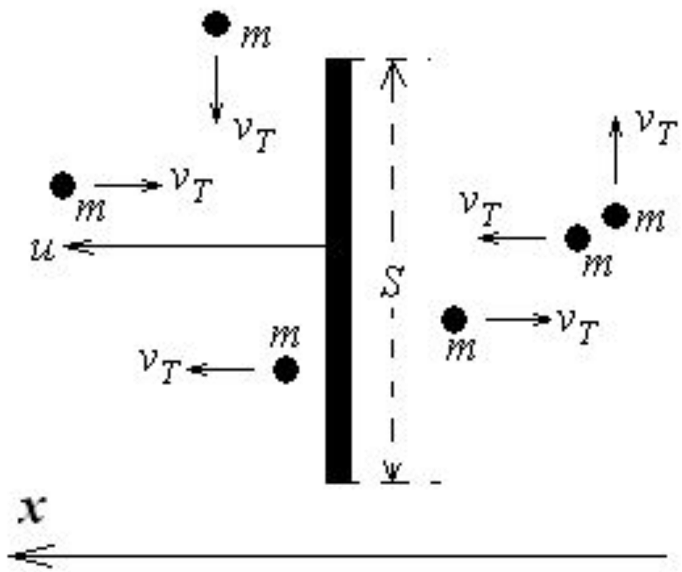
Движение в среде с сопротивлением

Природа сил сопротивления

Рассмотрим движение твердого тела в воздушной среде

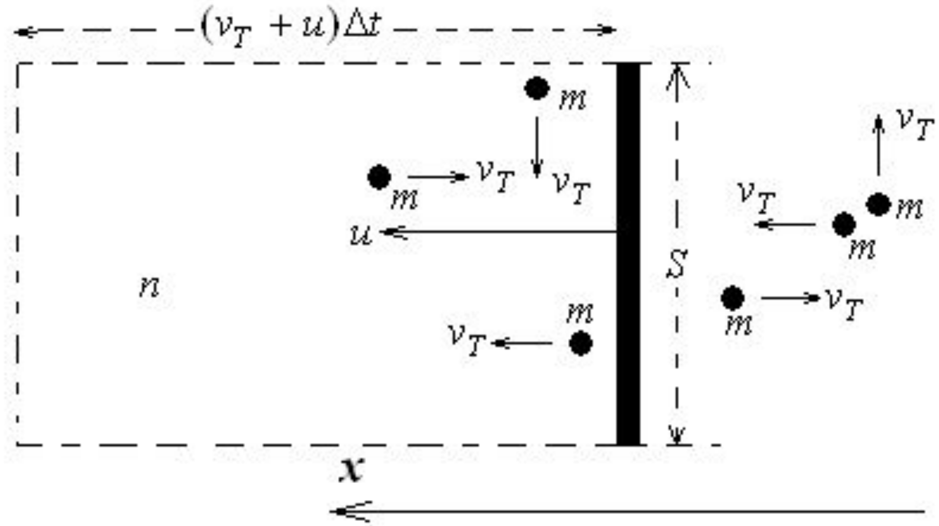


$v_T \succ u$

$$\vec{F}_i = \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \frac{m(v_T - u) - m(-)(v_T + u)}{\Delta t}$$

Природа сил сопротивления

Для всех молекул воздуха



С левой стороны

$$\left|\vec{F}\right| = \sum_{i=1}^{n}\left\|\vec{F}_i\right\| = N\frac{m2v_T}{\Delta t} = nS(v_T + u)\Delta t\,\frac{2mv_T}{\Delta t} \approx 2m\,nS(v_T + u)v_T$$

Природа сил сопротивления

Из условия

$$\left|\vec{F}\right| = \sum_{i=1}^{n} \left\|\vec{F}_i\right\| = N\frac{m2v_T}{\Delta t} = nS(v_T + u)\Delta t\,\frac{2mv_T}{\Delta t} \approx 2m\,nS(v_T + u)v_T$$

