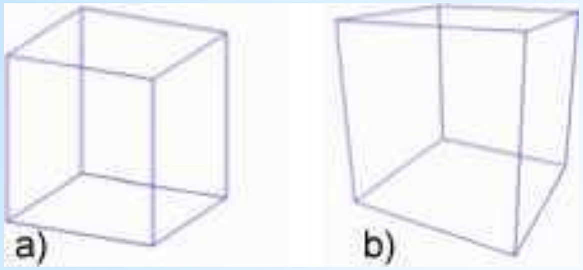
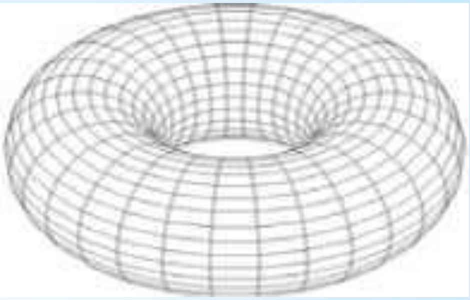
* Лекция 5. Трехмерные преобразования

Лектор: Решевская Екатерина Сергеевна

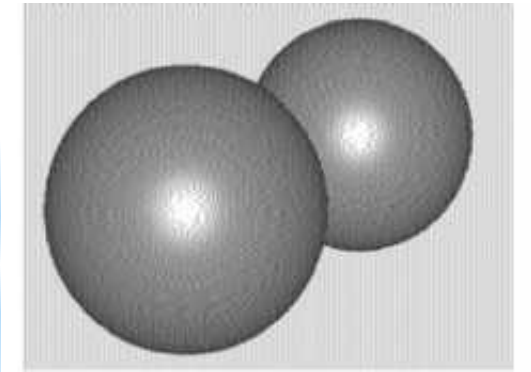
*Типы моделей 3Д-объектов



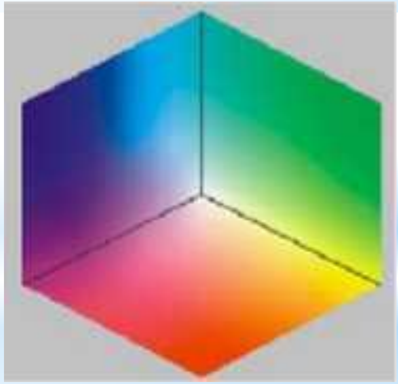
Каркасные (проволочные) модели
Параллельная (а) и центральная (Ь) проекции



