrite ( V, sizeof(Book), 10, f );
```

*write binary*

СКОЛЬКО  
блоков

адрес массива

размер блока

указатель  
на файл

## Чтение из двоичного файла:

```
f = fopen("input.dat", "rb");
n = fread ( V, sizeof(Book), 10, f );
printf ( "Прочитано %d структур", n );
```



fread возвращает  
число удачно  
прочитанных  
блоков!

# Пример программы

**Задача:** в файле `books.dat` записаны данные о книгах в виде массива структур типа `Book` (не более 100). Установить для всех 2008 год издания и записать обратно в тот же файл.

```
#include <stdio.h>
```

```
struct Book { ... };
```

```
void main()
```

```
{
```

```
    Book B[100];
```

```
    int i, n;
```

```
    FILE *f;
```

```
    f = fopen ( "books.dat", "rb" );
```

```
    n = fread ( B, sizeof(Book), 100, f );
```

```
    fclose ( f );
```

```
    for ( i = 0; i < n; i ++ ) B[i].year = 2008;
```

```
    fp = fopen ( "books.dat", "wb" );
```

```
    fwrite ( B, sizeof(Book), n, f );
```

```
    fclose ( f );
```

```
}
```

полное описание структуры

чтение массива  
( $\leq 100$  структур),  
размер записывается  
в переменную `n`

запись  
массива  
(`n` структур)

# Выделение памяти под структуру

```
Book *p;
```

```
p = new Book;
```

выделить память под структуру, записать ее адрес в переменную p

```
printf ( "Автор " );
```

```
gets ( p->author );
```

```
printf ( "Название книги " );
```

```
gets ( p->title );
```

```
printf ( "Количество страниц " );
```

```
scanf ( "%d" , &p->pages );
```

```
p->year = 2008;
```

```
...
```

```
delete p;
```

освободить  
память



Для обращения к полю структуры по адресу используется стрелка ->!

# Динамические массивы структур

**Задача:** выделить память под массив структур во время выполнения программы.

```
Book *B;
```

в этот указатель будет записан адрес массива

```
int n;
```

```
printf ( "Сколько у вас книг? " );
```

```
scanf ( "%d", &n );
```

```
B = new Book [n];
```

выделяем память

```
... // здесь заполняем массив B
```

```
for ( i = 0; i < n; i++ )
```

```
    printf ( "%s. %s. %d.\n",
```

```
            B[i].author, B[i].title,
```

```
            B[i].year);
```

```
delete B;
```

освобождаем память



# Сортировка массива структур

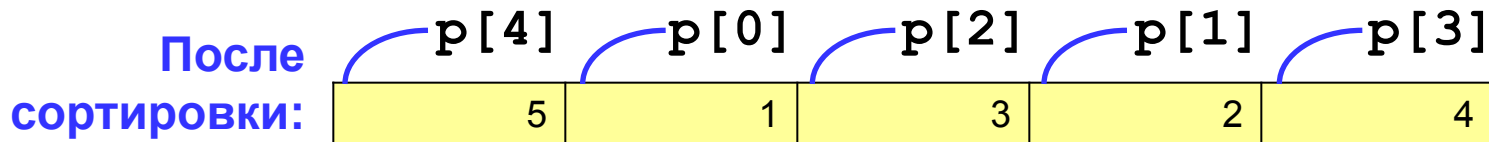
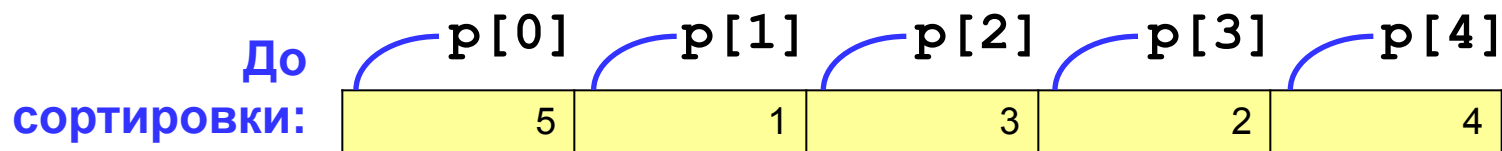
**Ключ (ключевое поле)** – это поле, по которому сортируются структуры.

**Проблема:**

как избежать копирования структур при сортировке?

**Решение:**

использовать вспомогательный массив указателей, при сортировке переставлять указатели.



**Вывод результата:**

```
for ( i = 0; i < 5; i ++ )  
    printf ("%d %s", p[i]->year, p[i]->title);
```

# Реализация в программе

```
const N = 10;
```

```
Book B[N];
```

```
Book *p[N], *temp;
```

```
int i, j;
```

```
... // здесь заполняем структуры
```

```
for ( i = 0; i < N; i++ )
```

```
    p[i] = &B[i];
```

```
for ( i = 0; i < n-1; i++ )
```

```
    for ( j = n-2; j >= i; j-- )
```

```
        if ( p[j+1]->year < p[j]->year ) {
```

```
            temp = p[j];
```

```
            p[j] = p[j+1];
```

```
            p[j+1] = temp;
```

```
        }
```

```
for ( i = 0; i < 5; i++ )
```

```
    printf("%d %s", p[i]->year, p[i]->title);
```

вспомогательные  
указатели

начальная расстановка  
указателей

сортировка методом  
пузырька, меняем только  
указатели, сами структуры  
остаются на местах

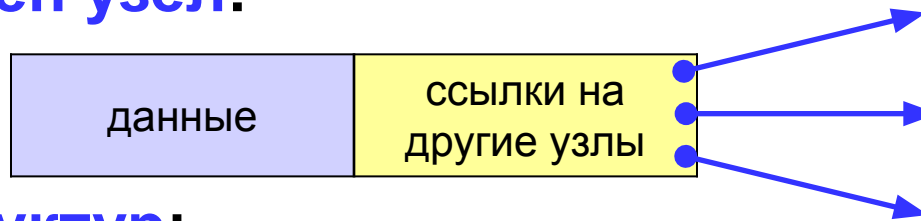
# Динамические структуры данных (язык Си)

## Тема 4. Списки

# Динамические структуры данных

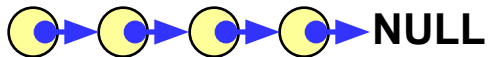
**Строение:** набор узлов, объединенных с помощью **ССЫЛОК**.

**Как устроен узел:**

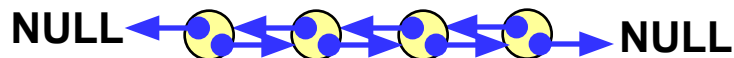


**Типы структур:**

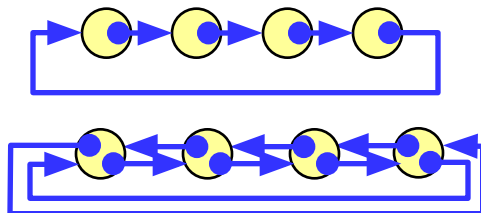
**СПИСКИ**  
односвязный



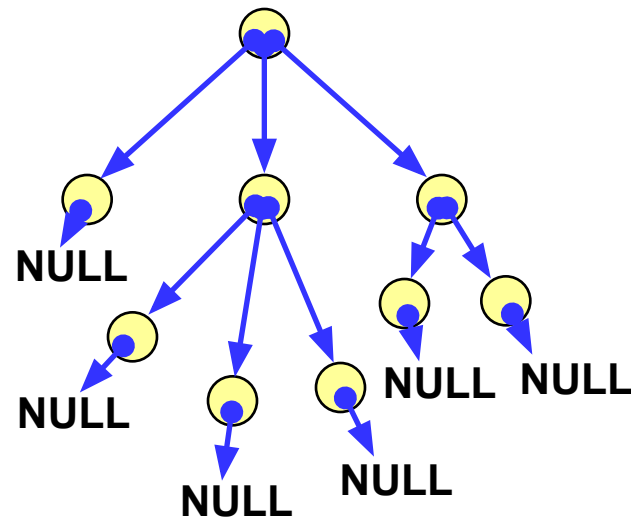
двунаправленный (двусвязный)



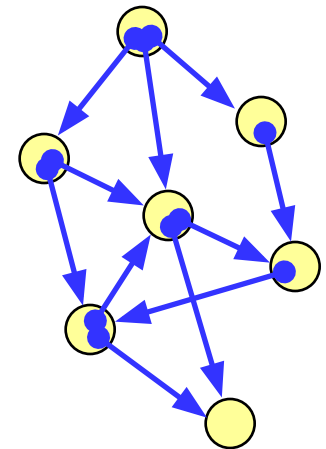
циклические списки (кольца)



**деревья**



**графы**



# Когда нужны списки?

---

**Задача (алфавитно-частотный словарь).** В файле записан текст. Нужно записать в другой файл в столбик все слова, встречающиеся в тексте, в алфавитном порядке, и количество повторений для каждого слова.

**Проблемы:**

- 1) количество слов заранее неизвестно (~~статический массив~~);
- 2) количество слов определяется только в конце работы (~~динамический массив~~).

**Решение** – список.

**Алгоритм:**

- 3) создать список;
- 4) если слова в файле закончились, то стоп.
- 5) прочитать слово и искать его в списке;
- 6) если слово найдено – увеличить счетчик повторений, иначе добавить слово в список;
- 7) перейти к шагу 2.

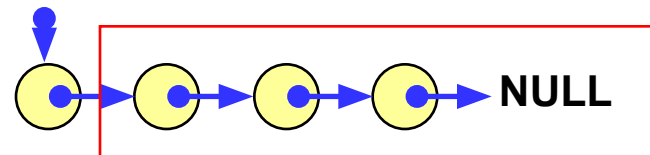
# Списки: новые типы данных

## Что такое список:

- 1) пустая структура – это список;
- 2) список – это начальный узел (голова) и связанный с ним список.



Рекурсивное определение!



## Структура узла:

```

struct Node {
    char word[40]; // слово
    int count; // счетчик повторений
    Node *next; // ссылка на следующий элемент
};
  
```

## Указатель на эту структуру:

```
typedef Node *PNode;
```

## Адрес начала списка:

```
PNode Head = NULL;
```



Для доступа к списку достаточно знать адрес его головы!

# Что нужно уметь делать со списком?

---

1. **Создать** новый узел.
2. **Добавить** узел:
  - a) в начало списка;
  - b) в конец списка;
  - c) после заданного узла;
  - d) до заданного узла.
3. **Искать** нужный узел в списке.
4. **Удалить** узел.

# Создание узла

## Функция `CreateNode` (создать узел):

**ВХОД:** новое слово, прочитанное из файла;

**ВЫХОД:** адрес нового узла, созданного в памяти.

возвращает адрес  
созданного узла

НОВОЕ СЛОВО

```
PNode CreateNode ( char NewWord[] )
{
    PNode NewNode = new Node;
    strcpy (NewNode->word, NewWord);
    NewNode->count = 1;
    NewNode->next = NULL;
    return NewNode;
}
```

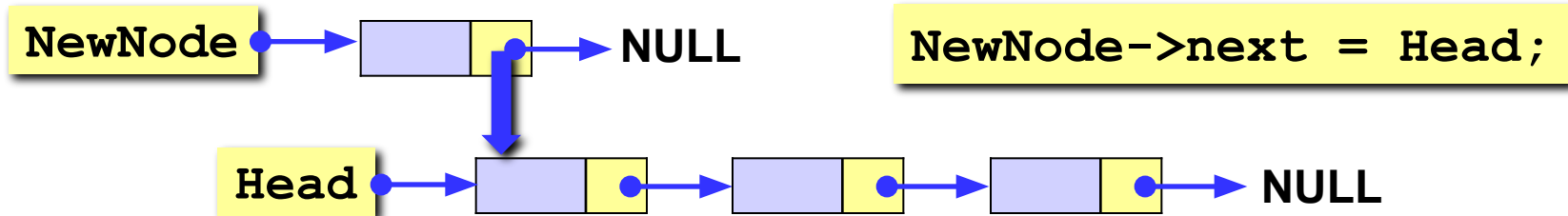


Если память  
выделить не  
удалось?

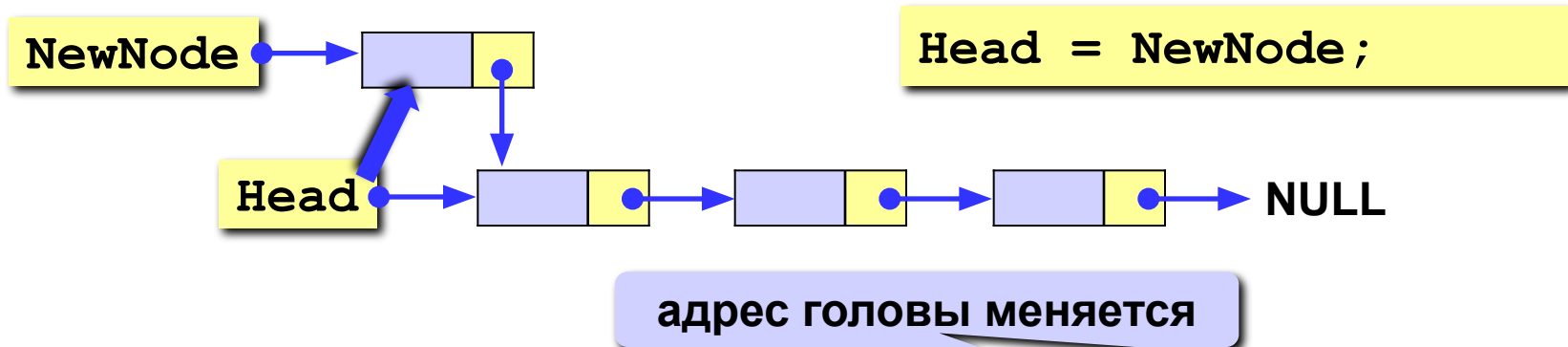


# Добавление узла в начало списка

1) Установить ссылку нового узла на голову списка:



2) Установить новый узел как голову списка:



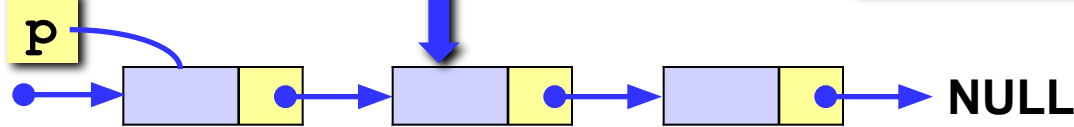
```
void AddFirst (PNode & Head, PNode NewNode)
{
    NewNode->next = Head;
    Head = NewNode;
}
```

# Добавление узла после заданного

1) Установить ссылку нового узла на узел, следующий за p:

NewNode → [ ] → NULL

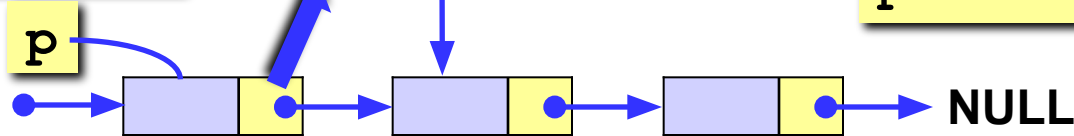
`NewNode->next = p->next;`



2) Установить ссылку узла p на новый узел:

NewNode → [ ]

`p->next = NewNode;`

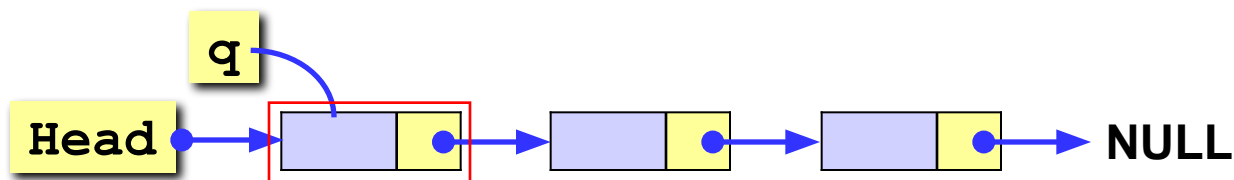


```
void AddAfter (PNode p, PNode NewNode)
{
    NewNode->next = p->next;
    p->next = NewNode;
}
```

# Проход по списку

## Задача:

сделать что-нибудь хорошее с каждым элементом списка.



## Алгоритм:

- 1) установить вспомогательный указатель **q** на голову списка;
- 2) если указатель **q** равен **NULL** (дошли до конца списка), то стоп;
- 3) выполнить действие над узлом с адресом **q**;
- 4) перейти к следующему узлу, **q->next**.

