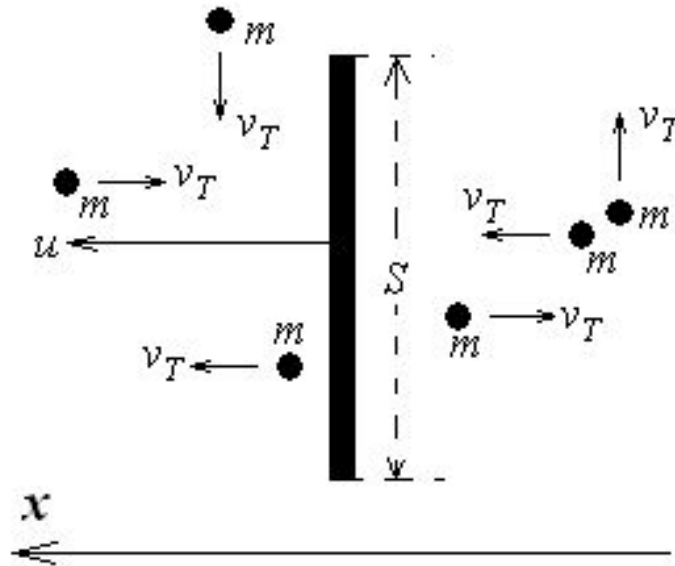


*Движение в среде с сопротивлением*

# Природа сил сопротивления

Рассмотрим движение твердого тела в воздушной среде

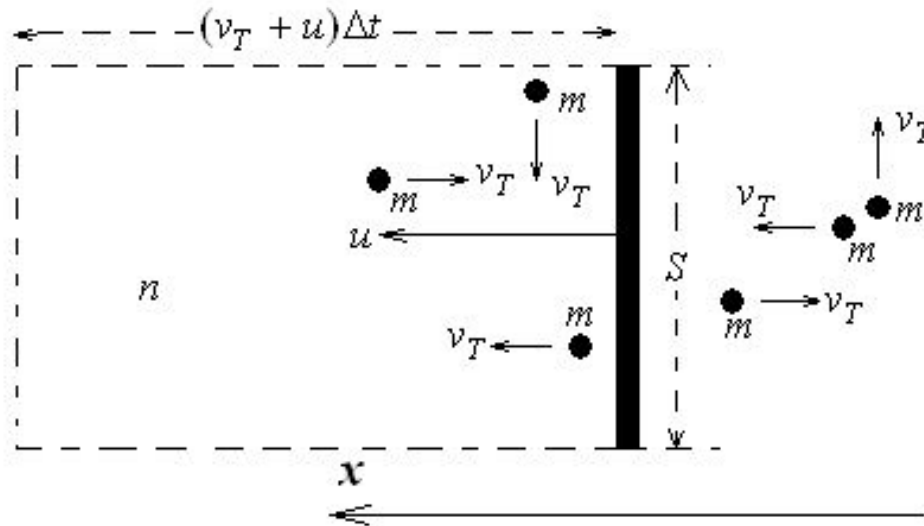


$$v_T \succ u$$

$$\bar{F}_i = \frac{\Delta \bar{P}}{\Delta t} = \frac{m(v_T - u) - m(-)(v_T + u)}{\Delta t}$$

# Природа сил сопротивления

Для всех молекул воздуха



С левой стороны

$$|\bar{F}| = \sum_{i=1}^n \|\bar{F}_i\| = N \frac{m 2v_T}{\Delta t} = nS(v_T + u)\Delta t \frac{2mv_T}{\Delta t} \approx 2mnS(v_T + u)v_T$$

# Природа сил сопротивления

Из условия

$$|\bar{F}| = \sum_{i=1}^n \|\bar{F}_i\| = N \frac{m 2v_T}{\Delta t} = nS(v_T + u) \Delta t \frac{2mv_T}{\Delta t} \approx 2mnS(v_T + u)v_T$$

При  $v_T \gg u$

$$|\bar{F}| \sim (v_T + u)v_T \sim u$$

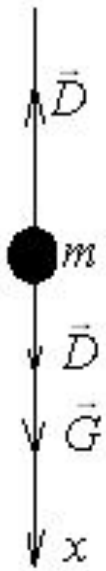
При  $v_T \ll u$

$$|\bar{F}| \sim u^2$$

# Движение в среде с сопротивлением

Пусть сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости

$$D = \lambda v^2 = \lambda \dot{x}^2$$



# *Движение в среде с сопротивлением*

Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = G + D_x = G \pm \lambda \dot{x}^2$$

Либо

$$\ddot{x} = g \mp \frac{\lambda}{m} \dot{x}^2 = \frac{\lambda}{m} \left( \frac{gm}{\lambda} \mp \dot{x}^2 \right)$$

Знак «-» – движение вниз (нисходящее движение)

Знак «+» – движение вверх (восходящее движение)

# *Движение в среде с сопротивлением*

Заменим

$$\frac{\lambda}{m} = a; \quad \frac{mg}{\lambda} = c^2; \quad \dot{x} = v$$

Тогда дифференциальное уравнение движения

$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 \mp v_x^2)$$

Решение диф. Уравнения зависит от знака, поэтому разобьем решение на две части.