Формы
с удалением скрытых линий

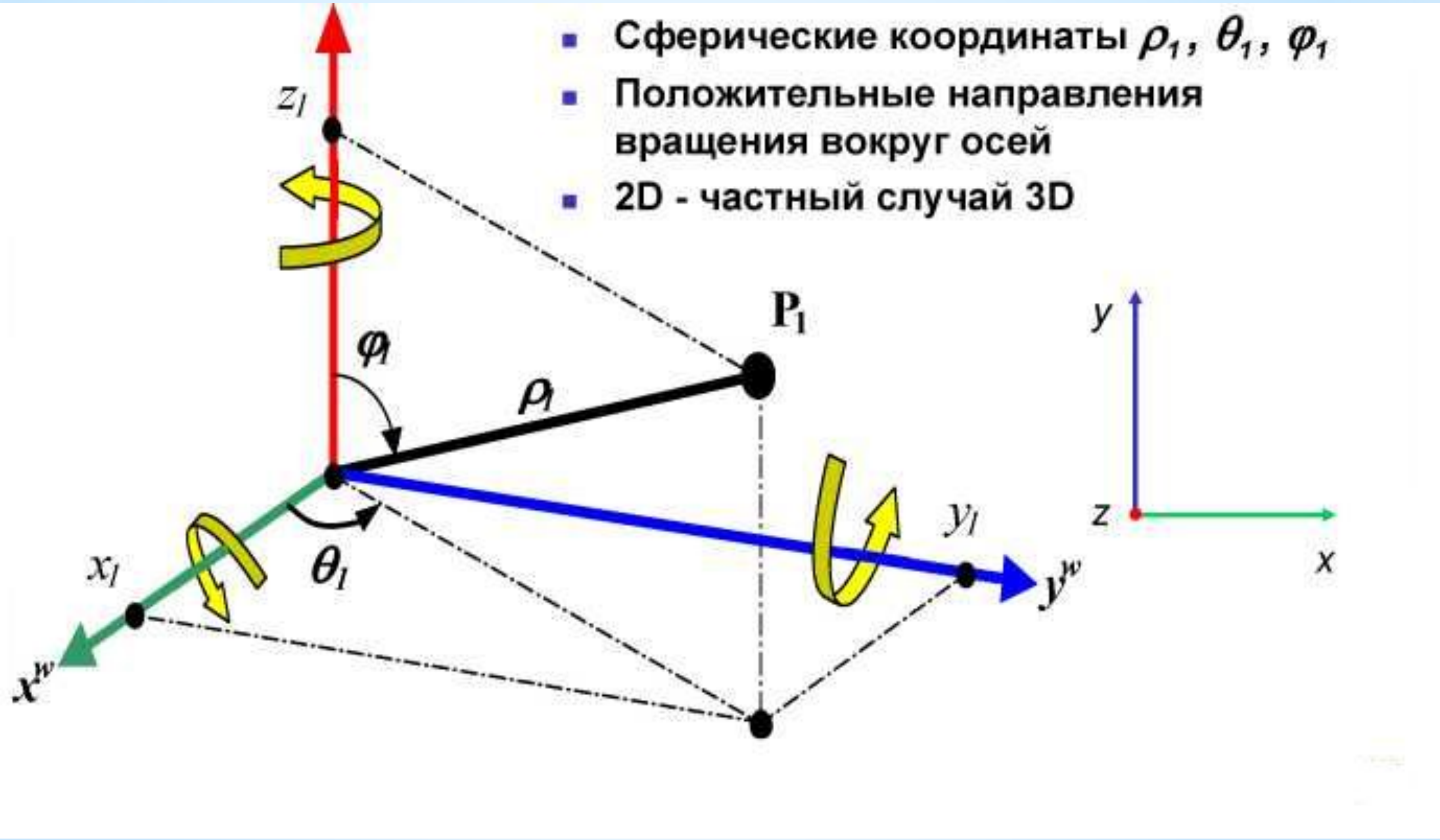


Полутоновые формы



Цветные формы

*3Д-система координат



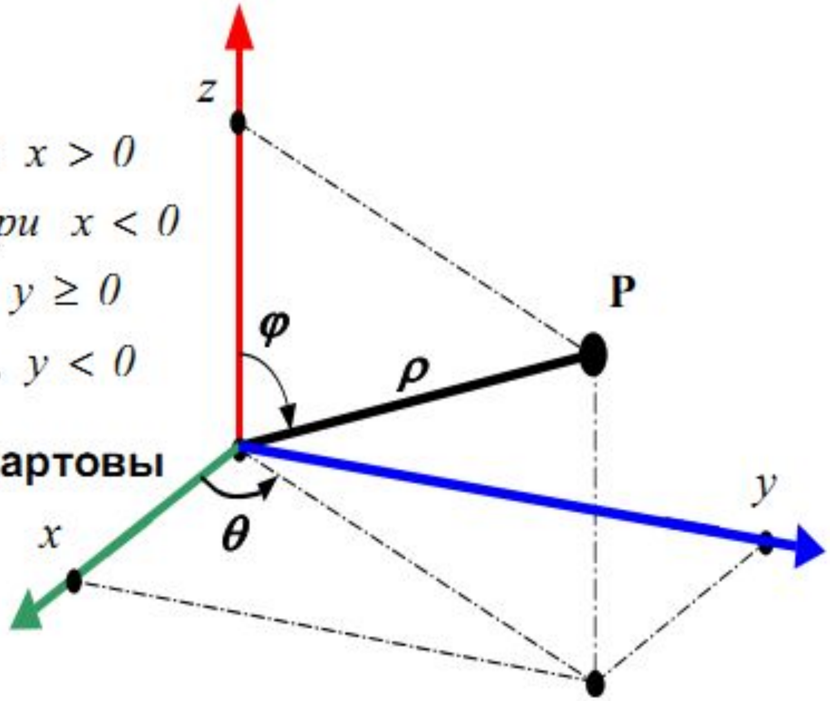
Пересчет систем координат

- **Из декартовых в сферические**

$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, при $\rho = 0$, считаем $\varphi=\theta=0$

$$\varphi = \arccos \frac{z}{\rho}$$

$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), \text{ при } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}(y/x), \text{ при } x < 0 \\ \pi/2, \text{ при } x = 0,\ y \geq 0 \\ 3\pi/2, \text{ при } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$