```

...
PNode q = Head;           // начали с головы
while ( q != NULL ) {    // пока не дошли до конца
    ...                   // делаем что-то хорошее с q
    q = q->next;          // переходим к следующему узлу
}
...

```

# Добавление узла в конец списка

**Задача:** добавить новый узел в конец списка.

**Алгоритм:**

- 1) найти последний узел **q**, такой что **q->next** равен **NULL**;
- 2) добавить узел после узла с адресом **q** (процедура **AddAfter**).

**Особый случай:** добавление в пустой список.

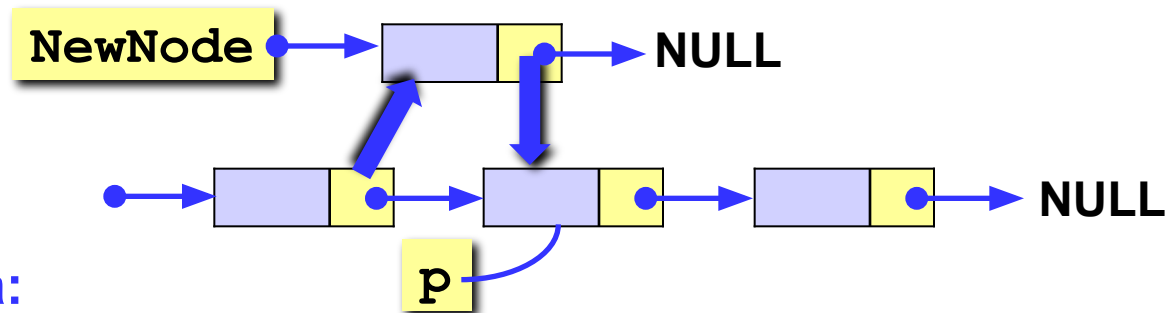
```
void AddLast ( PNode &Head, PNode NewNode )
{
  PNode q = Head;
  if ( Head == NULL ) {
    AddFirst ( Head, NewNode );
    return;
  }
  while ( q->next ) q = q->next;
  AddAfter ( q, NewNode );
}
```

особый случай – добавление в пустой список

ищем последний узел

добавить узел  
после узла q

# Добавление узла перед заданным



## Проблема:

нужно знать адрес **предыдущего** узла, а идти назад нельзя!

**Решение:** найти предыдущий узел **q** (проход с начала списка).

```
void AddBefore ( PNode &Head, PNode p, PNode NewNode )
{
    PNode q = Head;
    if ( Head == p ) {
        AddFirst ( Head, NewNode );
        return;
    }
    while ( q && q->next != p ) q = q->next;
    if ( q ) AddAfter(q, NewNode);
}
```

особый случай – добавление в начало списка

ищем узел, следующий за которым – узел p

добавить узел после узла q



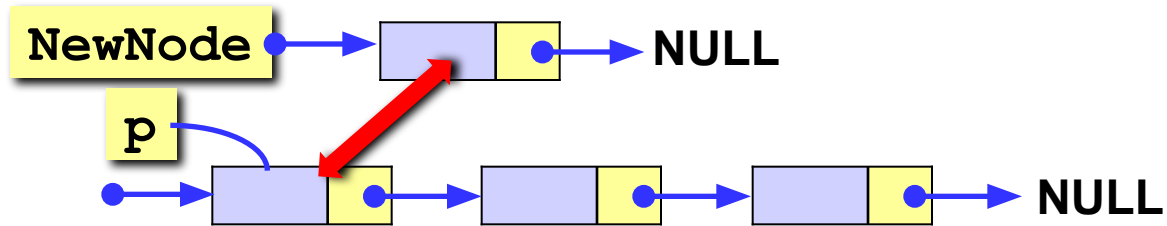
Что плохо?

# Добавление узла перед заданным (II)

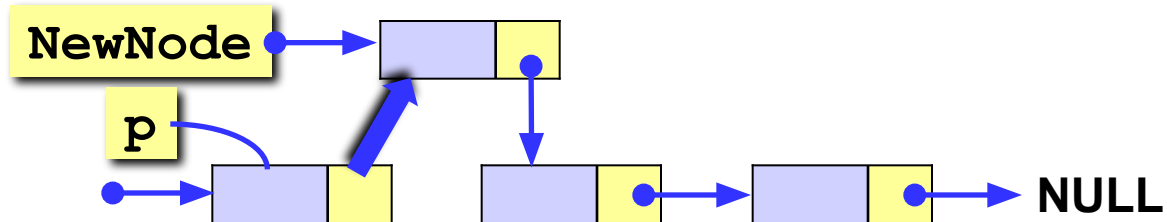
**Задача:** вставить узел перед заданным без поиска предыдущего.

**Алгоритм:**

- 1) поменять местами данные нового узла и узла **p**;



- 2) установить ссылку узла **p** на **NewNode**.



```
void AddBefore2 ( PNode p, PNode NewNode )
{
    Node temp;
    temp = *p; *p = *NewNode;
    *NewNode = temp;
    p->next = NewNode;
}
```



Так нельзя, если  
 $p = \text{NULL}$  или  
 адреса узлов где-то  
 еще запоминаются!

# Поиск слова в списке

## Задача:

найти в списке заданное слово или определить, что его нет.

## Функция Find:

**ВХОД:** слово (символьная строка);

**ВЫХОД:** адрес узла, содержащего это слово или **NULL**.

**Алгоритм:** проход по списку.

результат – адрес узла

ИЩЕМ ЭТО СЛОВО

```
PNode Find ( PNode Head, char NewWord[] )
{
    PNode q = Head;
    while ( q && strcmp ( q->word, NewWord) )
        q = q->next;
    return q;
}
```

пока не дошли до  
конца списка и слово  
не равно заданному

# Куда вставить новое слово?

## Задача:

найти узел, перед которым нужно вставить, заданное слово, так чтобы в списке сохранился алфавитный порядок слов.

## Функция FindPlace:

**ВХОД:** слово (символьная строка);

**ВЫХОД:** адрес узла, перед которым нужно вставить это слово или **NULL**, если слово нужно вставить в конец списка.

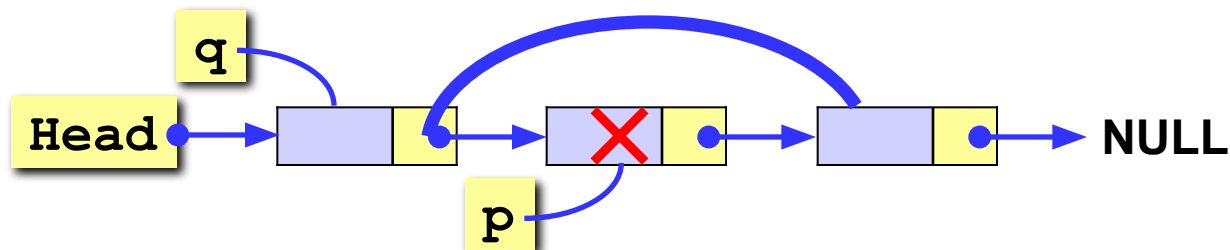
```
PNode FindPlace ( PNode Head, char NewWord[] )
{
    PNode q = Head;
    while ( q && strcmp(NewWord, q->word) > 0 )
        q = q->next;
    return q;
}
```

слово NewWord стоит по алфавиту до q->word



# Удаление узла

**Проблема:** нужно знать адрес предыдущего узла  $q$ .



```
void DeleteNode ( PNode &Head, PNode p )
```

```
{
  PNode q = Head;
```

```
  if ( Head == p )
    Head = p->next;
```

```
  else {
```

```
    while ( q && q->next != p )
      q = q->next;
```

```
    if ( q == NULL ) return;
    q->next = p->next;
```

```
  }
```

```
  delete p;
```

```
}
```

особый случай:  
удаляем первый  
узел

ищем предыдущий  
узел, такой что  
 $q->next == p$

освобождение памяти

# Алфавитно-частотный словарь

## Алгоритм:

- 1) открыть файл на чтение;

*read,*  
чтение

```
FILE *in;  
in = fopen ( "input.dat", "r" );
```

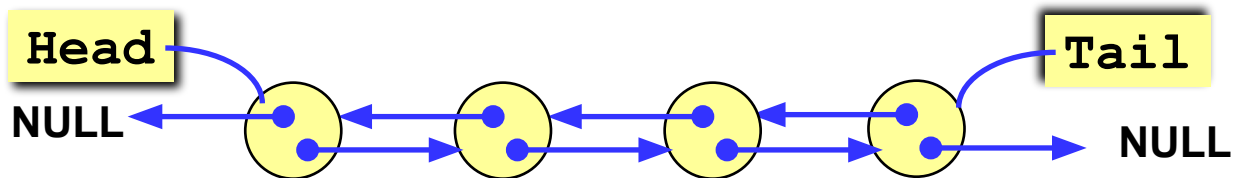
- 2) прочитать слово:

ВВОДИТСЯ ТОЛЬКО ОДНО  
слово (до пробела)!

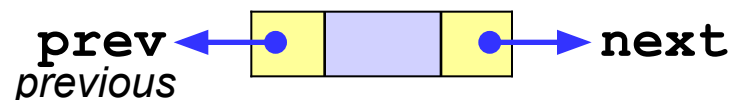
```
char word[80];  
...  
n = fscanf ( in, "%s", word );
```

- 3) если файл закончился ( $n \neq 1$ ), то перейти к шагу 7;
- 4) если слово найдено, увеличить счетчик (поле **count**);
- 5) если слова нет в списке, то
  - создать новый узел, заполнить поля (**CreateNode**);
  - найти узел, перед которым нужно вставить слово (**FindPlace**);
  - добавить узел (**AddBefore**);
- 6) перейти к шагу 2;
- 7) вывести список слов, используя проход по списку.

# Двусвязные списки



Структура узла:



```
struct Node {
    char word[40]; // слово
    int count; // счетчик повторений
    Node *next; // ссылка на следующий элемент
    Node *prev; // ссылка на предыдущий элемент
};
```

Указатель на эту структуру:

```
typedef Node *PNode;
```

Адреса «головы» и «хвоста»:

```
PNode Head = NULL;
PNode Tail = NULL;
```



МОЖНО ДВИГАТЬСЯ В  
обе стороны



нужно правильно  
работать с двумя  
указателями ВМЕСТО  
одного

# Задания

---

- «4»:** «Собрать» из этих функций программу для построения алфавитно-частотного словаря. В конце файла вывести общее количество разных слов (количество элементов списка).
- «5»:** То же самое, но использовать двусвязные списки.
- «6»:** То же самое, что и на «5», но вывести список слов в порядке убывания частоты, то есть, сначала те слова, которые встречаются чаще всего.

# Динамические структуры данных (язык Си)

## Тема 5. Стеки, очереди, деки

# Стек



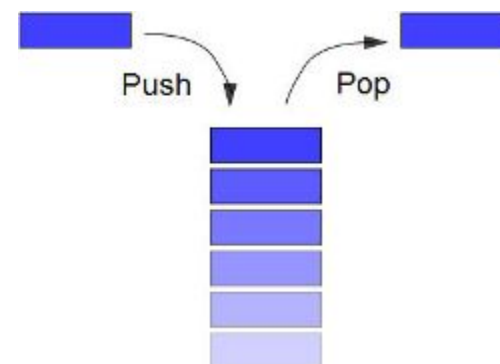
**Стек** – это линейная структура данных, в которой добавление и удаление элементов возможно только с одного конца (**вершины стека**). *Stack* = кipa, куча, стопка (англ.)

**LIFO = Last In – First Out**

«Кто последним вошел, тот первым вышел».

**Операции со стеком:**

- 1) добавить элемент на вершину (*Push* = втолкнуть);
- 2) снять элемент с вершины (*Pop* = вылететь со звуком).



# Пример задачи

**Задача:** вводится символьная строка, в которой записано выражение со скобками трех типов: `[ ]`, `{ }` и `( )`. Определить, верно ли расставлены скобки (не обращая внимания на остальные символы). Примеры:

`[ ( ) ] { } [ [ ( { ) ] ] }`

**Упрощенная задача:** то же самое, но с одним видом скобок.

**Решение:** счетчик вложенности скобок. Последовательность правильная, если в конце счетчик равен нулю и при проходе не разу не становился отрицательным.

`( ( ) ) ( )`  
1 2 1 0 1 0

`( ( ) ) ) (`  
1 2 1 0 -1 0

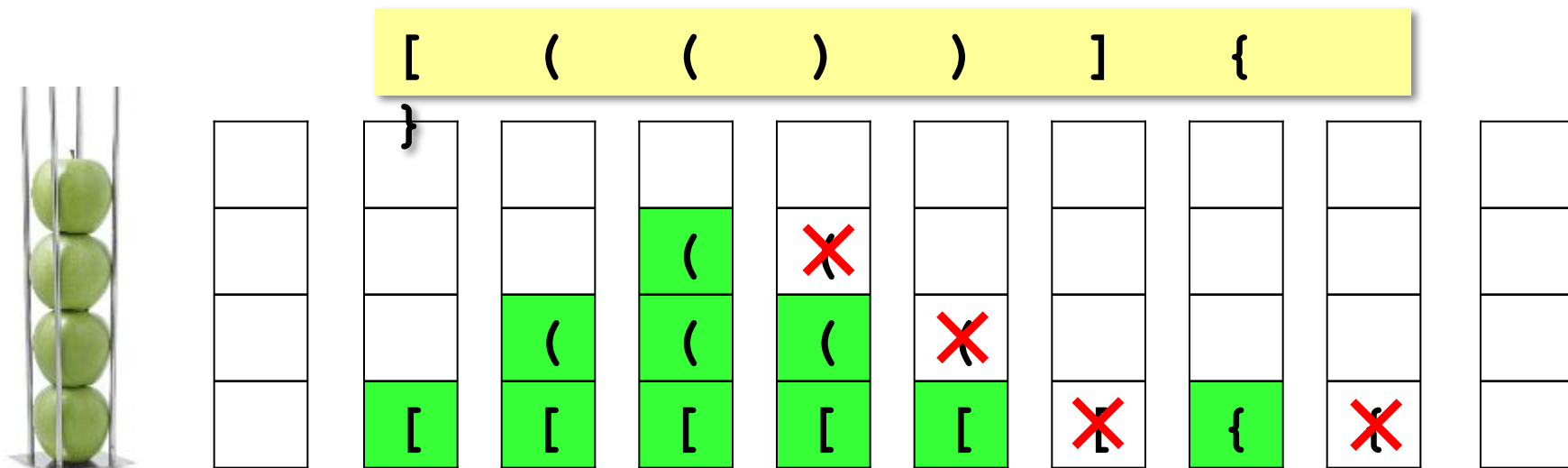
`( ( ) ) (`  
1 2 1 0 1



Можно ли решить исходную задачу так же, но с тремя счетчиками?

`[ ( { ) ] }`  
( : 0 1 0  
[ : 0 1 0  
{ : 0 1 0

# Решение задачи со скобками



## Алгоритм:

- 1) в начале стек пуст;
- 2) в цикле просматриваем все символы строки по порядку;
- 3) если очередной символ – открывающая скобка, заносим ее на вершину стека;
- 4) если символ – закрывающая скобка, проверяем вершину стека: там должна быть **соответствующая** открывающая скобка (если это не так, то ошибка);
- 5) если в конце стек не пуст, выражение неправильное.



# Реализация стека (массив)

## Структура-стек:

```
const MAXSIZE = 100;
struct Stack {
    char data[MAXSIZE]; // стек на 100 символов
    int  size;          // число элементов
};
```

## Добавление элемента:

```
int Push ( Stack &S, char x )
{
    if ( S.size == MAXSIZE ) return 0;
    S.data[S.size] = x;
    S.size ++;
    return 1;
}
```

ошибка:  
переполнение  
стека

добавить элемент

нет ошибки

# Реализация стека (массив)

---

## Снятие элемента с вершины:

```
char Pop ( Stack &S )
{
if ( S.size == 0 ) return char(255);
S.size --;
return S.data[S.size];
}
```

ошибка:  
стек пуст

## Пустой или нет?