При $v_T \succ u$

$$\left|\vec{F}\right| \sim (v_T + u)v_T \sim u$$

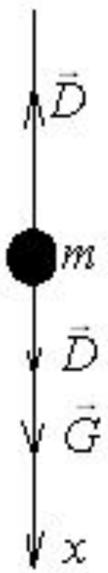
При $v_T \prec u$

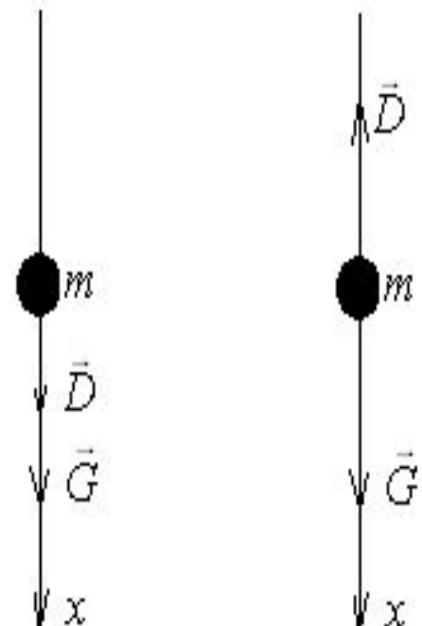
$$\left|\vec{F}\right| \sim u^2$$

Движение в среде с сопротивлением

Пусть сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости

$$D = \lambda v^2 = \lambda \dot{x}^2$$





а)   б)

Движение в среде с сопротивлением

Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = G + D_x = G \pm \lambda\dot{x}^2$$

Либо

$$\ddot{x} = g \mp \frac{\lambda}{m}\dot{x}^2 = \frac{\lambda}{m}\left(\frac{gm}{\lambda} \mp \dot{x}^2\right)$$

Знак «-» – движение вниз (нисходящее движение)

Знак «+» – движение вверх (восходящее движение)

Движение в среде с сопротивлением

Заменим

$$\frac{\lambda}{m} = a; \quad \frac{mg}{\lambda} = c^2; \quad \dot{x} = v$$

Тогда дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 \mp v_x^2)$$

Решение диф. Уравнения зависит от знака, поэтому разобъем решение на две части.

Движение в среде с сопротивлением

1. **Нисходящее движение.**

$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 - v_x^2)$$

Делим переменные

$$\frac{dv}{(c^2 - v_x^2)} = a\,dt$$

Интегрируем

$$\frac{1}{2c}\ln\left|\frac{c+v}{c-v}\right| = at + \frac{\delta}{c}$$

Где - постоянная интегрирования

Движение в среде с сопротивлением

Решение уравнения

$$\frac{1}{2c}\ln\left|\frac{c+v}{c-v}\right| = at + \frac{\delta}{c}$$

Делится на 2 случая

А) случай $v \prec c$. Ля этого случая

$$\frac{c+v}{c-v} = e^{2(act+\delta)}$$

Или

$$v = c\,\frac{e^{2(act+\delta)}-1}{e^{2(act+\delta)}+1}$$

Движение в среде с сопротивлением

Вводим

$$thz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{e^{z} + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Следовательно скорость

$$v = c * th(act + \delta)$$

Используем начальные условия: $t = 0;\ v = v_0$

Получим

$$v_0 = c * th\,\delta$$

Движение в среде с сопротивлением

Асимптотика поведения:

При $t \to \infty$ $v \to c$ поскольку $th(act + \delta) \to 1$

Константа

$$c = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

Имеет размерность скорости (предельная скорость)