- **Из сферических в декартовы**

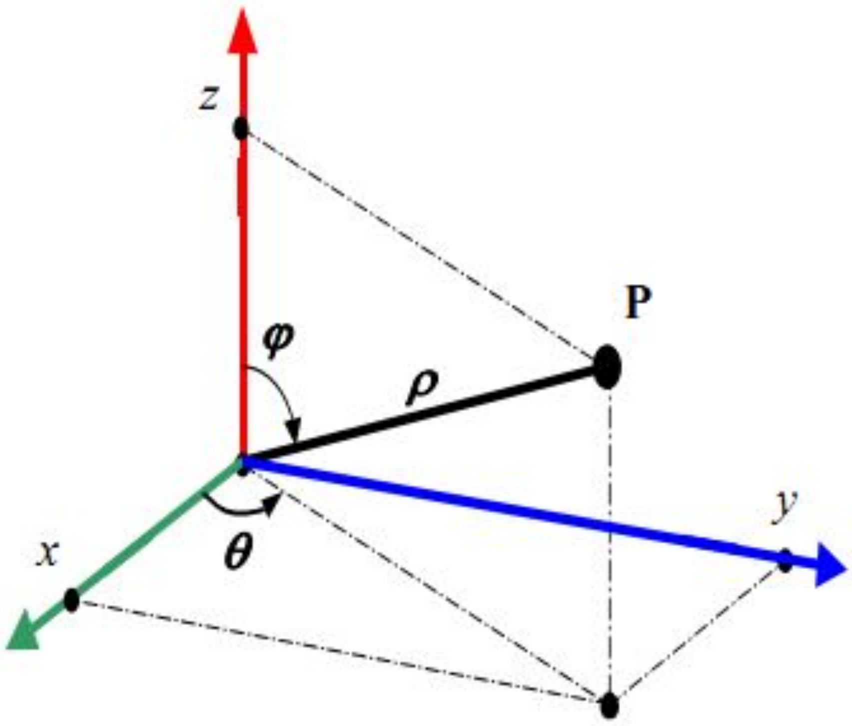
$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$

*Базовые преобразования в 3Д

- Перенос точки
- Масштабирование точки
- Поворот точки
  - вокруг x
  - вокруг y
  - вокруг z
- Изменение знака
  - x координаты
  - y координаты
  - z координаты