```
int isEmpty ( Stack &S )
{
if ( S.size == 0 )
    return 1;
else return 0;
}
```

```
int isEmpty ( Stack &S )
{
return (S.size == 0);
}
```

# Программа

```
void main()
{
    char br1[3] = { '(', '[', '{' };
    char br2[3] = { ')', ']', '}' };
    char s[80], upper;
    int i, k, error = 0;
    Stack S;
    S.size = 0;
    printf("Введите выражение со скобками > ");
    gets ( s );
    ... // здесь будет основной цикл обработки
    if ( ! error && (S.size == 0) )
        printf("\nВыражение правильное\n");
    else printf("\nВыражение неправильное\n");
}
```

открывающие  
скобки

закрывающие  
скобки

то, что сняли со стека

признак ошибки

# Обработка строки (основной цикл)

```
for ( i = 0; i < strlen(s); i++ )
{
  for ( k = 0; k < 3; k++ )
  {
    if ( s[i] == br1[k] ) // если открывающая скобка
    {
      Push ( S, s[i] ); // втолкнуть в стек
      break;
    }
    if ( s[i] == br2[k] ) // если закрывающая скобка
    {
      upper = Pop ( S ); // снять верхний элемент
      if ( upper != br1[k] ) error = 1;
      break;
    }
  }
  if ( error ) break;
}
```

цикл по всем символам строки s

цикл по всем видам скобок

ошибка: стек пуст или не та скобка

была ошибка: дальше нет смысла проверять

# Реализация стека (список)

---

## Структура узла:

```
struct Node {
    char data;
    Node *next;
};
typedef Node *PNode;
```

## Добавление элемента:

```
void Push (PNode &Head, char x)
{
    PNode NewNode = new Node;
    NewNode->data = x;
    NewNode->next = Head;
    Head = NewNode;
}
```

# Реализация стека (список)

## Снятие элемента с вершины:

```
char Pop (PNode &Head) {
    char x;
    PNode q = Head;
    if ( Head == NULL ) return char(255);
    x = Head->data;
    Head = Head->next;
    delete q;
    return x;
}
```

стек пуст

## Изменения в основной программе:

```
Stack S;
S.size = 0;
...
if ( ! error && (S.size == 0) )
    printf("\nВыражение правильное\n");
else printf("\nВыражение неправильное \n");
```

PNode S = NULL;

(S == NULL)

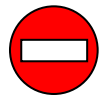
# Вычисление арифметических выражений

Как вычислять автоматически:

$$(a + b) / (c + d - 1)$$

Инфиксная запись

(знак операции **между** операндами)



необходимы скобки!

Префиксная запись (знак операции **до** операндов)

$$/ \begin{array}{|c|} \hline a + \\ \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline c + d - 1 \\ \hline \end{array}$$

польская нотация,  
[Jan Łukasiewicz](#) (1920)



скобки не нужны, можно однозначно  
вычислить!

Постфиксная запись (знак операции **после** операндов)

$$\begin{array}{|c|} \hline a + \\ \hline b \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline c + d - 1 \\ \hline \end{array} /$$

обратная польская нотация,  
[F. L. Bauer](#) F. L. Bauer and [E. W. Dijkstra](#)

## Запишите в постфиксной форме

---

$$(32 * 6 - 5) * (2 * 3 + 4) / (3 + 7 * 2)$$

$$(2 * 4 + 3 * 5) * (2 * 3 + 18 / 3 * 2) * (12 - 3)$$

$$(4 - 2 * 3) * (3 - 12 / 3 / 4) * (24 - 3 * 12)$$



# Вычисление выражений

Постфиксная форма:

$x = a b + c d + 1 - /$

|  |   |   |     |     |     |     |     |       |   |
|--|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---|
|  |   |   |     |     |     |     |     |       |   |
|  |   |   |     |     | d   |     | 1   |       |   |
|  |   | b |     | c   | c   | c+d | c+d | c+d-1 |   |
|  | a | a | a+b | a+b | a+b | a+b | a+b | a+b   | x |

Алгоритм:

- 1) взять очередной элемент;
- 2) если это не знак операции, добавить его в стек;
- 3) если это знак операции, то
  - взять из стека два операнда;
  - выполнить операцию и записать результат в стек;
- 4) перейти к шагу 1.

# Системный стек (*Windows – 1 Мб*)

---

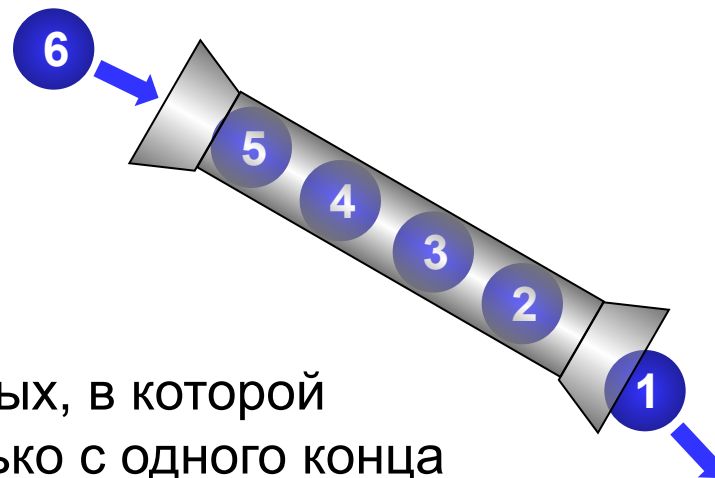
## Используется для

- 1) размещения **локальных переменных**;
- 2) хранения **адресов возврата** (по которым переходит программа после выполнения функции или процедуры);
- 3) передачи **параметров** в функции и процедуры;
- 4) временного хранения данных (в программах на языке *Ассемблер*).

## Переполнение стека (*stack overflow*):

- 1) слишком много локальных переменных  
(**выход** – использовать динамические массивы);
- 2) очень много рекурсивных вызовов функций и процедур  
(**выход** – переделать алгоритм так, чтобы уменьшить глубину рекурсии или отказаться от нее вообще).

# Очередь



**Очередь** – это линейная структура данных, в которой добавление элементов возможно только с одного конца (**конца очереди**), а удаление элементов – только с другого конца (**начала очереди**).

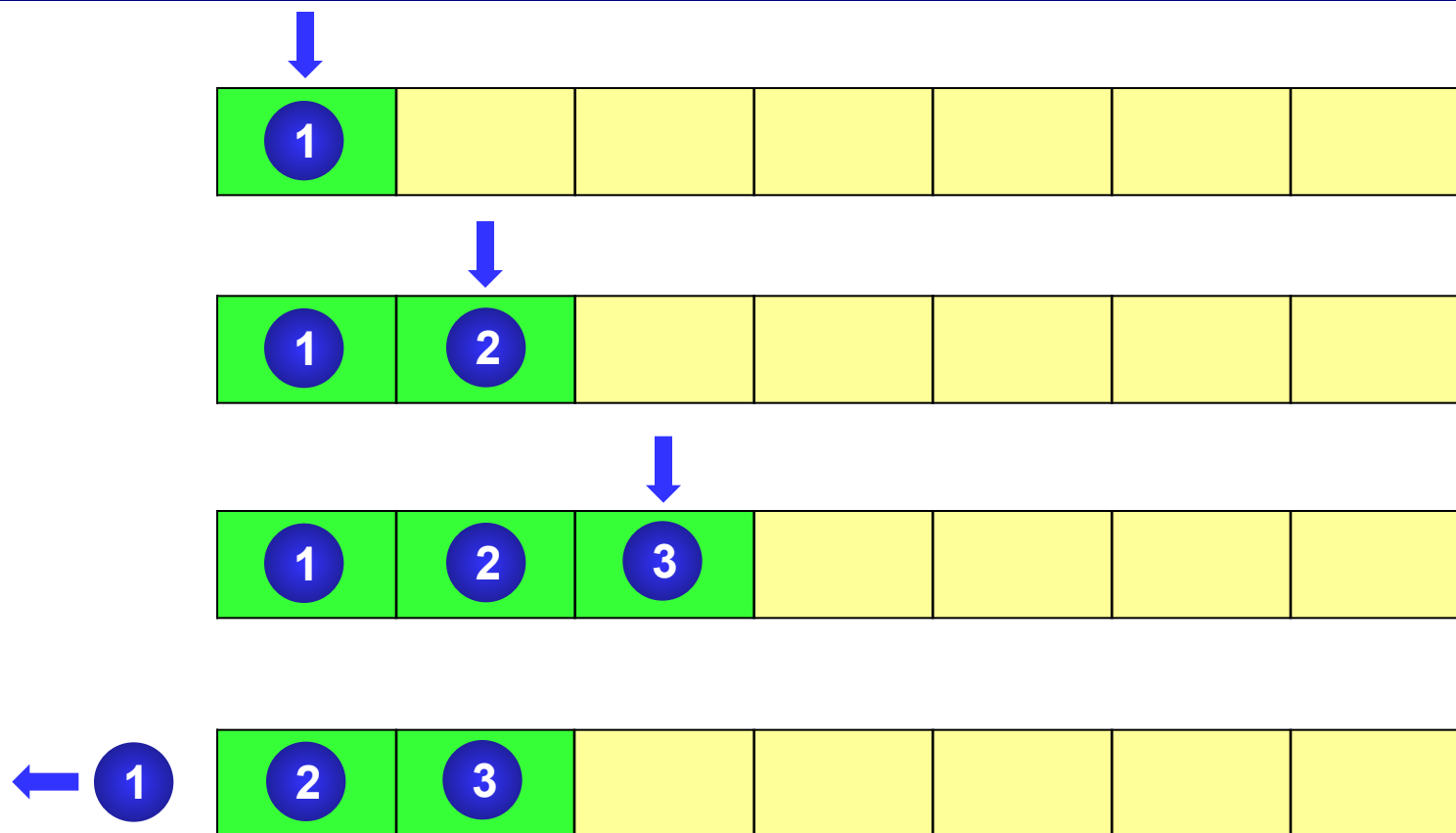
**FIFO = *First In – First Out***

«Кто первым вошел, тот первым вышел».

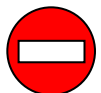
**Операции с очередью:**

- 1) добавить элемент в конец очереди (*PushTail* = втолкнуть в конец);
- 2) удалить элемент с начала очереди (*Pop*).

# Реализация очереди (массив)

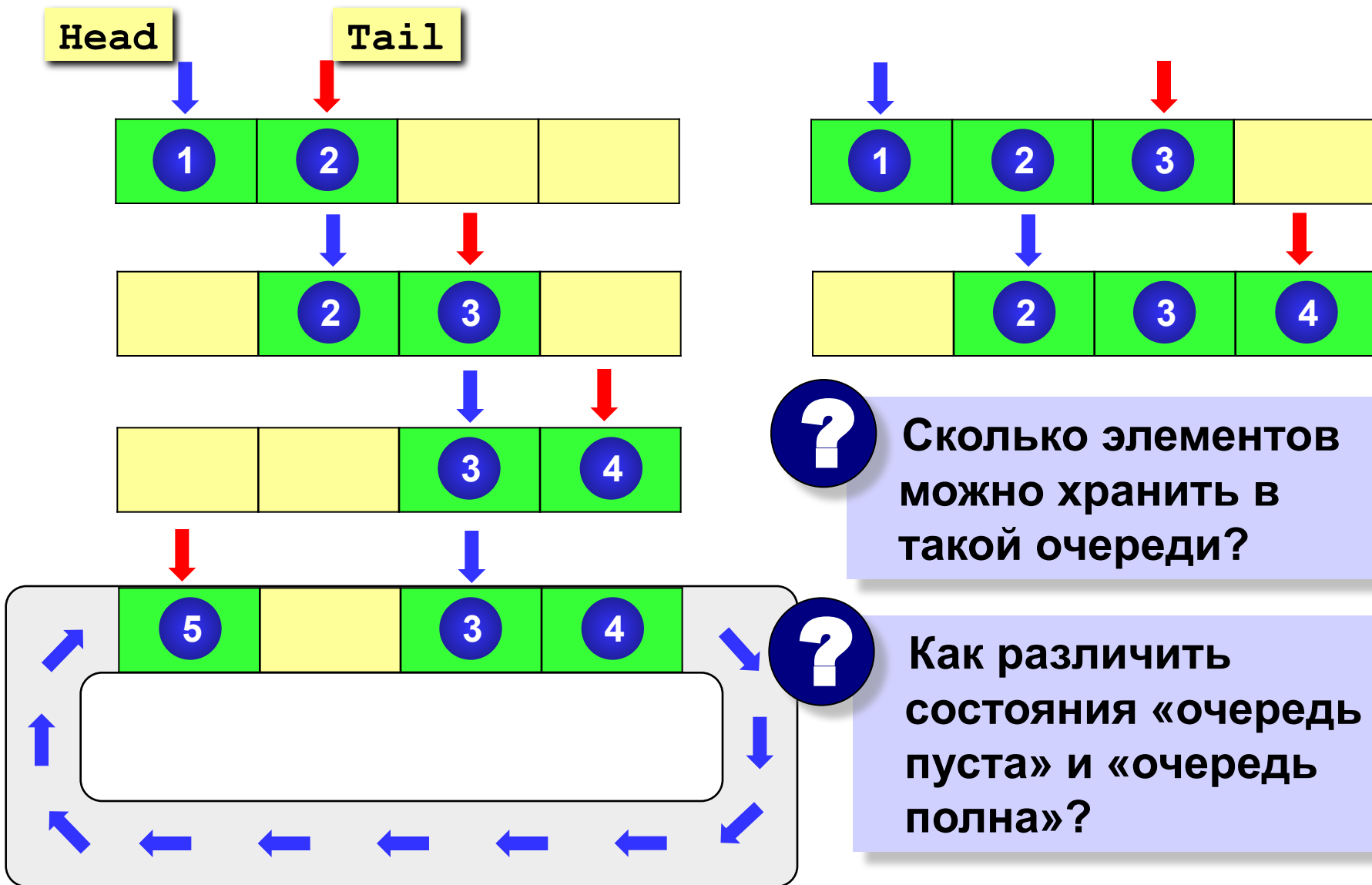


самый простой способ



- 1) нужно заранее выделить массив;
- 2) при выборке из очереди нужно сдвигать все элементы.

# Реализация очереди (кольцевой массив)



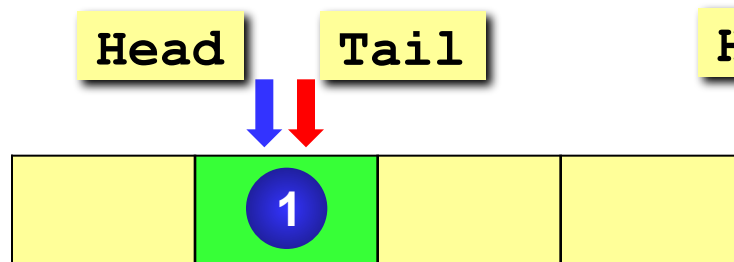
Сколько элементов можно хранить в такой очереди?



Как различить состояния «очередь пуста» и «очередь полна»?

# Реализация очереди (кольцевой массив)

В очереди 1 элемент:

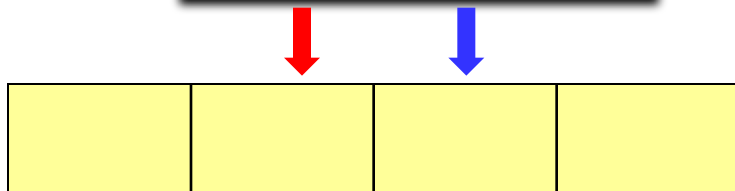


Head == Tail

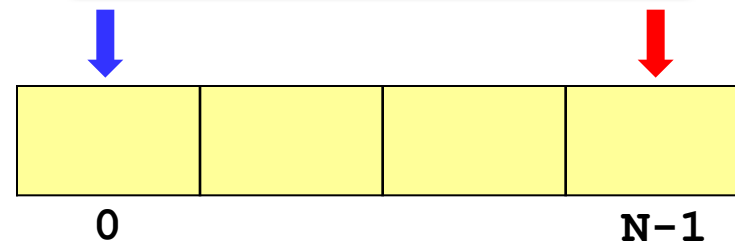
размер  
массива

Очередь пуста:

Head == Tail + 1

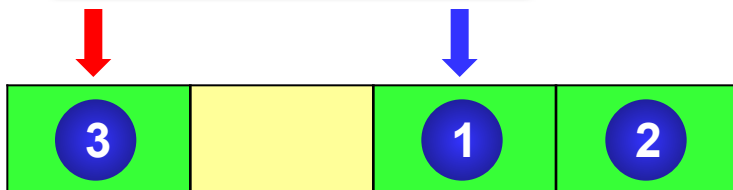


Head == (Tail + 1) % N

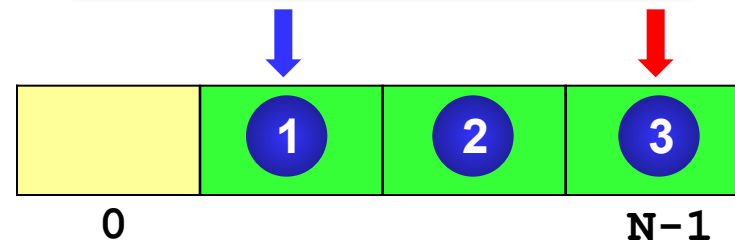


Очередь полна:

Head == Tail + 2



Head == (Tail + 2) % N



# Реализация очереди (кольцевой массив)

## Структура данных:

```
const MAXSIZE = 100;
struct Queue {
    int data[MAXSIZE];
    int head, tail;
};
```

замкнуть в  
кольцо

## Добавление в очередь:

```
int PushTail ( Queue &Q, int x )
{
    if ( Q.head == (Q.tail+2) % MAXSIZE )
        return 0;
    Q.tail = (Q.tail + 1) % MAXSIZE;
    Q.data[Q.tail] = x;
    return 1;
}
```

успешно добавили

очередь  
полна, не  
добавить

# Реализация очереди (кольцевой массив)

## Выборка из очереди:

```
int Pop ( Queue &Q )
{
    int temp;
    if ( Q.head == (Q.tail + 1) % MAXSIZE )
        return 32767;
    temp = Q.data[Q.head];
    Q.head = (Q.head + 1) % MAXSIZE;
    return temp;
}
```

очередь пуста

ВЗЯТЬ ПЕРВЫЙ  
ЭЛЕМЕНТ

удалить его из  
очереди



# Реализация очереди (списки)

---

## Структура узла:

```
struct Node {  
    int data;  
    Node *next;  
};  
  
typedef Node *PNode;
```

## Тип данных «очередь»:

```
struct Queue {  
    PNode Head, Tail;  
};
```

# Реализация очереди (списки)

## Добавление элемента:

```
void PushTail ( Queue &Q, int x )
{
    PNode NewNode;
    NewNode = new Node;
    NewNode->data = x;
    NewNode->next = NULL;
    if ( Q.Tail )
        Q.Tail->next = NewNode;
    Q.Tail = NewNode;
    if ( Q.Head == NULL )
        Q.Head = Q.Tail;
}
```

создаем  
НОВЫЙ узел

если в списке уже  
что-то было,  
добавляем в конец

если в списке  
ничего не было, ...

# Реализация очереди (списки)

## Выборка элемента:

```
int Pop ( Queue &Q )
{
    PNode top = Q.Head;
    int x;
    if ( top == NULL )
        return 32767;
    x = top->data;
    Q.Head = top->next;
    if ( Q.Head == NULL )
        Q.Tail = NULL;
    delete top;
    return x;
}
```

если список  
пуст, ...

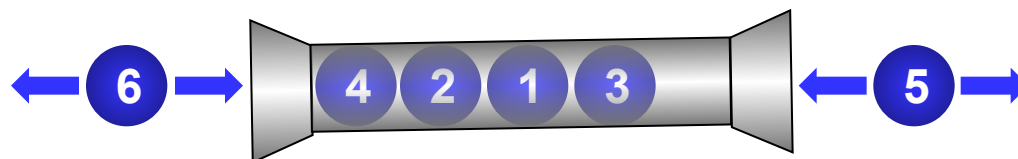
запомнили  
первый элемент

если в списке  
ничего не  
осталось, ...

освободить  
память

# Дек

**Дек** (*deque* = *double ended queue*, очередь с двумя концами) – это линейная структура данных, в которой добавление и удаление элементов возможно с обоих концов.



## Операции с деком:

- 1) добавление элемента в начало (*Push*);
- 2) удаление элемента с начала (*Pop*);
- 3) добавление элемента в конец (*PushTail*);
- 4) удаление элемента с конца (*PopTail*).

## Реализация:

- 1) кольцевой массив;
- 2) двусвязный список.

# Задания

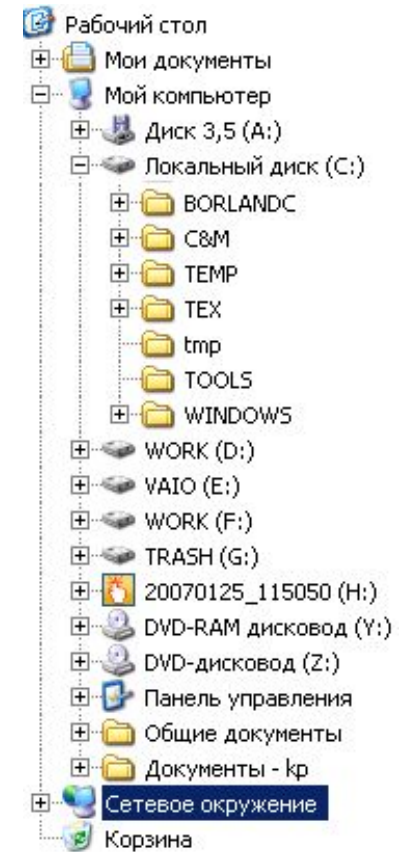
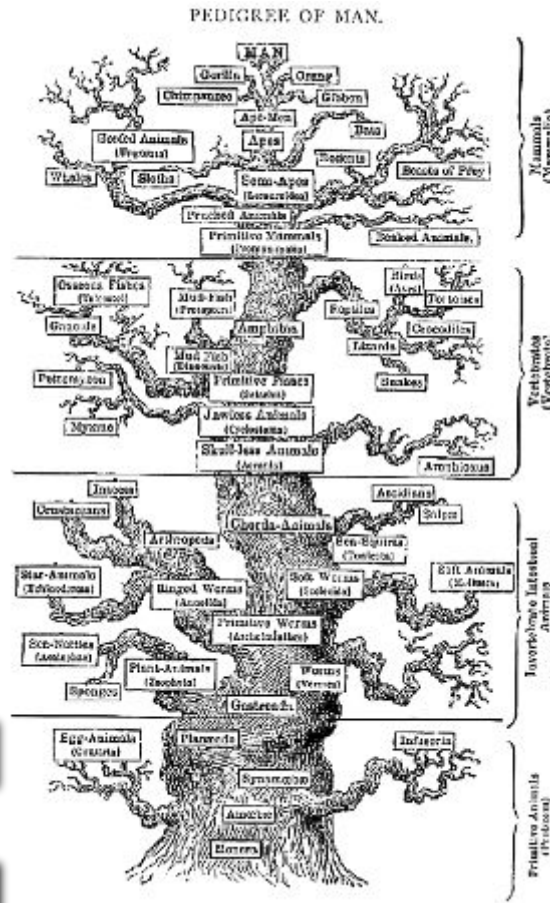
---

- «4»:** В файле `input.dat` находится список чисел (или слов). Переписать его в файл `output.dat` в обратном порядке.
- «5»:** Составить программу, которая вычисляет значение арифметического выражения, записанного в постфиксной форме, с помощью стека. Выражение правильное, допускаются только однозначные числа и знаки `+`, `-`, `*`, `/`.
- «6»:** То же самое, что и на «5», но допускаются многозначные числа.

# Динамические структуры данных (язык Си)

## Тема 6. Деревья

# Деревья



**Что общего во всех примерах?**

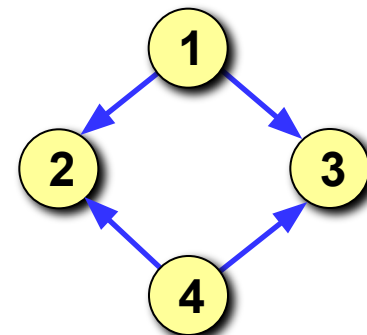
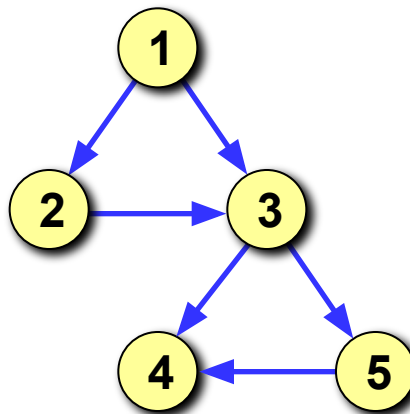
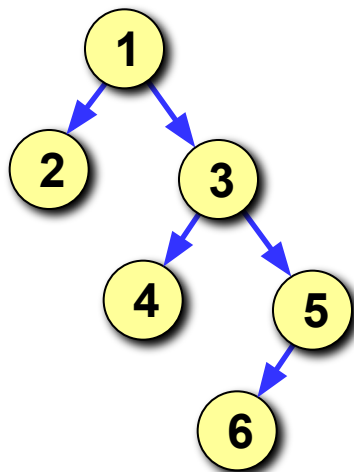
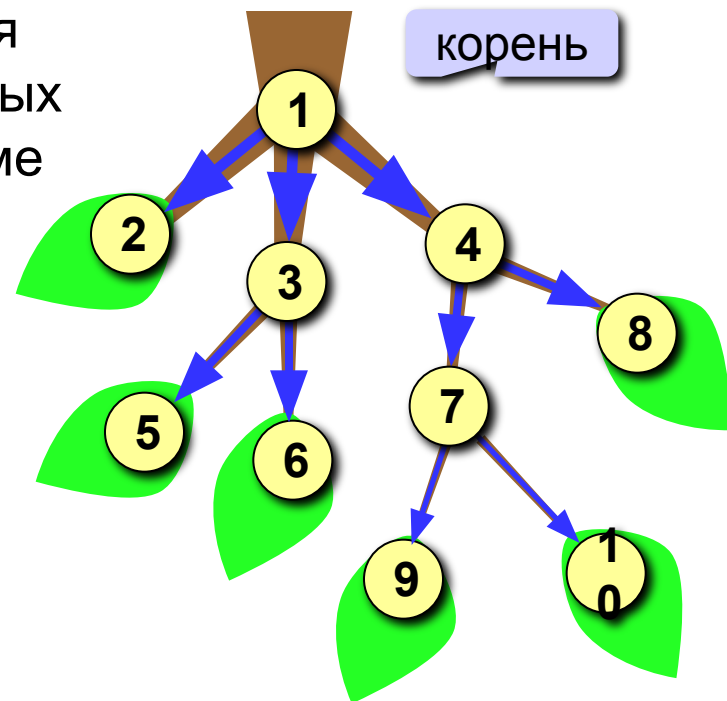
# Деревья

**Дерево** – это структура данных, состоящая из узлов и соединяющих их направленных ребер (дуг), причем в каждый узел (кроме корневого) ведет ровно одна дуга.

**Корень** – это начальный узел дерева.

**Лист** – это узел, из которого не выходит ни одной дуги.

**Какие структуры – не деревья?**





# Деревья



С помощью деревьев изображаются отношения подчиненности (иерархия, «старший – младший», «родитель – ребенок»).

**Предок узла  $x$**  – это узел, из которого существует путь по стрелкам в узел  $x$ .

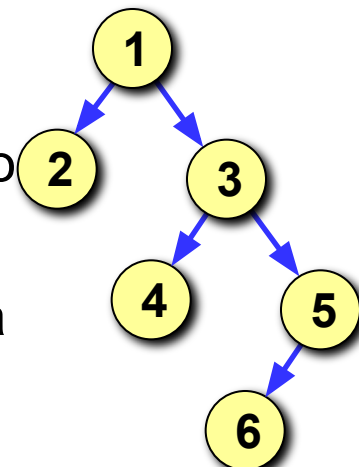
**Потомок узла  $x$**  – это узел, в который существует путь по стрелкам из узла  $x$ .

**Родитель узла  $x$**  – это узел, из которого существует дуга непосредственно в узел  $x$ .

**Сын узла  $x$**  – это узел, в который существует дуга непосредственно из узла  $x$ .

**Брат узла  $x$  (*sibling*)** – это узел, у которого тот же родитель, что и у узла  $x$ .

**Высота дерева** – это наибольшее расстояние от корня до листа (количество дуг).



# Дерево – рекурсивная структура данных

---

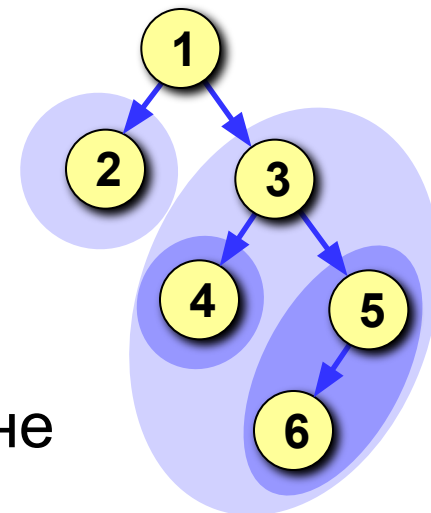
## Рекурсивное определение:

1. Пустая структура – это дерево.
2. Дерево – это корень и несколько связанных с ним деревьев.

## Двоичное (бинарное) дерево – это

дерево, в котором каждый узел имеет не более двух сыновей.

1. Пустая структура – это двоичное дерево.
2. Двоичное дерево – это корень и два связанных с ним двоичных дерева (левое и правое поддеревья).



# Двоичные деревья

---

## Применение:

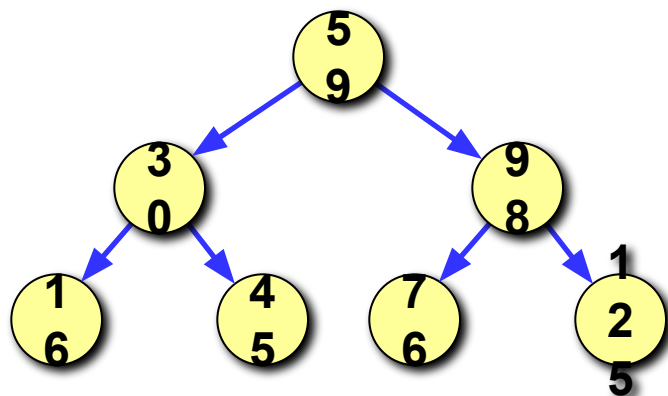
- 1) поиск данных в специально построенных деревьях (базы данных);
- 2) сортировка данных;
- 3) вычисление арифметических выражений;
- 4) кодирование (метод Хаффмана).

## Структура узла:

```
struct Node {  
    int data; // полезные данные  
    Node *left, *right; // ссылки на левого  
                        // и правого сыновей  
};  
typedef Node *PNode;
```

# Двоичные деревья поиска

**Ключ** – это характеристика узла, по которой выполняется поиск (чаще всего – одно из полей структуры).



**Какая закономерность?**

Слева от каждого узла находятся узлы с меньшими ключами, а справа – с бóльшими.

## Как искать ключ, равный $x$ :

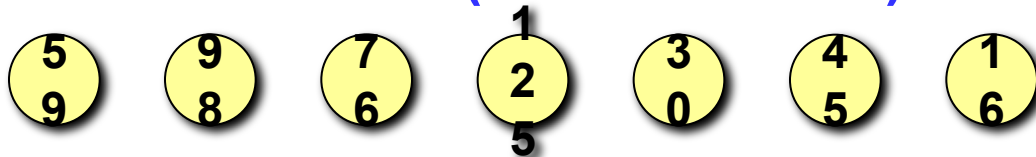
- 1) если дерево пустое, ключ не найден;
- 2) если ключ узла равен  $x$ , то стоп.
- 3) если ключ узла меньше  $x$ , то искать  $x$  в левом поддереве;
- 4) если ключ узла больше  $x$ , то искать  $x$  в правом поддереве.



**Сведение задачи к такой же задаче меньшей размерности – это ...?**

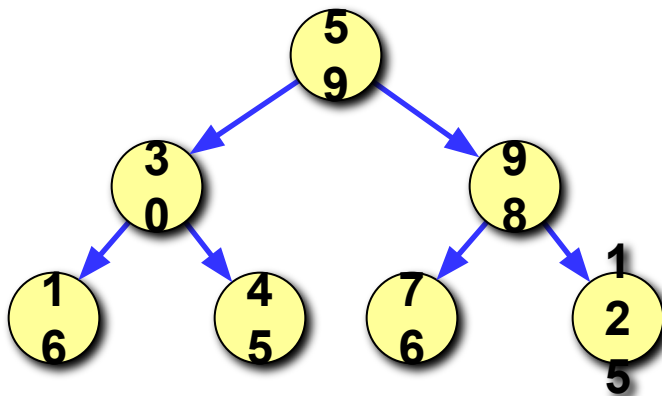
# Двоичные деревья поиска

## Поиск в массиве (N элементов):



При каждом сравнении отбрасывается 1 элемент.  
Число сравнений –  $N$ .

## Поиск по дереву (N элементов):



При каждом сравнении отбрасывается половина оставшихся элементов.  
Число сравнений  $\sim \log_2 N$ .



быстрый поиск



- 1) нужно заранее построить дерево;
- 2) желательно, чтобы дерево было минимальной высоты.

# Реализация алгоритма поиска

```
//-----  
//  Функция Search – поиск по дереву  
//  Вход: Tree – адрес корня,  
//        x – что ищем  
//  Выход: адрес узла или NULL (не нашли)  
//-----  
PNode Search (PNode Tree, int x)  
{  
  if ( ! Tree ) return NULL;  
  if ( x == Tree->data )  
    return Tree;  
  if ( x < Tree->data )  
    return Search(Tree->left, x);  
  else  
    return Search(Tree->right, x);  
}
```

дерево пустое:  
ключ не нашли...

нашли,  
возвращаем  
адрес корня

искать в  
левом  
поддереве

искать в  
правом  
поддереве

# Как построить дерево поиска?

```
//-----  
// Функция AddToTree - добавить элемент к дереву  
// Вход: Tree - адрес корня,  
//       x   - что добавляем  
//-----  
void AddToTree (PNode &Tree, int x)  
{  
  if ( ! Tree ) {  
    Tree = new Node;  
    Tree->data = x;  
    Tree->left = NULL;  
    Tree->right = NULL;  
    return;  
  }  
  if ( x < Tree->data )  
    AddToTree ( Tree->left, x );  
  else AddToTree ( Tree->right, x );  
}
```

адрес корня может  
измениться

дерево пустое: создаем  
новый узел (корень)

добавляем к левому или  
правому поддереву

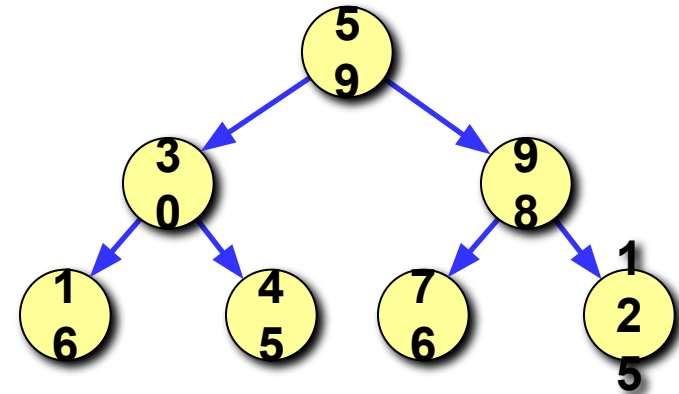


**Минимальная высота не гарантируется!**

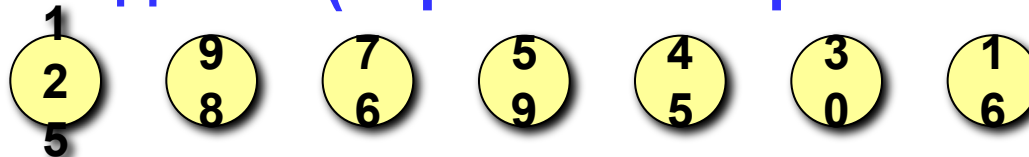
# Обход дерева

**Обход дерева** – это перечисление всех узлов в определенном порядке.

**Обход ЛКП («левый – корень – правый»):**



**Обход ПКЛ («правый – корень – левый»):**



**Обход КЛП («корень – левый – правый»):**



**Обход ЛПК («левый – правый – корень»):**





# Обход дерева – реализация

```
//-----  
// функция LKP – обход дерева в порядке ЛКП  
//           (левый – корень – правый)  
// Вход: Tree – адрес корня  
//-----  
void LKP ( PNode Tree )  
{  
  if ( ! Tree ) return;  
  LKP ( Tree->left );  
  printf ( "%d ", Tree->data );  
  LKP ( Tree->right );  
}
```

обход этой ветки  
закончен

обход левого поддерева

вывод данных корня

обход правого поддерева

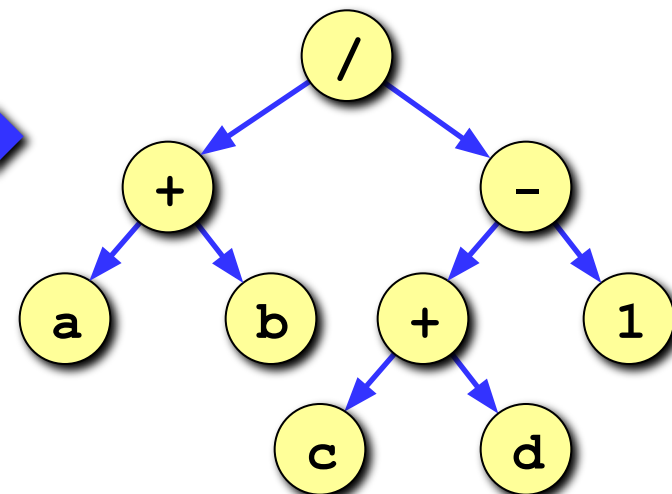


Для рекурсивной структуры удобно применять рекурсивную обработку!

# Разбор арифметических выражений

Как вычислять автоматически:

$(a + b) / (c + d - 1)$



Инфиксная запись, обход ЛКП

(знак операции **между** операндами)

$a + b / c + d -$



<sup>1</sup>необходимы скобки!

Префиксная запись, КЛП (знак операции **до** операндов)

$/ + a b - + c d$

польская нотация,  
[Jan Łukasiewicz](#) (1920)



<sup>1</sup>скобки не нужны, можно однозначно вычислить!

Постфиксная запись, ЛПК (знак операции **после** операндов)

$a b + c d + 1 -$

обратная польская нотация,  
[F. L. Bauer](#) F. L. Bauer and [E. W. Dijkstra](#)

# Вычисление выражений

Постфиксная форма:

**X = a b + c d + 1 - /**

|  |   |   |     |     |     |     |     |       |   |
|--|---|---|-----|-----|-----|-----|-----|-------|---|
|  |   |   |     |     |     |     |     |       |   |
|  |   |   |     |     | d   |     | 1   |       |   |
|  |   | b |     | c   | c   | c+d | c+d | c+d-1 |   |
|  | a | a | a+b | a+b | a+b | a+b | a+b | a+b   | x |

**Алгоритм:**

- 1) взять очередной элемент;
- 2) если это не знак операции, добавить его в стек;
- 3) если это знак операции, то
  - взять из стека два операнда;
  - выполнить операцию и записать результат в стек;
- 4) перейти к шагу 1.

# Вычисление выражений

---

**Задача:** в символьной строке записано правильное арифметическое выражение, которое может содержать только однозначные числа и знаки операций  $+ - * \backslash$ . Вычислить это выражение.

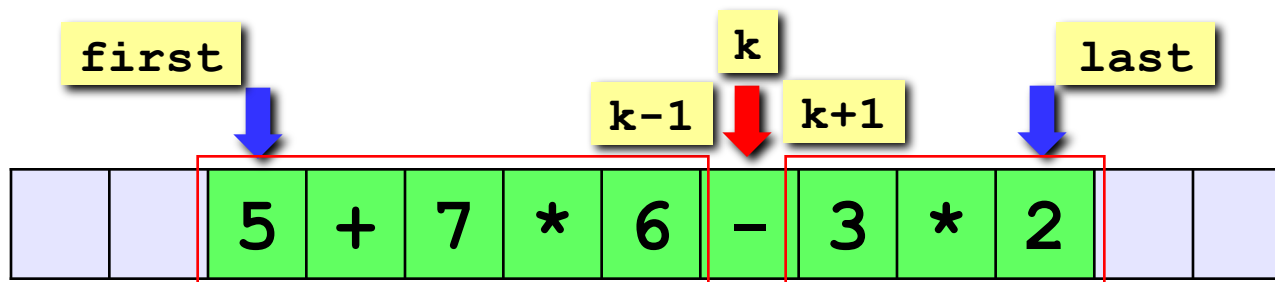
## Алгоритм:

- 1) ввести строку;
- 2) построить дерево;
- 3) вычислить выражение по дереву.

## Ограничения:

- 1) ошибки не обрабатываем;
- 2) многозначные числа не разрешены;
- 3) дробные числа не разрешены;
- 4) скобки не разрешены.

# Построение дерева

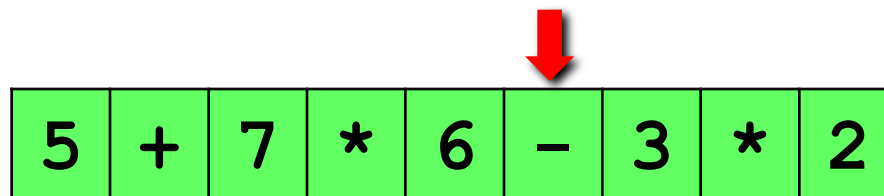


## Алгоритм:

- 1) если  $first = last$  (остался один символ – число), то создать новый узел и записать в него этот элемент; иначе...
- 2) среди элементов от  $first$  до  $last$  включительно найти **последнюю** операцию (элемент с номером  $k$ );
- 3) создать новый узел (корень) и записать в него **знак операции**;
- 4) рекурсивно применить этот алгоритм два раза:
  - построить **левое** поддерево, разобрав выражение из элементов массива с номерами от  $first$  до  $k-1$ ;
  - построить **правое** поддерево, разобрав выражение из элементов массива с номерами от  $k+1$  до  $last$ .

# Как найти последнюю операцию?

---



## Порядок выполнения операций

- умножение и деление;
- сложение и вычитание.

**Приоритет (старшинство)** – число, определяющее последовательность выполнения операций: раньше выполняются операции с большим приоритетом:

- умножение и деление (приоритет **2**);
- сложение и вычитание (приоритет **1**).



**Нужно искать последнюю операцию с наименьшим приоритетом!**

# Приоритет операции

```
//-----  
// Функция Priority - приоритет операции  
// Вход: символ операции  
// Выход: приоритет или 100, если не операция  
//-----  
int Priority ( char c )  
{  
    switch ( c ) {  
        case '+': case '-':  
            return 1;  
        case '*': case '/':  
            return 2;  
    }  
    return 100;  
}
```

сложение и  
вычитание:  
приоритет 1

умножение и  
деление:  
приоритет 2

это вообще не  
операция

# Номер последней операции

```
//-----  
//  Функция LastOperation - номер последней операции  
//  Вход:  строка, номера первого и последнего  
//         символов рассматриваемой части  
//  Выход: номер символа - последней операции  
//-----  
int LastOperation ( char Expr[], int first, int last )  
{  
    int MinPrt, i, k, prt;  
    MinPrt = 100;  
    for( i = first; i <= last; i++ ) {  
        prt = Priority ( Expr[i] );  
        if ( prt <= MinPrt ) {  
            MinPrt = prt;  
            k = i;  
        }  
    }  
    return k;  
}
```

проверяем все  
СИМВОЛЫ

нашли операцию с  
минимальным  
приоритетом

вернуть номер  
СИМВОЛА



# Построение дерева

---

## Структура узла

