Неопределенный интеграл.
Основные методы интегрирования.

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной функции f(x) на интервале (a; b) называют любую ее первообразную функцию.

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

Где C – произвольная постоянная (const).

Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

1. $f(x) = x^n$
2. $f(x) = C$
3. $f(x)=\sin x$
4. $f(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $f(x) =\cos x$
6. $f(x)= \frac{1}{\cos^2 x}$

1. $F(x) =Cx+C$
2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C$
3. $F(x) =\text{tg}\, x+C$
4. $F(x) = \sin x+C$
5. $F(x) = \text{ctg}\, x+C$
6. $F(x) = -\cos x+C$

Свойства интеграла

$$\int (f(x) + g(x))dx =$$

$$\int f(x)dx + \int g(x)dx$$

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$$

Свойства интеграла

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$$

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + C$$

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

Основные методы интегрирования

1. Табличный.

2. Сведение к табличному преобразованием подынтегрального выражения в сумму или разность.

3. Интегрирование с помощью замены переменной (подстановкой).

4. Интегрирование по частям

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C$.

2. $\int x^a dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$.

3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

5. $\int e^x dx = e^x + C$.

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$.

ВГУЭС

Таблица неопределенных интегралов

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ ..

14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

15. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$.

17. $\int shxdx = chx + C$.

18. $\int chxdx = shx + C$.

19. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$.

20. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.

ВГУЭС

Найти первообразные для функций:

1) $f(x) = 10x$ — $F(x) = 5x^2 + C$

2) $f(x) = 3x^2$ — $F(x) = x^3 + C$

3) $f(x) = \sin x + 5$ — $F(x) = -\cos x + 5x + C$

4) $f(x) = 5\cos x$ — $F(x) = 5\sin x + C$

5) $f(x) = 6x^2$ — $F(x) = 2x^3 + C$

6) $f(x) = 3-2x$ — $F(x) = 3x - x^2 + C$

Верно ли что:

а)

$$\int x^5 dx = 5x^4 + C$$

в)

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

б)

$$\int 3x^2 dx = 6x + C$$

г)

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C$$

Пример 1.

$$\int (3x^5 + 4\cos x - 2x + 1)dx =$$

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5 dx + \int 4 cosx dx - \int 2x dx + \int 1 dx =$$

$$3\int x^5 dx + 4\int cosx dx - 2\int x dx + 1\int dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int cosx dx = sinx +$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int dx = x + c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4sinx - \frac{2x^2}{2} + x + C \Rightarrow \frac{1}{2}x^6 + 4sinx - x^2 + x + C$$

Пример 2.

$$\int\left(\frac{3}{x^5}-x^4+7e^x-\frac{2}{x}\right)dx$$

Проверить решение

$$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$$

Записать решение:

$$\int\left(3x^{-5}-x^4+7e^x-\frac{2}{x}\right)dx$$

$$3\int x^{-5}dx-\int x^4dx+7\int e^xdx-2\int\frac{dx}{x}$$

$$\frac{3x^{-4}}{-4}-\frac{x^5}{5}+7e^x-2lnx+c$$

$$-\frac{3}{4x^4}-\frac{1}{5}x^5+7e^x-2lnx+c$$

Пример 3. $\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}+x^3-3\sqrt{x}\right)dx$

Проверить решение

! $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$

Записать решение:

$$\int\left(\frac{4}{\cos^2 x}+x^3-3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$\Downarrow$$

$$4\int\frac{1}{\cos^2 x}dx+\int x^3dx-3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$\Downarrow$$

$$4tgx+\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C$$

$$\Downarrow$$

$$4tgx+\frac{1}{4}x^4-2x\sqrt{x}+C$$

Пример 4.

$$\int \sin(6x+2)dx$$

Проверить решение

Записать решение:

Введем новую переменную и выразим дифференциалы:

$$6x+2=u$$

$$du=6dx, \qquad dx=\frac{1}{6}du$$

$$\int \sin(6x+2)dx=\int \sin u\cdot\frac{1}{6}du$$

$$=\frac{1}{6}\int \sin u\,du=-\frac{1}{6}\cos u+c$$

$$-\frac{1}{6}\cos u+c=$$

$$-\frac{1}{6}\cos(6x+2)+C$$

Пример **5.** $\int \sqrt{3-6x}dx$

Проверить решение

$u = 3 - 6x$

Записать решение:

Выполняем замену:

$u = 3 - 6x$

Выражаем дифференциалы:

$du = -6dx \quad dx = -\frac{1}{6}du$

$-\frac{1}{6}\int \sqrt{u}du = -\frac{1}{6}\int u^{\frac{1}{2}}du$

$-\frac{1}{6}\cdot\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

$-\frac{1}{9}(3-6x)^{\frac{3}{2}} + \mathrm{C} = -\frac{1}{9}\sqrt[2]{(3-6x)^3} + \mathrm{C}$