*Базовые преобразования в 3Д

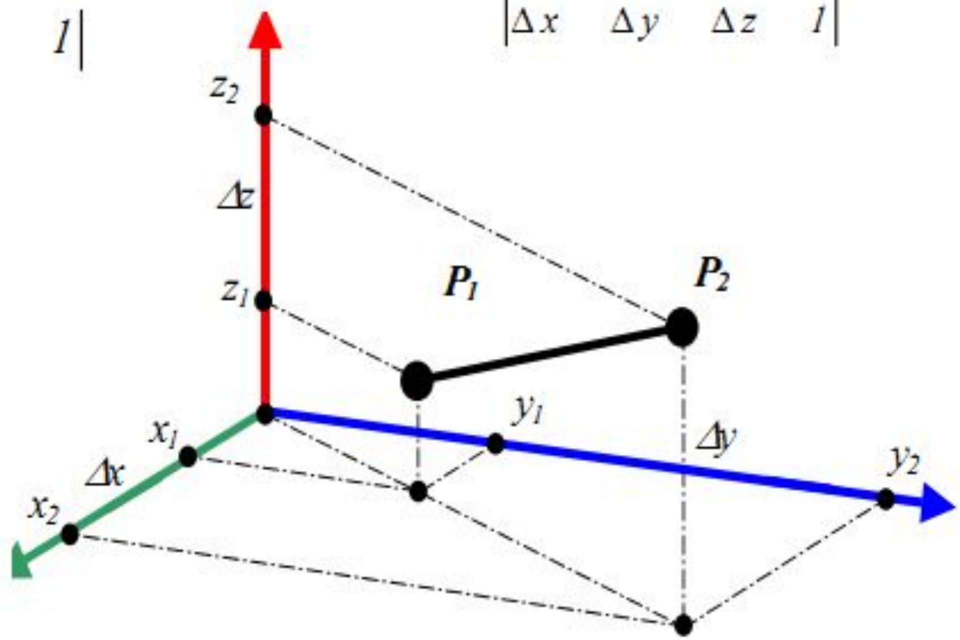
Перенос точки

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot T^*$$

$$T^*(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{vmatrix}$$



*Базовые преобразования в 3Д

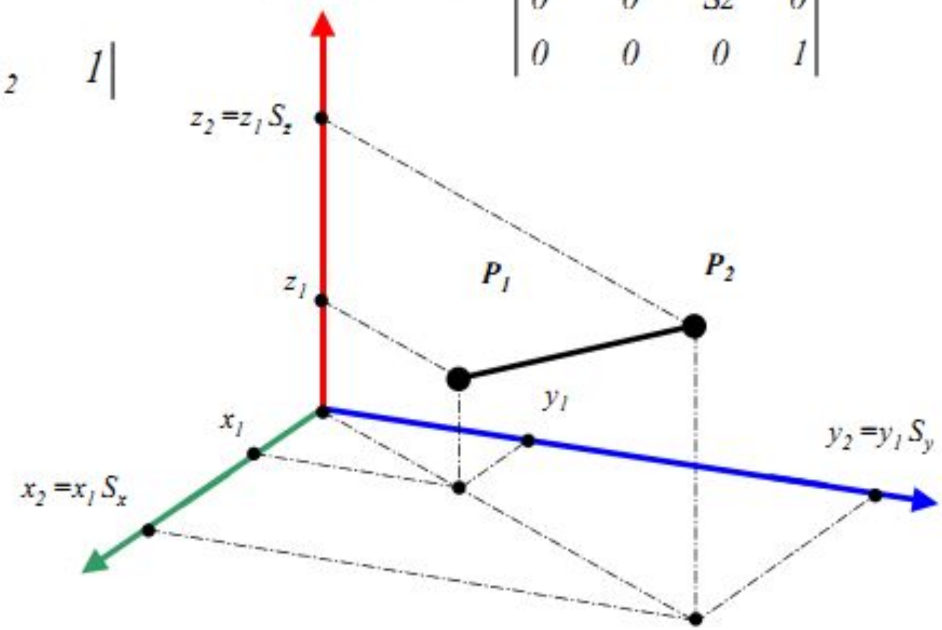
Масштабирование точки

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot S^*$$

$$S^*(Sx, Sy, Sz) = \begin{vmatrix} Sx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Sy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Sz & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



