



*Неопределенный интеграл.
Основные методы интегрирования.*

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ называют любую ее первообразную функцию.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Где c – произвольная постоянная (*const*).



Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

1. $f(x) = x^n$

2. $f(x) = C$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

5. $f(x) = \cos x$

6. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

1. $F(x) = Cx + C$

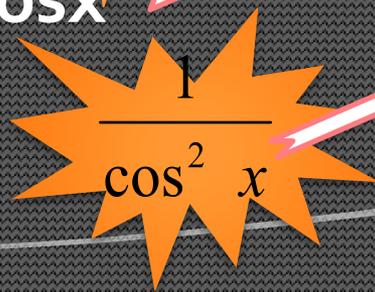
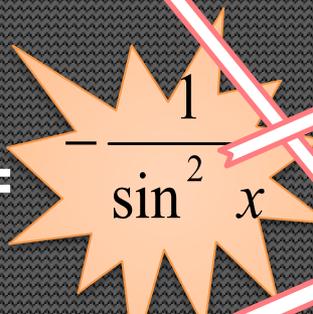
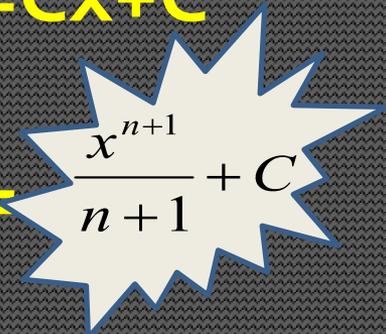
2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $F(x) = \operatorname{tg} x + C$

4. $F(x) = \sin x + C$

5. $F(x) = \operatorname{ctg} x + C$

6. $F(x) = -\cos x + C$



Свойства интеграла

$$\int (f(x) + g(x)) dx =$$

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx$$

Свойства интеграла

$$\left(\int f(x) dx \right)' = f(x)$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$$

Основные методы интегрирования

1. Табличный.

2. Сведение к табличному преобразованием подынтегрального выражения в сумму или разность.

3. Интегрирование с помощью замены переменной (подстановкой).

4. Интегрирование по частям

Таблица неопределенных интегралов

1. $\int dx = x + C .$

2. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1) .$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C .$

4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C .$

5. $\int e^x dx = e^x + C .$

6. $\int \sin x dx = -\cos x + C .$

7. $\int \cos x dx = \sin x + C .$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C .$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C .$

10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C .$

Таблица неопределенных интегралов

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C .$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a} \right| + C .$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C .$$

$$17. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C .$$

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C ..$$

$$18. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C .$$

$$14. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$19. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C .$$

$$15. \int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C .$$

$$20. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C .$$

Найти первообразные для функций:

1) $f(x) = 10x$

$$F(x) = 5x^2 + C$$

2) $f(x) = 3x^2$

$$F(x) = x^3 + C$$

3) $f(x) = \sin x + 5$

$$F(x) = -\cos x + 5x + C$$

4) $f(x) = 5\cos x$

$$F(x) = 5\sin x + C$$

5) $f(x) = 6x^2$

$$F(x) = 2x^3 + C$$

6) $f(x) = 3 - 2x$

$$F(x) = 3x - x^2 + C$$

Верно ли что:

а)

$$\int x^5 dx = 5x^4 + C$$

в)

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

б)

$$\int 3x^2 dx = 6x + C$$

г)

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C$$

Пример 1.

$$\int (3x^5 + 4 \cos x - 2x + 1) dx =$$

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5 dx + \int 4 \cos x dx - \int 2x dx + \int 1 dx =$$

$$3 \int x^5 dx + 4 \int \cos x dx - 2 \int x dx + 1 \int dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int \cos x dx = \sin x +$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int dx = x + c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4 \sin x - \frac{2x^2}{2} + x + C \rightarrow \frac{1}{2} x^6 + 4 \sin x - x^2 + x + C$$

Пример 2.

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - x^4 + 7e^x - \frac{2}{x} \right) dx$$

Проверить
решение



$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

**Записать
решение:**

$$\int \left(3x^{-5} - x^4 + 7e^x - \frac{2}{x} \right) dx$$

$$3 \int x^{-5} dx - \int x^4 dx + 7 \int e^x dx - 2 \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{3x^{-4}}{-4} - \frac{x^5}{5} + 7e^x - 2 \ln x + c$$

$$-\frac{3}{4x^4} - \frac{1}{5}x^5 + 7e^x - 2 \ln x + c$$

Пример 3.

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3\sqrt{x} \right) dx$$

Проверить
решение



$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

Записать
решение:

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3x^{\frac{1}{2}} \right) dx$$



$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$



$$4 \operatorname{tg} x + \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$



$$4 \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} x^4 - 2x\sqrt{x} + C$$

Пример 4.

$$\int \sin(6x + 2) dx$$

Проверить
решение

Записать
решение:

Введем новую переменную и
выразим дифференциалы:

$$6x + 2 = u$$

$$du = 6dx, \quad dx = \frac{1}{6} du$$

$$\int \sin(6x + 2) dx = \int \sin u \cdot \frac{1}{6} du$$

$$= \frac{1}{6} \int \sin u du = -\frac{1}{6} \cos u + c$$

$$-\frac{1}{6} \cos u + c =$$
$$-\frac{1}{6} \cos(6x + 2) + C$$

Пример 5.