$-\frac{1}{9}(3-6x)\sqrt{3-6x} + \mathrm{C}$

Самостоятельная работа
Найти неопределенный интеграл

Проверить решение

Уровень «А» (на «3»)

$$1)\ \frac{1}{6}x^6+\frac{3}{2}x^2-4x+C$$

$$2)\ 5x^5+3e^x-4\ln x+C$$

Уровень «В» (на «4»)

$$3)\ \frac{1}{20}(3+4x)^5+C$$

$$4)\ \frac{1}{6}e^{6x-3}+C$$

Уровень «С» (на «5»)

$$5)\ \frac{1}{5}\sin(5x-4)+C$$

$$6)\ 2ctgx+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+\frac{3}{5x^5}+C$$

Задание

Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

1. $f(x) = x + x^3$
2. $f(x) = 2 \cdot \cos x$
3. $f(x) = 8 - 5x + 10x^2$
4. $f(x) = (4-3x)^9$

1. $F(x) = \frac{x}{2} + \cos x + C$
2. $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$
3. $F(x) = 8x - \frac{5x^2}{2} + \frac{10x^3}{3} + C$
4. $F(x) = 2\sin x + C$
5. $F(x) = 8x + \sin x + \frac{10x^2}{3} + C$
6. $F(x) = -\frac{1}{30}(4-3x)^{10} + C$
7. $F(x) = -\frac{1}{3}(4-3x)^{10} + C$

Основные методы вычисления неопределенных интегралов

При сведении данного интеграла к табличному часто используется следующее преобразование дифференциала (операция **«подведения под знак дифференциала»**).

$$f'(x)dx = d(f(x))$$

$$dx = d(x+b), \quad b = const;$$

Например:

$$dx = \frac{1}{a}d(ax+b), \quad a \neq 0, \quad a = const;$$
$$b = const;$$

$$\cos x du = d(\sin x).$$

Примеры

1. $$\int (3x+1)^9\,dx = \frac{1}{3}\int (3x+1)^9\,d(3x+1) =$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(3x+1)^{10}}{10} + C.$$

2. $$\int \frac{dx}{4x+5} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x+5)}{4x+5} = \frac{1}{4}\ln|4x+5| + C.$$

3. $$\int \cos\left(\frac{x}{5}+7\right)dx = 5\int \cos\left(\frac{x}{5}+7\right)d\left(\frac{x}{5}+7\right) =$$
$$= 5\sin\left(\frac{x}{5}+7\right) + C.$$

Интегрирование заменой переменной

Метод замены переменной (метод подстановки) состоит в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл

$$\int f(t)dt,$$

который вычисляется проще, чем исходный.

Пример

1. $$\int (6x-3)^5 dx = \left| \begin{matrix} t = 6x-3 \\ dt = 6dx, dx = \dfrac{dt}{6} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{6}\int t^5 dt = \frac{1}{6}\frac{t^6}{6} + C = (t = 6x-3) =$$

$$= \frac{1}{36}(6x-3)^6 + C.$$

$$2.\quad \int \frac{dx}{5-7x} = \left| \begin{array}{c} t = 5-7x \\ dt = -7dx, dx = -\frac{1}{7}dt \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7}\ln|t| + C = (t = 5-7x) =$$

$$= -\frac{1}{7}\ln|5-7x| + C.$$

$$3.\quad \int \sin\left(\frac{x}{2}-8\right)dx = \left| \begin{matrix} t=\dfrac{x}{2}-8, \\ dt=\dfrac{1}{2}dx, dx=2dt \end{matrix} \right| =$$

$$= 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C = (t=\frac{x}{2}-8) =$$

$$= -2\cos\left(\frac{x}{2}-8\right)+C.$$

Интегрирование по частям

Формула $\int u\,dv = uv - \int v\,du,$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ – дифференцируемые функции, называется **формулой интегрирования по частям**.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять, если

$$\int v\,du$$

более прост в вычислении, чем

$$\int u\,dv.$$

Некоторые типы интегралов, которые можно вычислять методом интегрирования по частям

1. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{mx}dx, \int P_n(x)a^{mx}dx,$

$$\int P_n(x)\sin mx dx, \quad \int P_n(x)\cos mx dx,$$

где $P_n(x)$ − многочлен, m − число.

Здесь полагают $u = P_n(x),$

за dv обозначают остальные сомножители.

2. Интегралы вида $\int P_n(x)\ln x dx$, $\int P_n(x)\arcsin x dx$, $\int P_n(x)\arccos x dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arctg} x dx$, $\int P_n(x)\mathrm{arcctg} x dx$.

Здесь полагают $P_n(x)dx = dv$

за ***u*** обозначают остальные сомножители.

3. Интегралы вида $\int e^{ax}\cos bx dx$, $\int e^{ax}\sin bx dx$,

где ***a*** и ***b*** – числа.

За ***u*** можно принять функцию e^{ax}.

Пример. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

$$1.\ \int (2x+5)\cos x\,dx = \left| \begin{array}{c} u = 2x+5,\ du = 2dx \\ dv = \cos x,\ v = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= (2x+5)\sin x - \int 2\sin x\,dx = (2x+5)\sin x + 2\cos x + C$$

$$2.\ \int x\cos x\,dx = \left| \begin{array}{l} u = x,\ du = dx \\ dv = \cos x\,dx,\ v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C\ .$$

3. $\int x \ln x dx = \left| \begin{matrix} u = \ln x, du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \dfrac{x^2}{2} \ln x - \int \dfrac{x^2}{2} \dfrac{dx}{x} =$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$