# Движение в среде с сопротивлением

## 1. Нисходящее движение.

$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 - v_x^2)$$

Делим переменные

$$\frac{dv}{(c^2 - v_x^2)} = a dt$$

Интегрируем

$$\frac{1}{2c} \ln \left| \frac{c+v}{c-v} \right| = at + \frac{\delta}{c}$$

Где  $\delta$  - постоянная интегрирования



# Движение в среде с сопротивлением

Решение уравнения

$$\frac{1}{2c} \ln \left| \frac{c+v}{c-v} \right| = at + \frac{\delta}{c}$$

Делится на 2 случая

А) случай  $v < c$  . Для этого случая

$$\frac{c+v}{c-v} = e^{2(at+\delta)}$$

Или

$$v = c \frac{e^{2(at+\delta)} - 1}{e^{2(at+\delta)} + 1}$$

# Движение в среде с сопротивлением

Вводим

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

Следовательно скорость

$$v = c * \operatorname{th}(act + \delta)$$

Используем начальные условия.  $t = 0; v = v_0$

Получим

$$v_0 = c * \operatorname{th} \delta$$

# *Движение в среде с сопротивлением*

Асимптотика поведения:

При  $t \rightarrow \infty$   $v \rightarrow c$  поскольку  $\text{th}(act + \delta) \rightarrow 1$

Константа

$$c = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

Имеет размерность скорости (предельная скорость)