Движение в среде с сопротивлением

Определяем второй интеграл движения

Из уравнения $v = \dot{x} = c * th(act + \delta)$

получаем

$$x = c\int th(act + \delta)dt = \frac{1}{a}\ln(act + \delta) + C_2$$

Положим при

$$t = 0;\ x = 0\quad C_2 = -\frac{1}{a}\ln(ch\delta)$$

Движение в среде с сопротивлением

Рассмотрим случай б) при $v \succ c$ имеем

$$\frac{v+c}{v-c} = e^{2(act+\delta)}$$

Или

$$v = c\frac{e^{2(act+\delta)}+1}{e^{2(act+\delta)}-1}$$

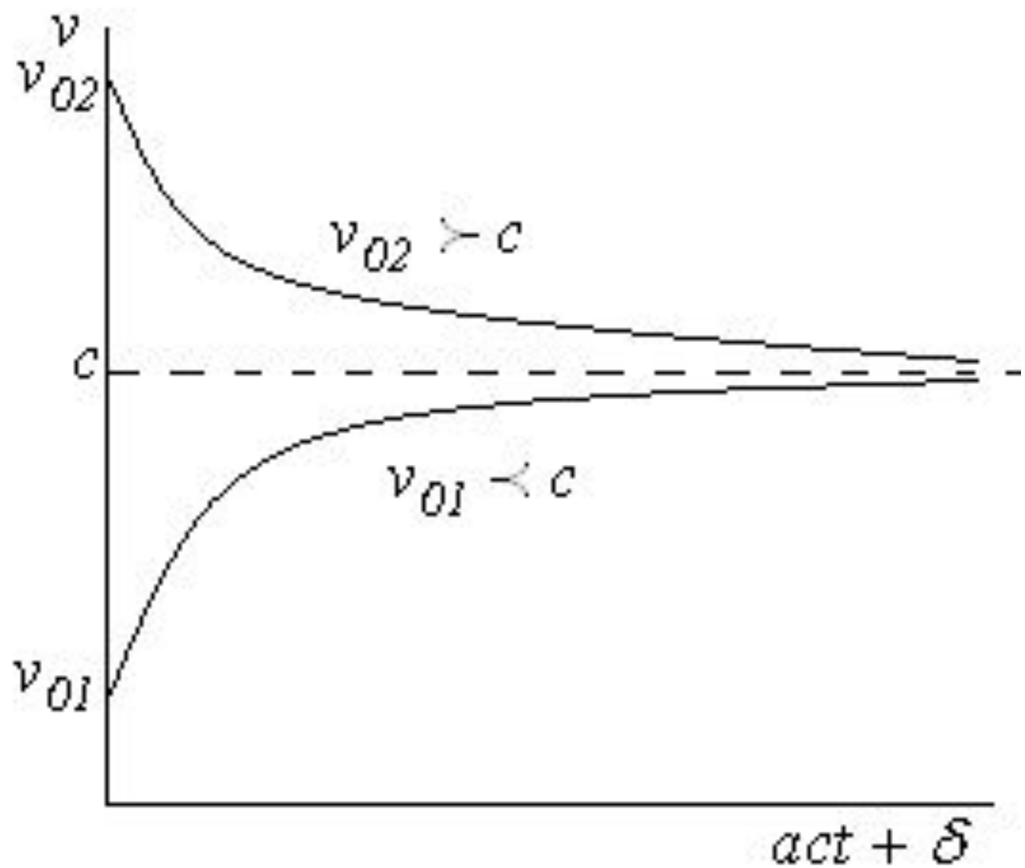
Либо

$$v = c * cth(act+\delta)$$

Движение в среде с сопротивлением

Определяем постоянную интегрирования

$$v_0 = c * cth\,\delta$$



Движение в среде с сопротивлением

Случай 2. Восходящее движение

При подъеме уравнение движения

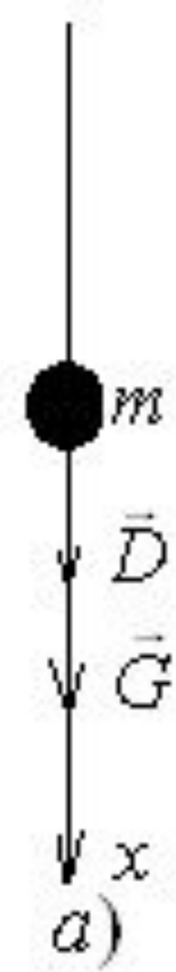
$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 + v^2)$$