*Базовые преобразования в 3Д

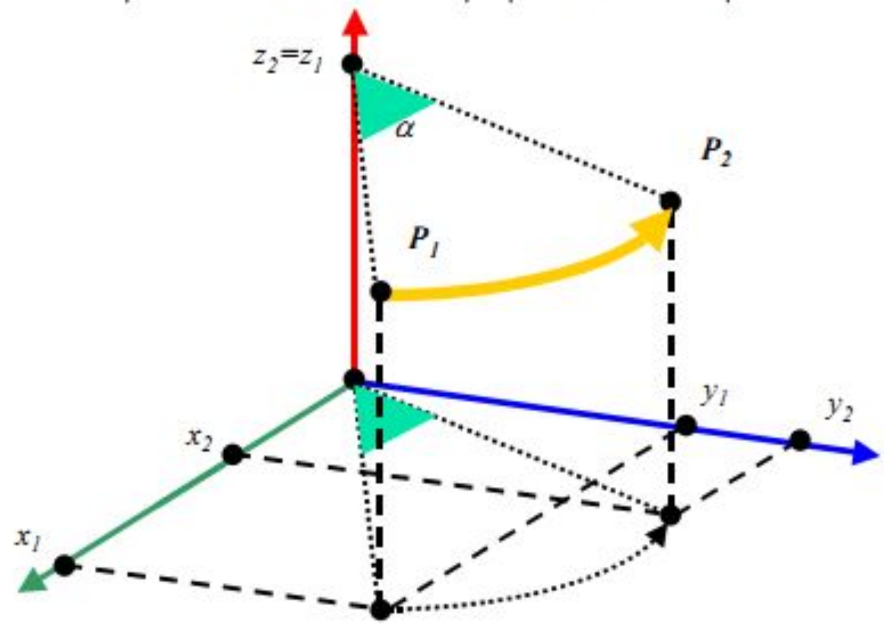
Поворот точки вокруг z

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

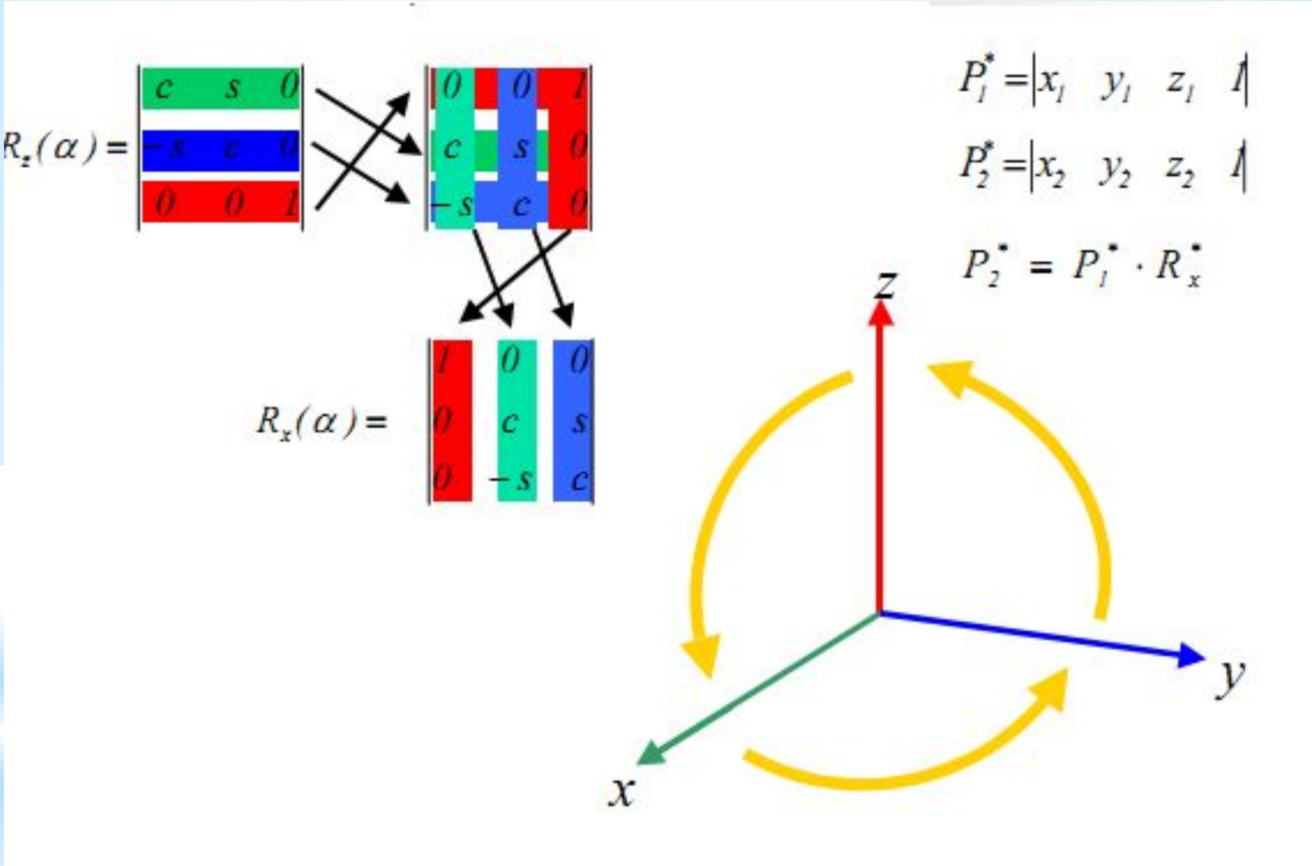
$$P_2^* = P_1^* \cdot R_z^*$$

$$R_z^*(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



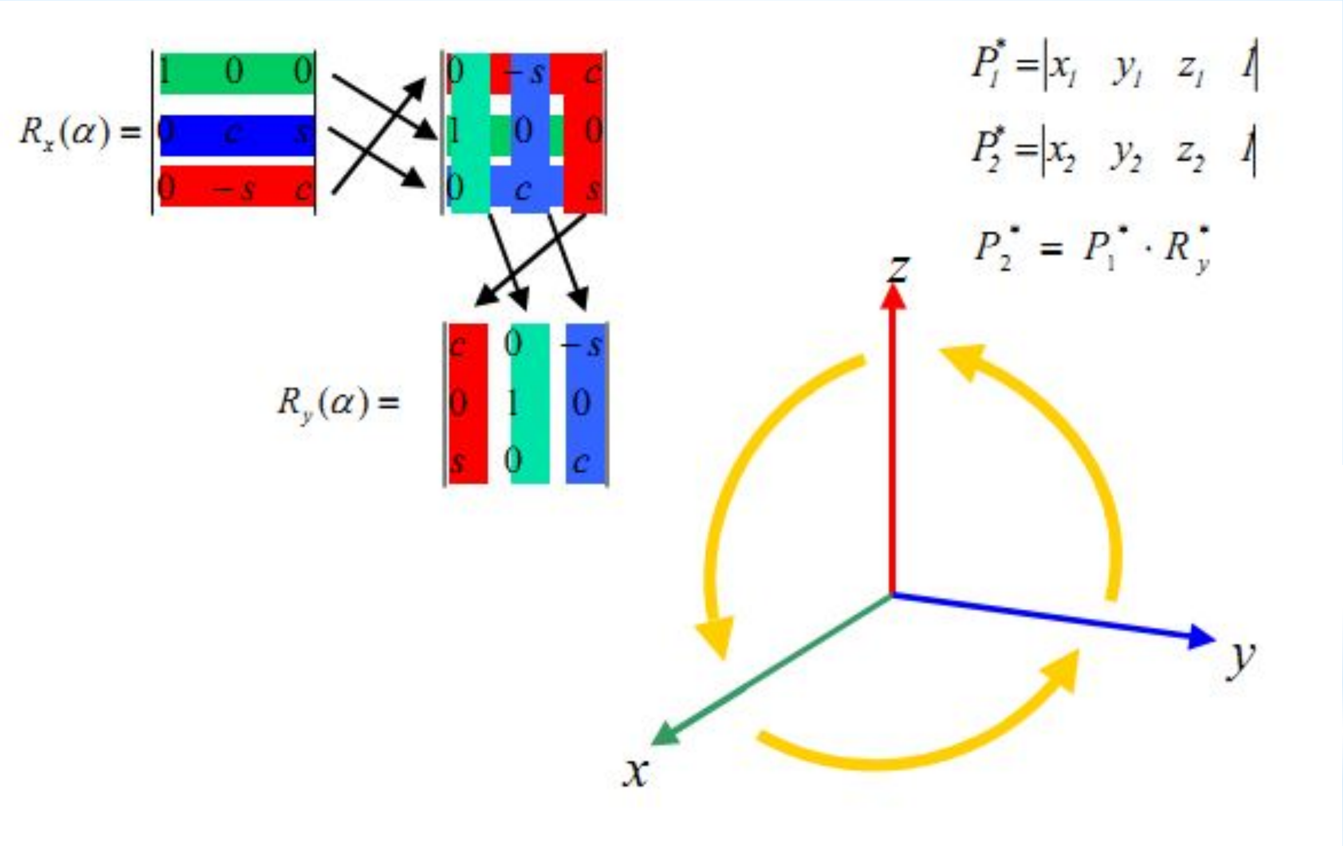
Базовые преобразования в 3Д

Поворот точки вокруг x



*Базовые преобразования в 3Д

Поворот точки вокруг y



*Базовые преобразования в 3Д

Изменение знака точки