# *Движение в среде с сопротивлением*

Определяем второй интеграл движения

Из уравнения  $v = \dot{x} = c * th(act + \delta)$

получаем

$$x = c \int th(act + \delta) dt = \frac{1}{a} \ln(act + \delta) + C_2$$

Положим при

$$t = 0; x = 0 \quad C_2 = -\frac{1}{a} \ln(ch\delta)$$

# Движение в среде с сопротивлением

Рассмотрим случай б) при  $v > c$  имеем

$$\frac{v + c}{v - c} = e^{2(act + \delta)}$$

Или

$$v = c \frac{e^{2(act + \delta)} + 1}{e^{2(act + \delta)} - 1}$$

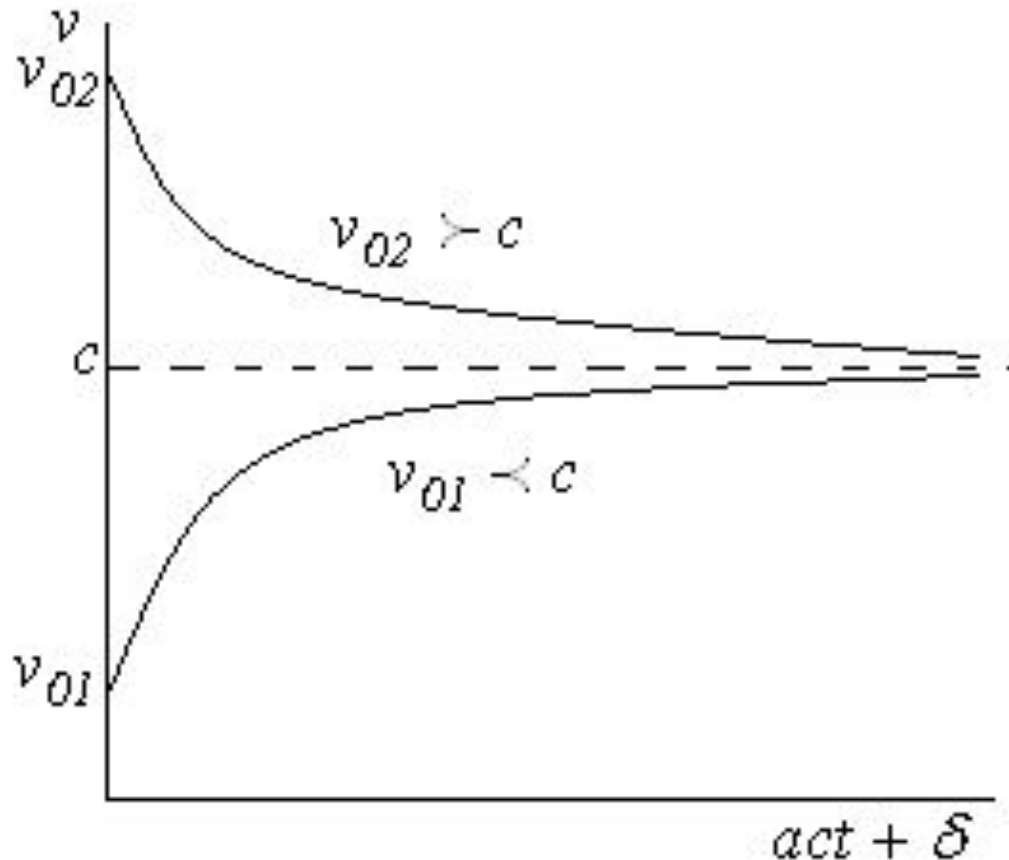
Либо

$$v = c * \operatorname{cth}(act + \delta)$$

# Движение в среде с сопротивлением

Определяем постоянную интегрирования

$$v_0 = c \pm c \operatorname{th} \delta$$



# Движение в среде с сопротивлением

Случай 2. Восходящее движение

При подъеме уравнение движения

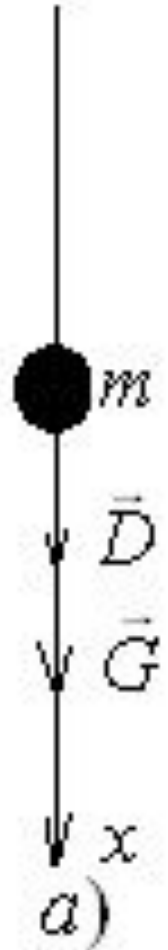
$$\frac{dv}{dt} = a(c^2 + v^2)$$

Делим переменные

$$\int \frac{dv}{c^2 + v^2} = \int a dt$$

И определяем

$$\frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{v}{c} = at + C_3$$



## *Движение в среде с сопротивлением*

Из условия  $t = 0; v = -v_0$  определяем

$$C_3 = -\frac{1}{c} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{c}$$

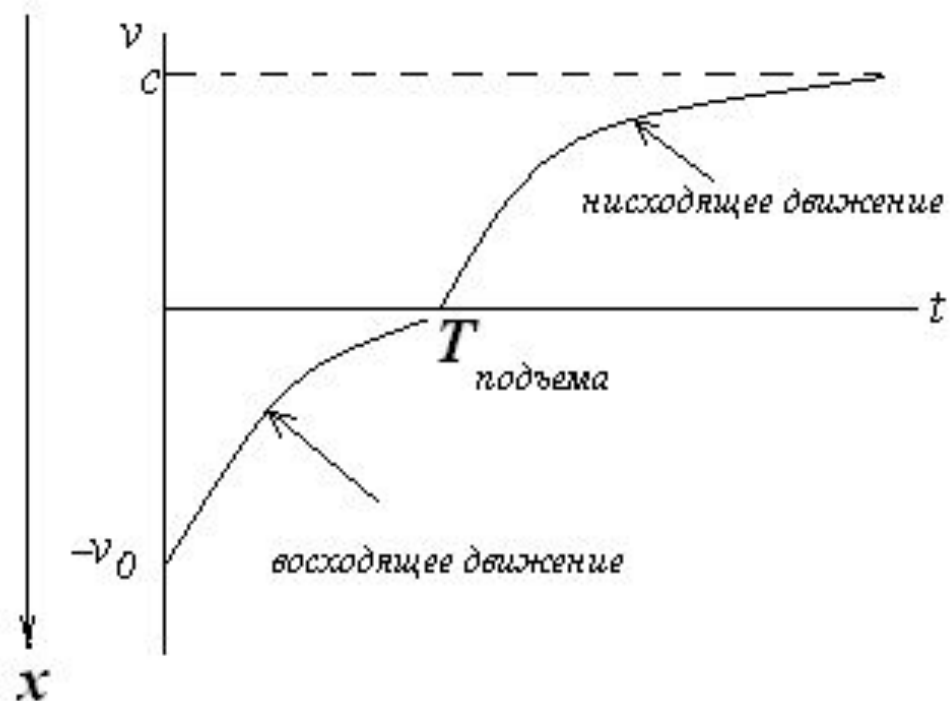
Откуда закон изменения скорости

$$v = c \operatorname{tg} \left( act - \operatorname{arctg} \frac{v_0}{c} \right)$$



# Движение в среде с сопротивлением

## Закон изменения скорости



## *Движение в среде с сопротивлением*

Восходящее движение продолжается до тех пор, пока скорость не обратится в ноль:

$$c \cdot \operatorname{tg} \left( acT - \operatorname{arctg} \frac{v_0}{c} \right) = 0$$

Откуда время подъема

$$T = \frac{1}{ac} \operatorname{arctg} \frac{v_0}{c}$$

# *Движение в среде с сопротивлением*

При этом максимальная высота подъема

$$h = -\frac{1}{a} \ln \frac{\cos\left(\arctg \frac{v_0}{c} - \arctg \frac{v_0}{c}\right)}{\cos\left(\frac{1}{c} \arctg \frac{v_0}{c}\right)} =$$
$$= \frac{1}{a} \ln \cos\left(\arctg \frac{v_0}{c}\right) = \frac{1}{2a} \ln \left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right)$$

# Движение в среде с сопротивлением

Разлагаем в ряд

$$h \approx \frac{1}{2a} \left( \frac{v_0^2}{c^2} - \frac{1}{2} \frac{v_0^4}{c^4} \right) = \frac{v_0^2}{2ac^2} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{c^2} \right)$$

Либо с учетом

$$\frac{\lambda}{m} = a; \quad \frac{mg}{\lambda} = c^2$$

Получим

$$h \approx \frac{v_0^2}{2g} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \lambda}{mg} \right)$$

(сравнить с

$$h = \frac{v_0^2}{2g})$$