Делим переменные

$$\int \frac{dv}{c^2 + v^2} = \int a\,dt$$

И определяем

$$\frac{1}{c} arctg \frac{v}{c} = at + C_3$$



Движение в среде с сопротивлением

Из условия $t = 0;\ v = -v_0$ определяем

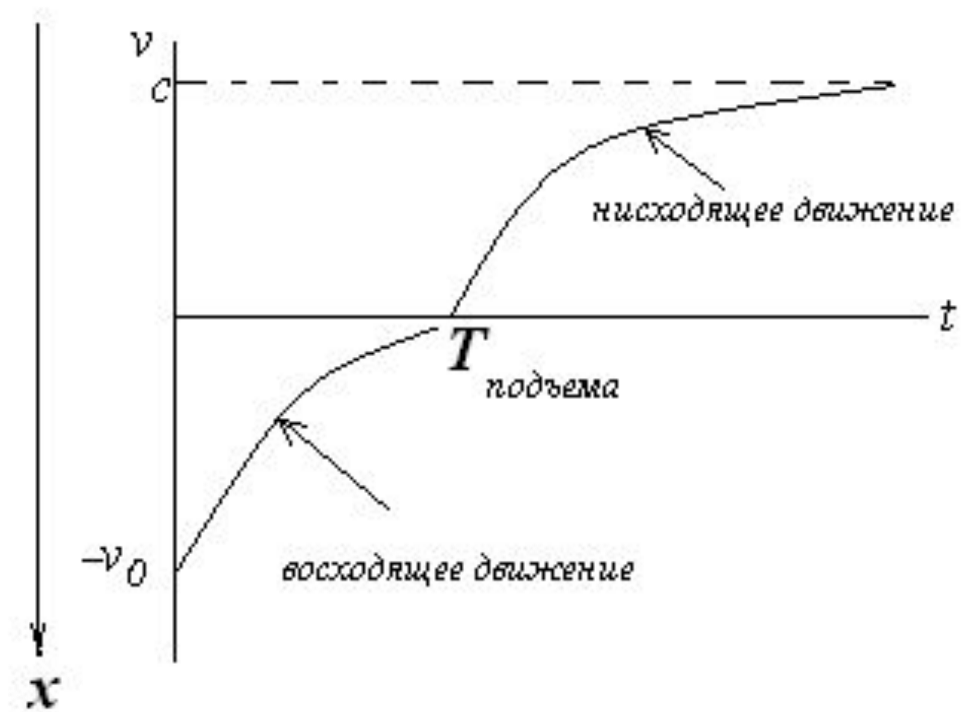
$$C_3 = -\frac{1}{c} arctg \frac{v_0}{c}$$

Откуда закон изменения скорости

$$v = c * tg\left(act - arctg \frac{v_0}{c} \right)$$

Движение в среде с сопротивлением

Закон изменения скорости



Движение в среде с сопротивлением

Восходящее движение продолжается до тех пор, пока скорость не обратится в ноль:

$$c * tg\left(acT - arctg\frac{v_0}{c}\right) = 0$$

Откуда время подъема

$$T = \frac{1}{ac} arctg\frac{v_0}{c}$$

Движение в среде с сопротивлением

При этом максимальная высота подъема

$$h = -\frac{1}{a}\ln\frac{\cos\left(arctg\frac{v_0}{c} - arctg\frac{v_0}{c}\right)}{\cos\left(\frac{1}{c}arctg\frac{v_0}{c}\right)} =$$

$$= \frac{1}{a}\ln\cos(arctg\frac{v_0}{c}) = \frac{1}{2a}\ln\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right)$$

Движение в среде с сопротивлением

Разлагаем в ряд

$$h \approx \frac{1}{2a}\left(\frac{v_0^2}{c^2} - \frac{1}{2}\frac{v_0^4}{c^4}\right) = \frac{v_0^2}{2ac^2}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{c^2}\right)$$

Либо с учетом

$$\frac{\lambda}{m} = a; \quad \frac{mg}{\lambda} = c^2$$

Получим

$$h \approx \frac{v_0^2}{2g}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{v_0^2 \lambda}{mg}\right)$$

(сравнить с $h = \frac{v_0^2}{2g}$)