$$M_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

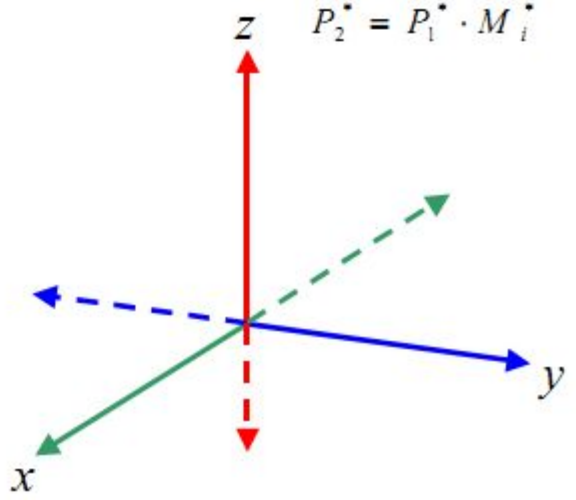
$$M_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot M_i^*$$



*Базовые преобразования в 3Д

Сводные результаты

$$T^{*}(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=\begin{vmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\Delta x&\Delta y&\Delta z&1\end{vmatrix}$$

$$S^{*}(Sx,Sy,Sz)=\begin{vmatrix}Sx&0&0&0\\0&Sy&0&0\\0&0&Sz&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}$$