```
struct Node {  
    char data;  
    Node *left, *right;  
};  
typedef Node *PNode;
```

## Создание узла для числа (без потомков)

```
PNode NumberNode ( char c )  
{  
    PNode Tree = new Node;  
    Tree->data = c;  
    Tree->left = NULL;  
    Tree->right = NULL;  
    return Tree;  
}
```

ОДИН СИМВОЛ, ЧИСЛО

возвращает адрес  
созданного узла

# Построение дерева

```
//-----  
// функция MakeTree - построение дерева  
// Вход: строка, номера первого и последнего  
//       символов рассматриваемой части  
// Выход: адрес построенного дерева  
//-----  
PNode MakeTree ( char Expr[], int first, int last )  
{  
    PNode Tree;  
    int k;  
    if ( first == last )  
        return NumberNode ( Expr[first] );  
    k = LastOperation ( Expr, first, last );  
    Tree = new Node;  
    Tree->data = Expr[k];  
    Tree->left = MakeTree ( Expr, first, k-1 );  
    Tree->right = MakeTree ( Expr, k+1, last );  
    return Tree;  
}
```

ОСТАЛОСЬ  
ТОЛЬКО ЧИСЛО

НОВЫЙ УЗЕЛ:  
ОПЕРАЦИЯ

# Вычисление выражения по дереву

```
//-----  
// функция CalcTree - вычисление по дереву  
// Вход: адрес дерева  
// Выход: значение выражения  
//-----  
int CalcTree (PNode Tree)  
{  
    int num1, num2;  
    if ( ! Tree->left ) return Tree->data - '0';  
    num1 = CalcTree( Tree->left);  
    num2 = CalcTree(Tree->right);  
    switch ( Tree->data ) {  
        case '+': return num1+num2;  
        case '-': return num1-num2;  
        case '*': return num1*num2;  
        case '/': return num1/num2;  
    }  
    return 32767;  
}
```

вернуть число,  
если это лист

вычисляем  
операнды  
(поддерева)

выполняем  
операцию

некорректная  
операция

# Основная программа

```
//-----  
// Основная программа: ввод и вычисление  
// выражения с помощью дерева  
//-----  
void main()  
{  
    char s[80];  
    PNode Tree;  
    printf ( "Введите выражение > " );  
    gets(s);  
    Tree = MakeTree ( s, 0, strlen(s)-1 );  
    printf ( "= %d \n", CalcTree ( Tree ) );  
    getch();  
}
```

# Дерево игры

---

## Задача.

Перед двумя игроками лежат две кучки камней, в первой из которых 3, а во второй – 2 камня. У каждого игрока неограниченно много камней.

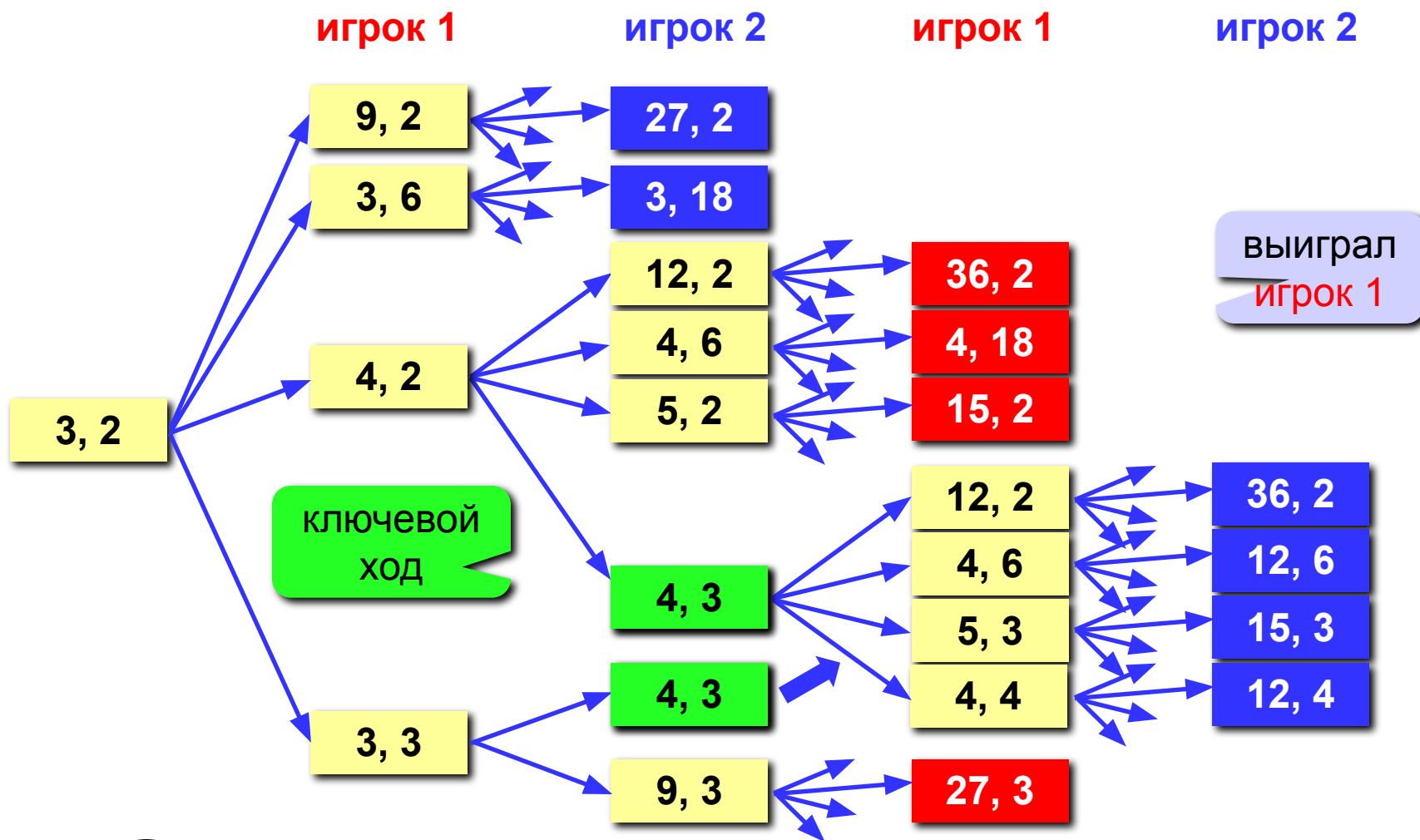
Игроки ходят по очереди. Ход состоит в том, что игрок или **увеличивает в 3 раза** число камней в какой-то куче, или **добавляет 1 камень** в какую-то кучу.

Выигрывает игрок, после хода которого общее число камней в двух кучах становится **не менее 16**.

Кто выигрывает при безошибочной игре – игрок, делающий первый ход, или игрок, делающий второй ход? Как должен ходить выигрывающий игрок?



# Дерево игры



При правильной игре выиграет игрок 2!

# Задания

---

- «4»:** «Собрать» программу для вычисления правильного арифметического выражения, включающего только однозначные числа и знаки операций  $+$ ,  $-$ ,  $*$ ,  $/$ .
- «5»:** То же самое, но допускаются также многозначные числа и скобки.
- «6»:** То же самое, что и на «5», но с обработкой ошибок (должно выводиться сообщение).

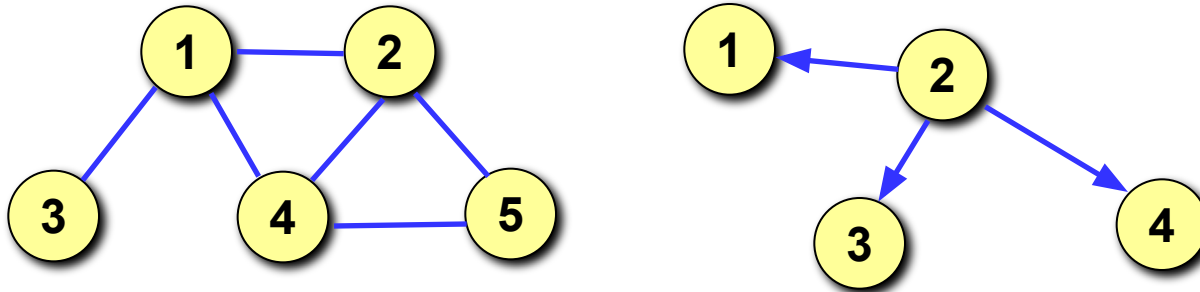
# Динамические структуры данных (язык Си)

## Тема 7. Графы



# Определения

**Граф** – это набор вершин (узлов) и соединяющих их ребер (дуг).



**Направленный граф (ориентированный, орграф)** – это граф, в котором все дуги имеют направления.

**Цепь** – это последовательность ребер, соединяющих две вершины (в орграфе – **путь**).

**Цикл** – это цепь из какой-то вершины в нее саму.

**Взвешенный граф (сеть)** – это граф, в котором каждому ребру приписывается вес (длина).



**Дерево – это граф?**

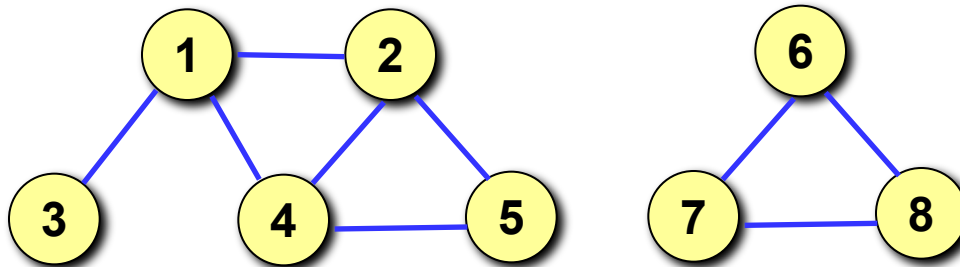
Да, без циклов!

# Определения

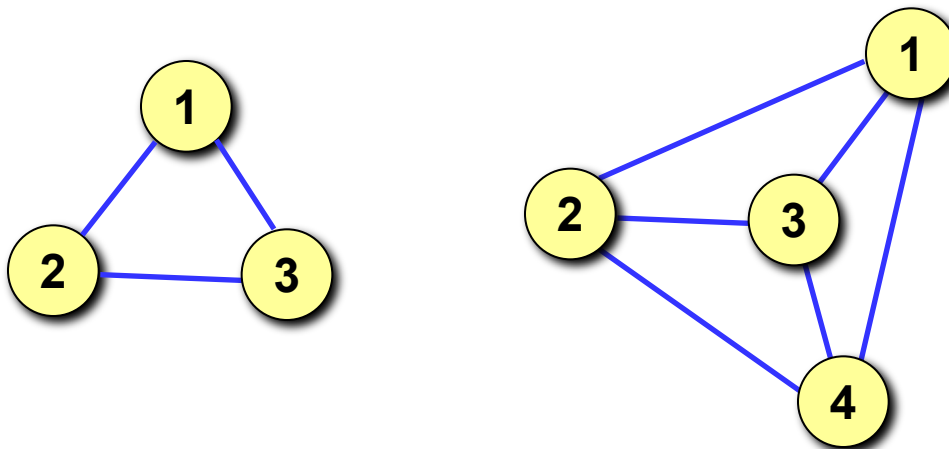
---

**Связный граф** – это граф, в котором существует цепь между каждой парой вершин.

**k-связный граф** – это граф, который можно разбить на **k** связных частей.

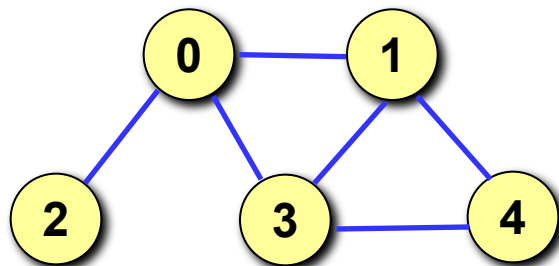


**Полный граф** – это граф, в котором проведены все возможные ребра ( $n$  вершин  $\rightarrow n(n-1)/2$  ребер).



# Описание графа

**Матрица смежности** – это матрица, элемент  $M[i][j]$  которой равен 1, если существует ребро из вершины  $i$  в вершину  $j$ , и равен 0, если такого ребра нет.



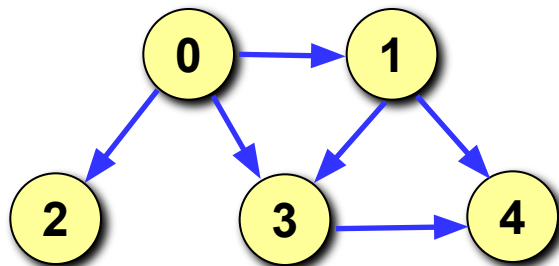
|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

## Список смежности

|   |   |   |   |  |  |
|---|---|---|---|--|--|
| 0 | 1 | 2 | 3 |  |  |
| 1 | 0 | 3 | 4 |  |  |
| 2 | 0 |   |   |  |  |
| 3 | 0 | 1 | 4 |  |  |
| 4 | 1 | 3 |   |  |  |



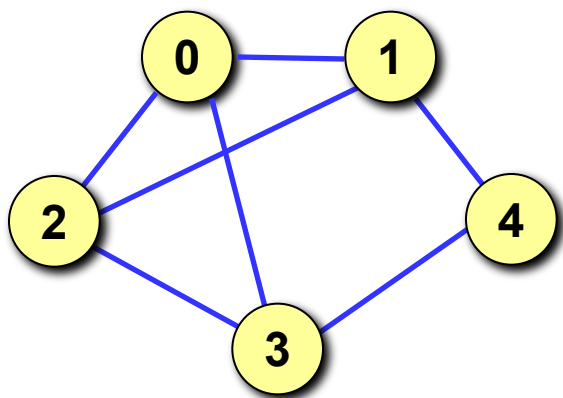
**Симметрия!**



|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

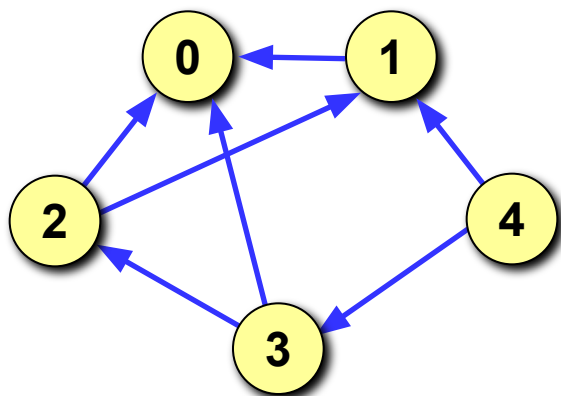
|   |   |   |   |  |  |
|---|---|---|---|--|--|
| 0 | 1 | 2 | 3 |  |  |
| 1 | 3 | 4 |   |  |  |
| 2 |   |   |   |  |  |
| 3 | 4 |   |   |  |  |
| 4 |   |   |   |  |  |

# Матрица и список смежности



|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 |   |   |   |   |   |
| 1 |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |

| 0 |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| 1 |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |

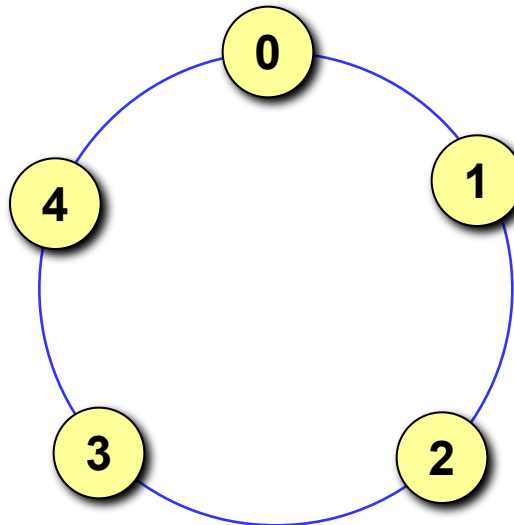


|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 |   |   |   |   |   |
| 1 |   |   |   |   |   |
| 2 |   |   |   |   |   |
| 3 |   |   |   |   |   |
| 4 |   |   |   |   |   |

| 0 |  |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|--|
| 1 |  |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |  |

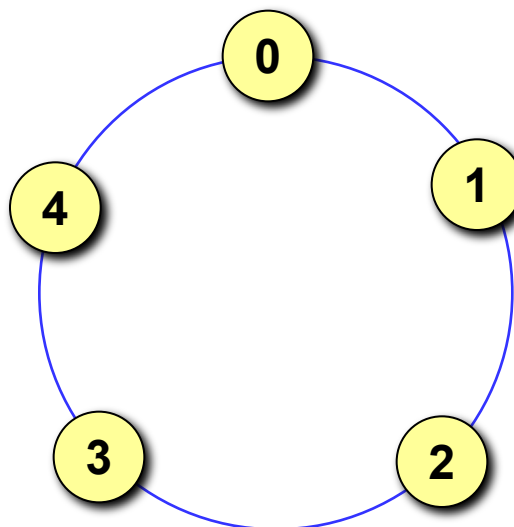
# Построения графа по матрице смежности

|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |



|   |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |

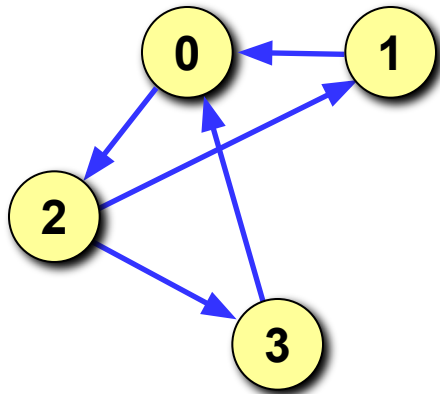
|   | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |



|   |  |  |  |  |
|---|--|--|--|--|
| 0 |  |  |  |  |
| 1 |  |  |  |  |
| 2 |  |  |  |  |
| 3 |  |  |  |  |
| 4 |  |  |  |  |

# Как обнаружить цепи и циклы?

**Задача:** определить, существует ли цепь длины  $k$  из вершины  $i$  в вершину  $j$  (или цикл длиной  $k$  из вершины  $i$  в нее саму).



$M =$

|   | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$M^2[i][j]=1$ , если

|               |                 |
|---------------|-----------------|
| $M[i][0]=1$ и | $M[0][j]=1$ или |
| $M[i][1]=1$ и | $M[1][j]=1$ или |
| $M[i][2]=1$ и | $M[2][j]=1$ или |
| $M[i][3]=1$ и | $M[3][j]=1$     |

строка  $i$

логическое  
умножение

столбец  $j$

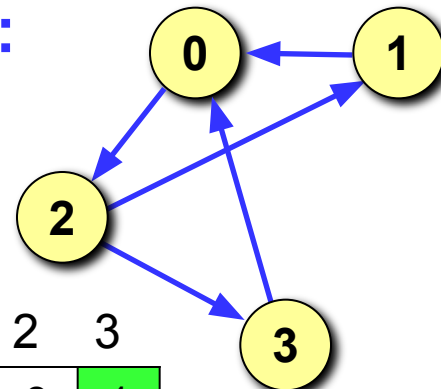
логическое  
сложение

# Как обнаружить цепи и циклы?

Логическое умножение матрицы на себя:

матрица путей  
длины 2

$$M^2 = M \otimes M$$



$$M^2 = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix} \otimes \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$M^2 [2] [0] = 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$$

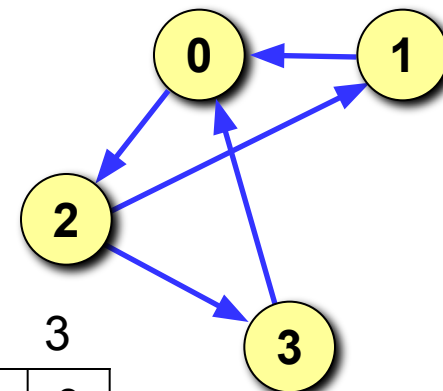
маршрут 2-1-0

маршрут 2-3-0

# Как обнаружить цепи и циклы?

Матрица путей длины 3:

$$M^3 = M^2 \otimes M$$



$$M^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

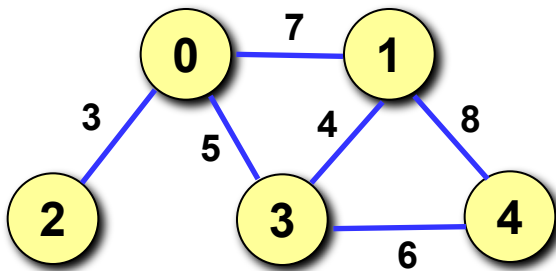
на главной  
диагонали –  
циклы!

$$M^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

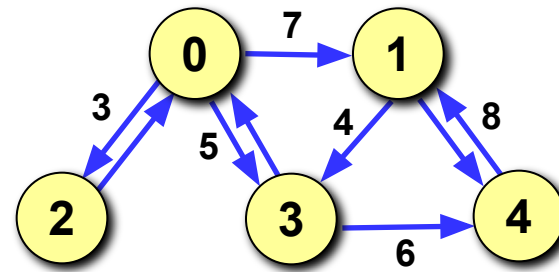


# Весовая матрица

**Весовая матрица** – это матрица, элемент  $W[i][j]$  которой равен весу ребра из вершины  $i$  в вершину  $j$  (если оно есть), или равен  $\infty$ , если такого ребра нет.



|   | 0        | 1        | 2        | 3        | 4        |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0        | 7        | 3        | 5        | $\infty$ |
| 1 | 7        | 0        | $\infty$ | 4        | 8        |
| 2 | 3        | $\infty$ | 0        | $\infty$ | $\infty$ |
| 3 | 5        | 4        | $\infty$ | 0        | 6        |
| 4 | $\infty$ | 8        | $\infty$ | 6        | 0        |

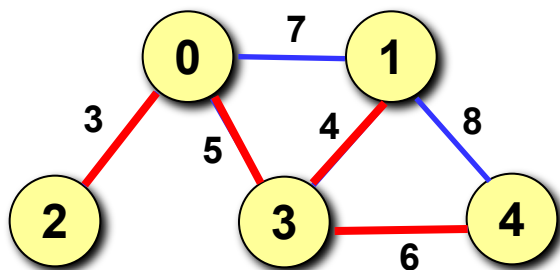


|   | 0        | 1        | 2        | 3        | 4        |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0        | 7        | 3        | 5        | $\infty$ |
| 1 | $\infty$ | 0        | $\infty$ | 4        | 8        |
| 2 | 3        | $\infty$ | 0        | $\infty$ | $\infty$ |
| 3 | 5        | $\infty$ | $\infty$ | 0        | 6        |
| 4 | $\infty$ | 8        | $\infty$ | $\infty$ | 0        |

# Задача Прима-Краскала

**Задача:** соединить  $N$  городов телефонной сетью так, чтобы длина телефонных линий была минимальная.

**Та же задача:** дан связный граф с  $N$  вершинами, веса ребер заданы весовой матрицей  $W$ . Нужно найти набор ребер, соединяющий все вершины графа (**остовное дерево**) и имеющий наименьший вес.



|   | 0        | 1        | 2        | 3        | 4        |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0 | 0        | 7        | 3        | 5        | $\infty$ |
| 1 | 7        | 0        | $\infty$ | 4        | 8        |
| 2 | 3        | $\infty$ | 0        | $\infty$ | $\infty$ |
| 3 | 5        | 4        | $\infty$ | 0        | 6        |
| 4 | $\infty$ | 8        | $\infty$ | 6        | 0        |

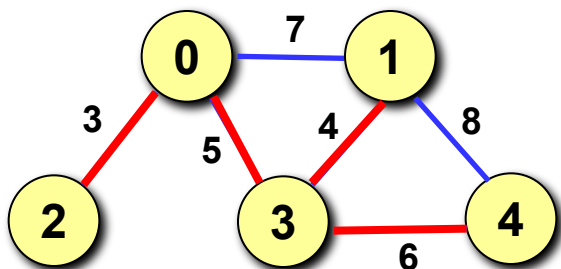
# Жадный алгоритм

**Жадный алгоритм** – это многошаговый алгоритм, в котором на каждом шаге принимается решение, лучшее в данный момент.



**В целом может получиться не оптимальное решение (последовательность шагов)!**

**Шаг в задаче Прима-Краскала** – это выбор еще невыбранного ребра и добавление его к решению.



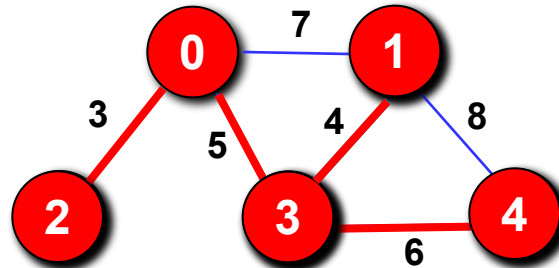
**В задаче Прима-Краскала жадный алгоритм дает оптимальное решение!**

# Реализация алгоритма Прима-Краскала

**Проблема:** как проверить, что

- 1) ребро не выбрано, и
- 2) ребро не образует цикла с выбранными ребрами.

**Решение:** присвоить каждой вершине свой цвет и перекрашивать вершины при добавлении ребра.



**Алгоритм:**

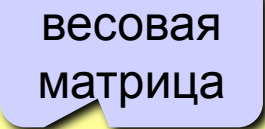
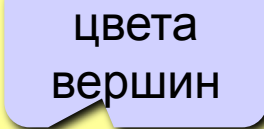
- 1) покрасить все вершины в разные цвета;
- 2) сделать  $N-1$  раз в цикле:
  - выбрать ребро  $(i, j)$  минимальной длины из всех ребер, соединяющих вершины разного цвета;
  - перекрасить все вершины, имеющие цвет  $j$ , в цвет  $i$ .
- 3) вывести найденные ребра.

# Реализация алгоритма Прима-Краскала

## Структура «ребро»:

```
struct rebro {  
    int i, j;    // номера вершин  
};
```

## Основная программа:

```
const N = 5;         
void main()  
{  
    int W[N][N], Color[N], i, j,  
        k, min, col_i, col_j;  
    rebro Reb[N-1];  
    ...// здесь надо ввести матрицу W  
    for ( i = 0; i < N; i ++ ) // раскрасить вершины  
        Color[i] = i;  
    ...// основной алгоритм - заполнение массива Reb  
    ...// вывести найденные ребра (массив Reb)  
}
```

# Реализация алгоритма Прима-Краскала

## Основной алгоритм:

```
for ( k = 0; k < N-1; k ++ ) {  
    min = 30000; // большое число  
    for ( i = 0; i < N-1; i ++ )  
        for ( j = i+1; j < N; j ++ )  
            if ( Color[i] != Color[j] &&  
                W[i][j] < min ) {  
                min = W[i][j];  
                Reb[k].i = i;  
                Reb[k].j = j;  
                col_i = Color[i];  
                col_j = Color[j];  
            }  
    for ( i = 0; i < N; i ++ )  
        if ( Color[i] == col_j ) Color[i] = col_i;  
}
```

нужно выбрать  
N-1 ребро

цикл по всем  
парам вершин

учитываем  
только пары с  
разным цветом  
вершин

запоминаем ребро и  
цвета вершин

перекрашиваем  
вершины цвета col\_j

# Сложность алгоритма

## Основной цикл:

```
for ( k = 0; k < N-1; k ++ ) {  
    ...  
    for ( i = 0; i < N-1; i ++ )  
        for ( j = i+1; j < N; j ++ )  
            ...  
}
```

три вложенных  
цикла, в каждом  
числе шагов  $\leq N$

## Количество операций:

$O(N^3)$  растёт не быстрее, чем  $N^3$

## Требуемая память:

```
int W[N][N], Color[N];  
rebro Reb[N-1];
```



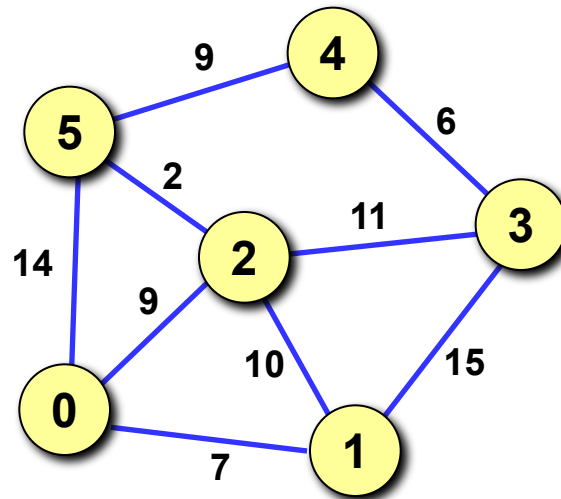
$O(N^2)$

# Кратчайшие пути (алгоритм Дейкстры)

**Задача:** задана сеть дорог между городами, часть которых могут иметь одностороннее движение. Найти кратчайшие расстояния от заданного города до всех остальных городов.

**Та же задача:** дан связный граф с  $\mathbf{N}$  вершинами, веса ребер заданы матрицей  $\mathbf{W}$ . Найти кратчайшие расстояния от заданной вершины до всех остальных.

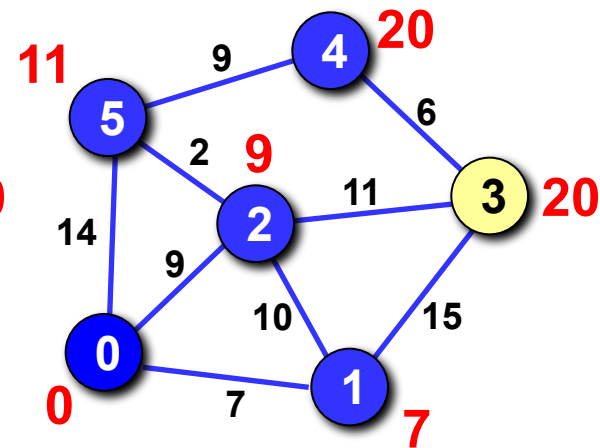
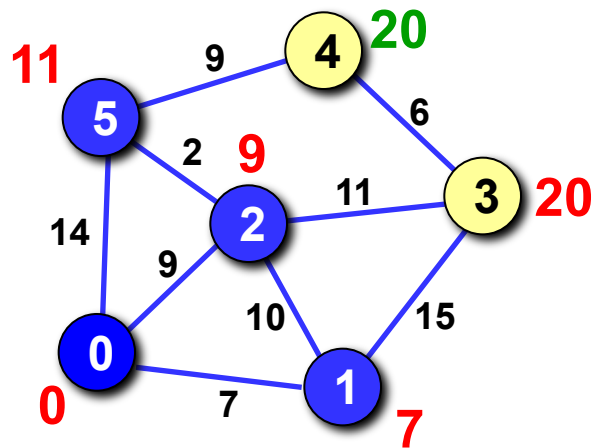
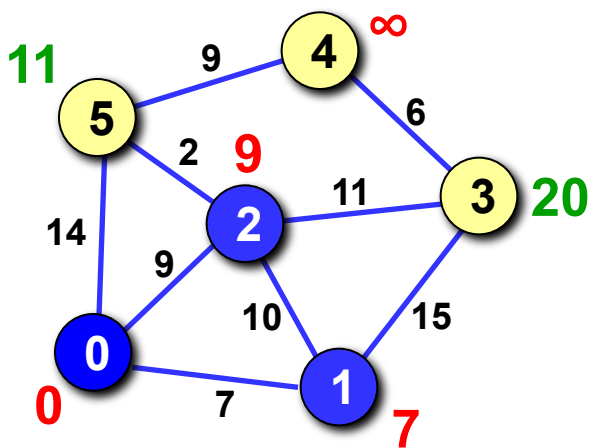
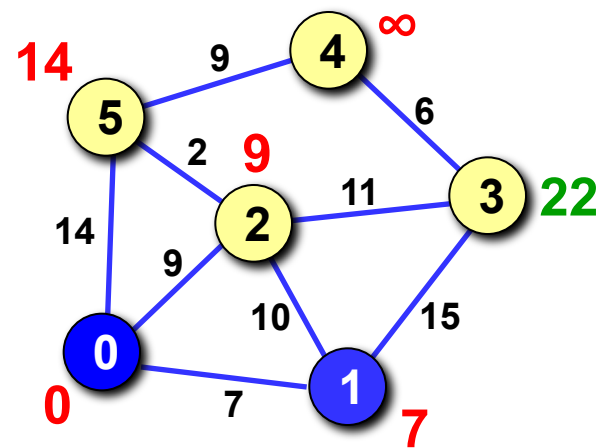
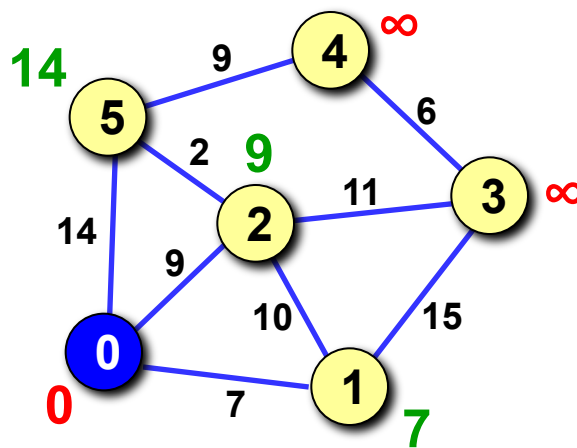
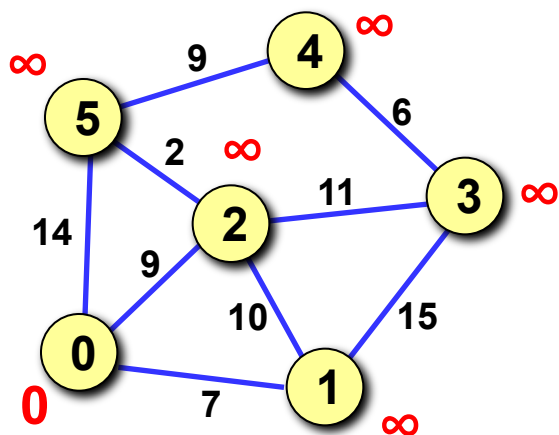
## Алгоритм Дейкстры (E.W. Dijkstra, 1959)



- 1) присвоить всем вершинам метку  $\infty$ ;
- 2) среди нерассмотренных вершин найти вершину  $j$  с наименьшей меткой;
- 3) для каждой необработанной вершины  $i$ :  
если путь к вершине  $i$  через вершину  $j$  меньше существующей метки, заменить метку на новое расстояние;
- 4) если остались необработанные вершины, перейти к шагу 2;
- 5) метка = минимальное расстояние.



# Алгоритм Дейкстры



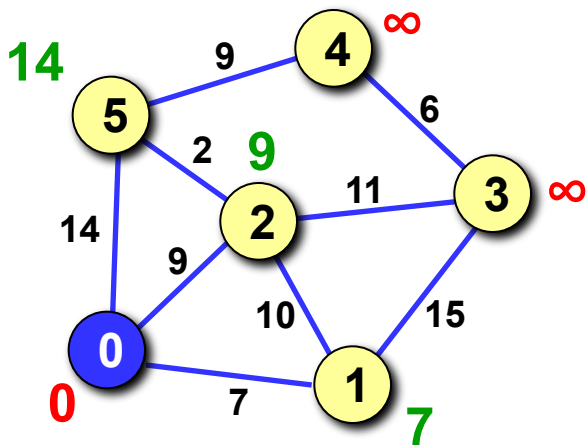
# Реализация алгоритма Дейкстры

## Массивы:

- 1) массив  $a$ , такой что  $a[i]=1$ , если вершина уже рассмотрена, и  $a[i]=0$ , если нет.
- 2) массив  $b$ , такой что  $b[i]$  – длина текущего кратчайшего пути из заданной вершины  $x$  в вершину  $i$ ;
- 3) массив  $c$ , такой что  $c[i]$  – номер вершины, из которой нужно идти в вершину  $i$  в текущем кратчайшем пути.

## Инициализация:

- 4) заполнить массив  $a$  нулями (вершины не обработаны);
- 5) записать в  $b[i]$  значение  $W[x][i]$ ;
- 6) заполнить массив  $c$  значением  $x$ ;
- 7) записать  $a[x]=1$ .



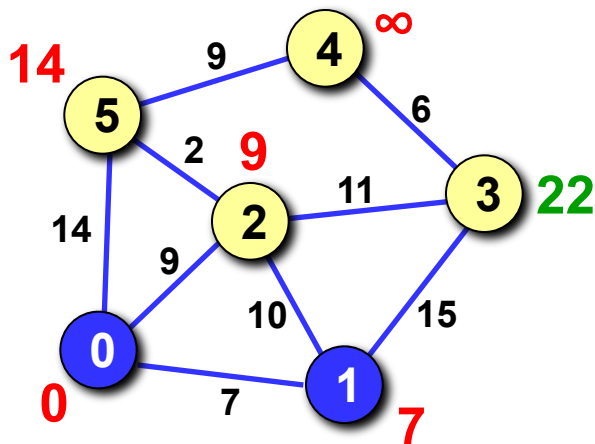
|   | 0 | 1 | 2 | 3        | 4        | 5  |
|---|---|---|---|----------|----------|----|
| a | 1 | 0 | 0 | 0        | 0        | 0  |
| b | 0 | 7 | 9 | $\infty$ | $\infty$ | 14 |
| c | 0 | 0 | 0 | 0        | 0        | 0  |

# Реализация алгоритма Дейкстры

## Основной цикл:

- 1) если все вершины рассмотрены, то стоп.
- 2) среди всех нерассмотренных вершин ( $a[i]=0$ ) найти вершину  $j$ , для которой  $b[i]$  – минимальное;
- 3) записать  $a[j]=1$ ;
- 4) для всех вершин  $k$ : если путь в вершину  $k$  через вершину  $j$  короче, чем найденный ранее кратчайший путь, запомнить его: записать  $b[k]=b[j]+W[j][k]$  и  $c[k]=j$ .

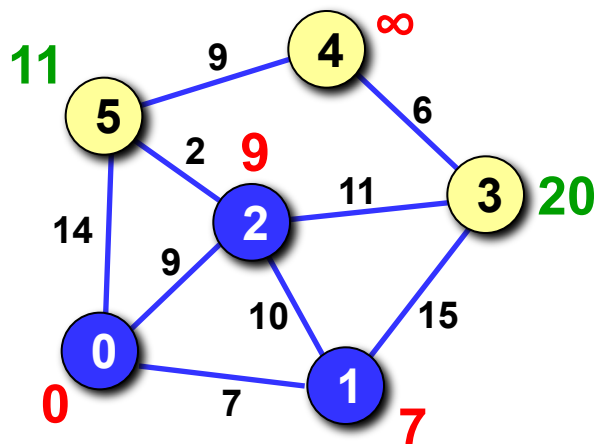
## Шаг 1:



|   | 0 | 1 | 2 | 3  | 4        | 5  |
|---|---|---|---|----|----------|----|
| a | 1 | 1 | 0 | 0  | 0        | 0  |
| b | 0 | 7 | 9 | 22 | $\infty$ | 14 |
| c | 0 | 0 | 0 | 1  | 0        | 0  |

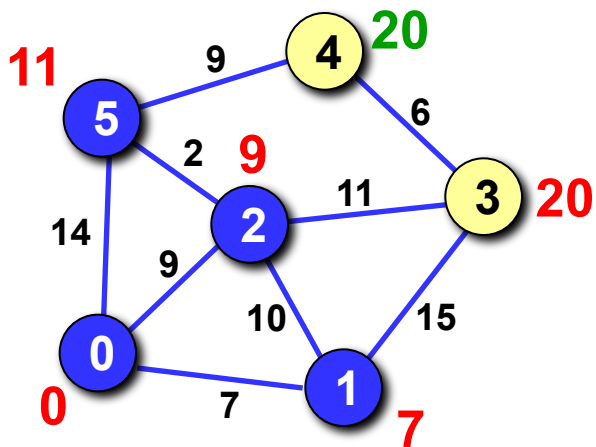
# Реализация алгоритма Дейкстры

Шаг 2:



|   | 0 | 1 | 2 | 3  | 4        | 5  |
|---|---|---|---|----|----------|----|
| a | 1 | 1 | 1 | 0  | 0        | 0  |
| b | 0 | 7 | 9 | 20 | $\infty$ | 11 |
| c | 0 | 0 | 0 | 2  | 0        | 2  |

Шаг 3:



|   | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| a | 1 | 1 | 1 | 0  | 0  | 1  |
| b | 0 | 7 | 9 | 20 | 20 | 11 |
| c | 0 | 0 | 0 | 2  | 5  | 2  |



**Дальше массивы не  
изменяются!**

# Как вывести маршрут?

Результат работа алгоритма Дейкстры:

|   | 0 | 1 | 2 | 3  | 4  | 5  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| а | 1 | 1 | 1 | 1  | 1  | 1  |
| б | 0 | 7 | 9 | 20 | 20 | 11 |
| с | 0 | 0 | 0 | 2  | 5  | 2  |

длины путей

Маршрут из вершины 0 в вершину 4:



Вывод маршрута в вершину  $i$  (использование массива  $c$ ):

- 1) установить  $z=i$ ;
- 2) пока  $c[i] \neq x$  присвоить  $z=c[z]$  и вывести  $z$ .

Сложность алгоритма Дейкстры:

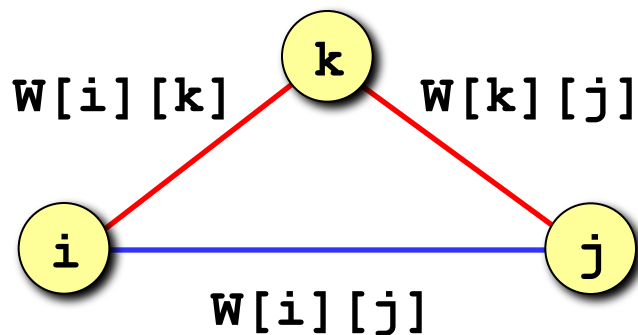
два вложенных цикла по  $N$  шагов

$O(N^2)$

# Алгоритм Флойда-Уоршелла

**Задача:** задана сеть дорог между городами, часть которых могут иметь одностороннее движение. Найти **все кратчайшие расстояния**, от каждого города до всех остальных городов.

```
for ( k = 0; k < N; k ++ )
  for ( i = 0; i < N; i ++ )
    for ( j = 0; j < N; j ++ )
      if ( W[i][j] > W[i][k] + W[k][j] )
        W[i][j] = W[i][k] + W[k][j];
```



Если из вершины  $i$  в вершину  $j$  короче ехать через вершину  $k$ , мы едем через вершину  $k$ !



**Нет информации о маршруте, только кратчайшие расстояния!**

# Алгоритм Флойда-Уоршелла

## Версия с запоминанием маршрута:

```

for ( i = 0; i < N; i ++ )
    for ( j = 0; j < N; j ++ )
        c[i][j] = i;
...
for ( k = 0; k < N; k ++ )
    for ( i = 0; i < N; i ++ )
        for ( j = 0; j < N; j ++ )
            if ( W[i][j] > W[i][k] + W[k][j] )
                {
                    W[i][j] = W[i][k] + W[k][j];
                    c[i][j] = c[k][j];
                }

```

$i$ -ая строка строится так же, как массив  $c$  в алгоритме Дейкстры

в конце цикла  $c[i][j]$  – предпоследняя вершина в кратчайшем маршруте из вершины  $i$  в вершину  $j$



Какова сложность алгоритма?

$O(N^3)$

# Задача коммивояжера

**Задача коммивояжера.** Коммивояжер (бродячий торговец) должен выйти из первого города и, посетив по разу в неизвестном порядке города  $2, 3, \dots, N$ , вернуться обратно в первый город. В каком порядке надо обходить города, чтобы замкнутый путь (тур) коммивояжера был кратчайшим?



**Это NP-полная задача, которая строго решается только перебором вариантов (пока)!**

## Точные методы:

- 1) простой перебор;
- 2) метод ветвей и границ;
- 3) метод Литтла;
- 4) ...

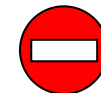


большое время счета для больших  $N$

$O(N!)$

## Приближенные методы:

- 5) метод случайных перестановок (*Matlab*);
- 6) генетические алгоритмы;
- 7) метод муравьиных колоний;
- 8) ...



не гарантируется оптимальное решение



# Другие классические задачи

---

**Задача на минимум суммы.** Имеется  $\mathbf{N}$  населенных пунктов, в каждом из которых живет  $\mathbf{p}_i$  школьников ( $\mathbf{i}=1, \dots, \mathbf{N}$ ). Надо разместить школу в одном из них так, чтобы общее расстояние, проходимое всеми учениками по дороге в школу, было минимальным.

**Задача о наибольшем потоке.** Есть система труб, которые имеют соединения в  $\mathbf{N}$  узлах. Один узел  $\mathbf{S}$  является источником, еще один – стоком  $\mathbf{T}$ . Известны пропускные способности каждой трубы. Надо найти наибольший поток от источника к стоку.

**Задача о наибольшем паросочетании.** Есть  $\mathbf{M}$  мужчин и  $\mathbf{N}$  женщин. Каждый мужчина указывает несколько (от  $\mathbf{0}$  до  $\mathbf{N}$ ) женщин, на которых он согласен жениться. Каждая женщина указывает несколько мужчин (от  $\mathbf{0}$  до  $\mathbf{M}$ ), за которых она согласна выйти замуж. Требуется заключить наибольшее количество моногамных браков.

# Конец фильма

---