$$\int \sqrt{3 - 6x} dx$$

Проверить
решение

$$u = 3 - 6x$$

**Записать
решение:**

Выполняем замену:

$$u = 3 - 6x$$

Выражаем дифференциалы:

$$du = -6dx \quad dx = -\frac{1}{6} du$$

$$-\frac{1}{6} \int \sqrt{u} du = -\frac{1}{6} \int u^{\frac{1}{2}} du$$

$$-\frac{1}{6} \cdot \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + C$$

$$-\frac{1}{9} (3 - 6x)^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{1}{9} \sqrt{(3 - 6x)^3} + C$$

$$-\frac{1}{9} (3 - 6x) \sqrt{3 - 6x} + C$$



Самостоятельная работа Найти неопределенный интеграл

Проверить
решение

Уровень «А» (на «3»)

$$1) \frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$$

$$2) 5x^5 + 3e^x - 4\ln x + C$$

Уровень «В» (на «4»)

$$3) \frac{1}{20}(3 + 4x)^5 + C$$

$$4) \frac{1}{6}e^{6x-3} + C$$

Уровень «С» (на «5»)

$$5) \frac{1}{5}\sin(5x - 4) + C$$

$$6) 2\operatorname{ctg}x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5x^5} + C$$

Задание

Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

$$1. f(x) = x + x^3$$

$$2. f(x) = 2 \cdot \cos x$$

$$3. f(x) = 8 - 5x + 10x^2$$

$$4. f(x) = (4 - 3x)^9$$

$$1. F(x) = \frac{x}{2} + \cos x + C$$

$$2. F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

$$3. F(x) = 8x - \frac{5x^2}{2} + \frac{10x^3}{3} + C$$

$$4. F(x) = 2 \sin x + C$$

$$5. F(x) = 8x + \sin x + \frac{10x^2}{3} + C$$

$$6. F(x) = -\frac{1}{30} (4 - 3x)^{10} + C$$

$$7. F(x) = -\frac{1}{3} (4 - 3x)^{10} + C$$

Основные методы вычисления неопределенных интегралов

При сведении данного интеграла к табличному часто используется следующее преобразование дифференциала (операция

«подведение знака дифференциала»).

$$dx = d(x + b), \quad b = \text{const};$$

Например $\int \frac{1}{a} d(ax + b), \quad a \neq 0, \quad a = \text{const};$
 $b = \text{const};$

$$\cos x du = d(\sin x).$$

Примеры

$$\begin{aligned} 1. \quad \int (3x + 1)^9 dx &= \frac{1}{3} \int (3x + 1)^9 d(3x + 1) = \\ &= \frac{1}{3} \frac{(3x + 1)^{10}}{10} + C. \end{aligned}$$

$$2. \quad \int \frac{dx}{4x + 5} = \frac{1}{4} \int \frac{d(4x + 5)}{4x + 5} = \frac{1}{4} \ln |4x + 5| + C.$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \int \cos \left(\frac{x}{5} + 7 \right) dx &= 5 \int \cos \left(\frac{x}{5} + 7 \right) d \left(\frac{x}{5} + 7 \right) = \\ &= 5 \sin \left(\frac{x}{5} + 7 \right) + C. \end{aligned}$$

Интегрирование заменой переменной

Метод замены переменной (метод подстановки) состоит в преобразовании интеграла $\int f(x)dx$ в другой интеграл

$$\int f(t)dt,$$

который вычисляется проще, чем исходный.

Пример

$$\begin{aligned} 1. \quad \int (6x - 3)^5 dx &= \left| \begin{array}{l} t = 6x - 3 \\ dt = 6dx, dx = \frac{dt}{6} \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{6} \int t^5 dt = \frac{1}{6} \frac{t^6}{6} + C = (t = 6x - 3) = \\ &= \frac{1}{36} (6x - 3)^6 + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \int \frac{dx}{5-7x} &= \left| \begin{array}{c} t = 5 - 7x \\ dt = -7dx, dx = -\frac{1}{7}dt \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{7} \int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7} \ln|t| + C = (t = 5 - 7x) = \\ &= -\frac{1}{7} \ln|5 - 7x| + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad \int \sin\left(\frac{x}{2} - 8\right) dx &= \left. \begin{array}{l} t = \frac{x}{2} - 8, \\ dt = \frac{1}{2} dx, dx = 2dt \end{array} \right| = \\ &= 2 \int \sin t dt = -2 \cos t + C = \left(t = \frac{x}{2} - 8\right) = \\ &= -2 \cos\left(\frac{x}{2} - 8\right) + C. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям

Формула $\int u dv = uv - \int v du,$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ –

дифференцируемые функции, называется

формулой интегрирования по частям.

Метод интегрирования по частям целесообразно применять, если

более прост в вычислении, чем $\int v du$
 $\int u dv.$

Некоторые типы интегралов, которые можно вычислять методом интегрирования по частям

1. Интегралы вида $\int P_n(x)e^{mx} dx$, $\int P_n(x)a^{mx} dx$,
 $\int P_n(x)\sin mx dx$, $\int P_n(x)\cos mx dx$,

где $P_n(x)$ – многочлен, m – число.

Здесь полагают $u = P_n(x)$,

за dv обозначают остальные
сомножители.

2. Интегралы вида $\int P_n(x) \ln x dx$, $\int P_n(x) \arcsin x dx$,
 $\int P_n(x) \arccos x dx$, $\int P_n(x) \arctg x dx$, $\int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx$.

Здесь полагают $P_n(x) dx = dv$

за u обозначают остальные

сомножители. $\int e^{ax} \cos b x dx$, $\int e^{ax} \sin b x dx$,

3. Интегралы вида

где a и b – числа.

e^{ax} .

За u можно принять функцию

Пример. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям.

$$1. \int (2x + 5) \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = 2x + 5, du = 2dx \\ dv = \cos x, v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= (2x + 5) \sin x - \int 2 \sin x dx = (2x + 5) \sin x + 2 \cos x + C$$

$$2. \int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| =$$
$$= x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C .$$

$$\mathbf{3.} \int x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x dx, v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$