$$T^{-1}(\Delta x,\Delta y,\Delta z)=T(-\Delta x,-\Delta y,-\Delta z)$$

$$S^{-1}(Sx,Sy,Sz)=S(\frac{1}{Sx},\frac{1}{Sy},\frac{1}{Sy})$$

$$R_i^{-1}(\alpha)=R_i(-\alpha)$$

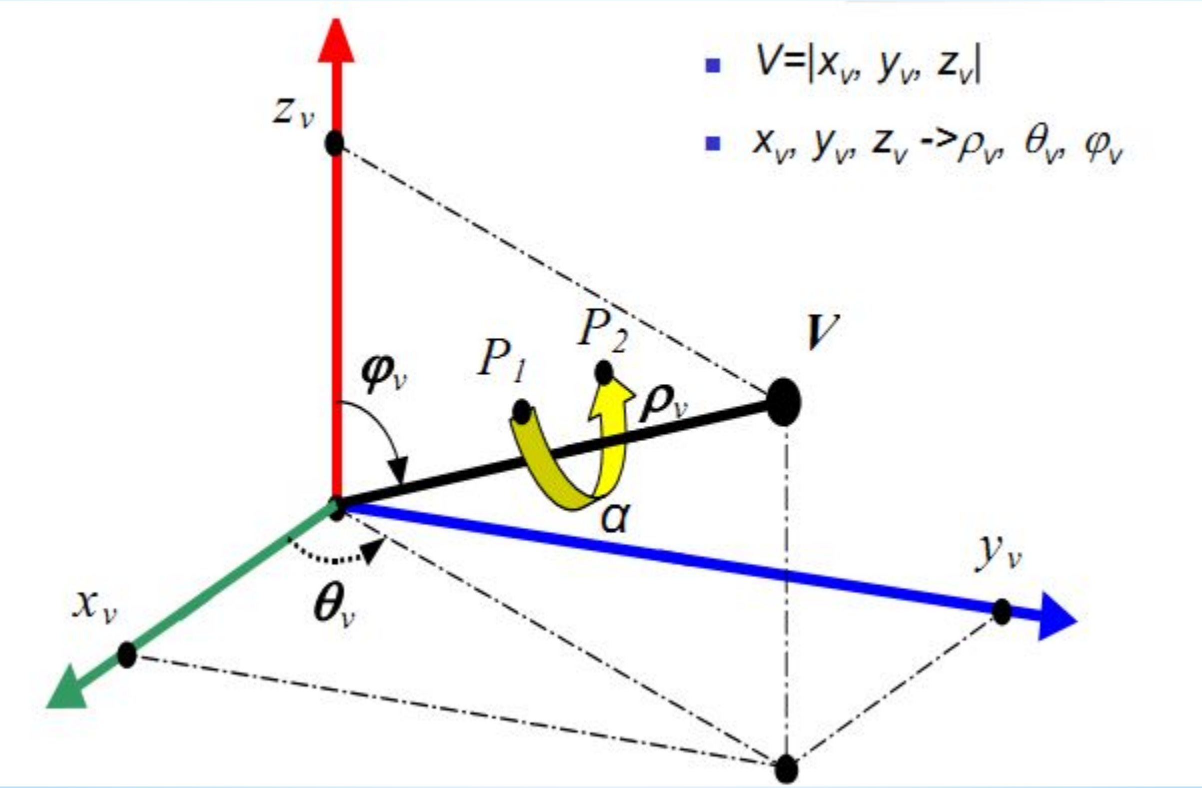
$$R_x^{*}(\alpha)=\left|\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&c&s&0\\0&-s&c&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right| \qquad M_x^{*}=\left|\begin{array}{ccc|c}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right|$$

$$R_y^{*}(\alpha)=\left|\begin{array}{ccc|c}c&0&-s&0\\0&1&0&0\\s&0&c&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right| \qquad M_y^{*}=\left|\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&-1&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right|$$

$$R_z^{*}(\alpha)=\left|\begin{array}{ccc|c}c&s&0&0\\-s&c&0&0\\0&0&1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right| \qquad M_z^{*}=\left|\begin{array}{ccc|c}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\\hline 0&0&0&1\end{array}\right|$$

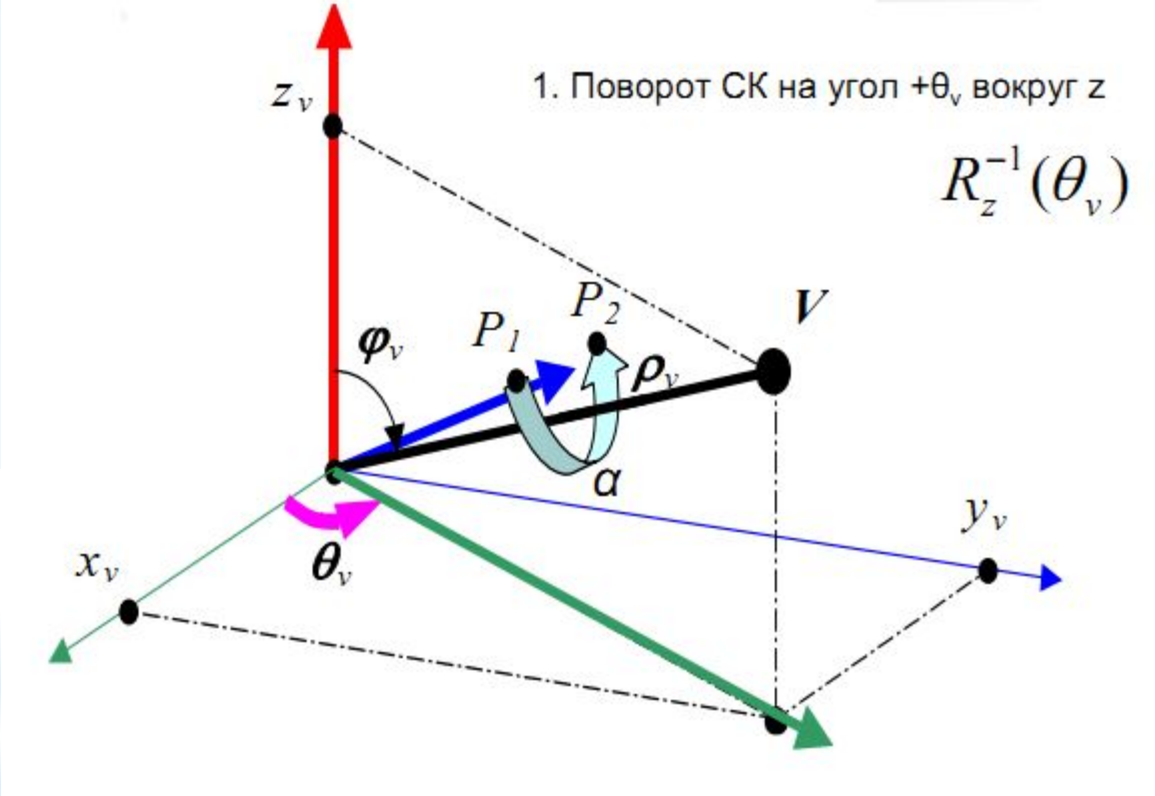
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



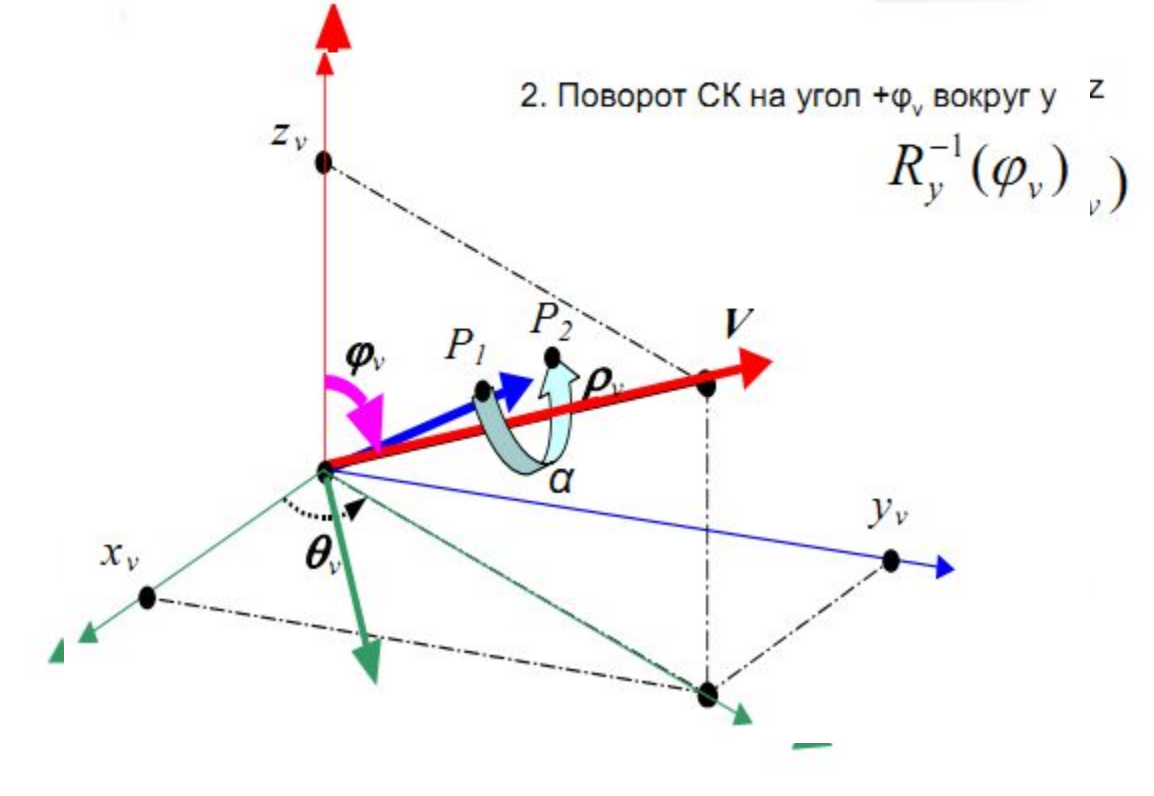
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



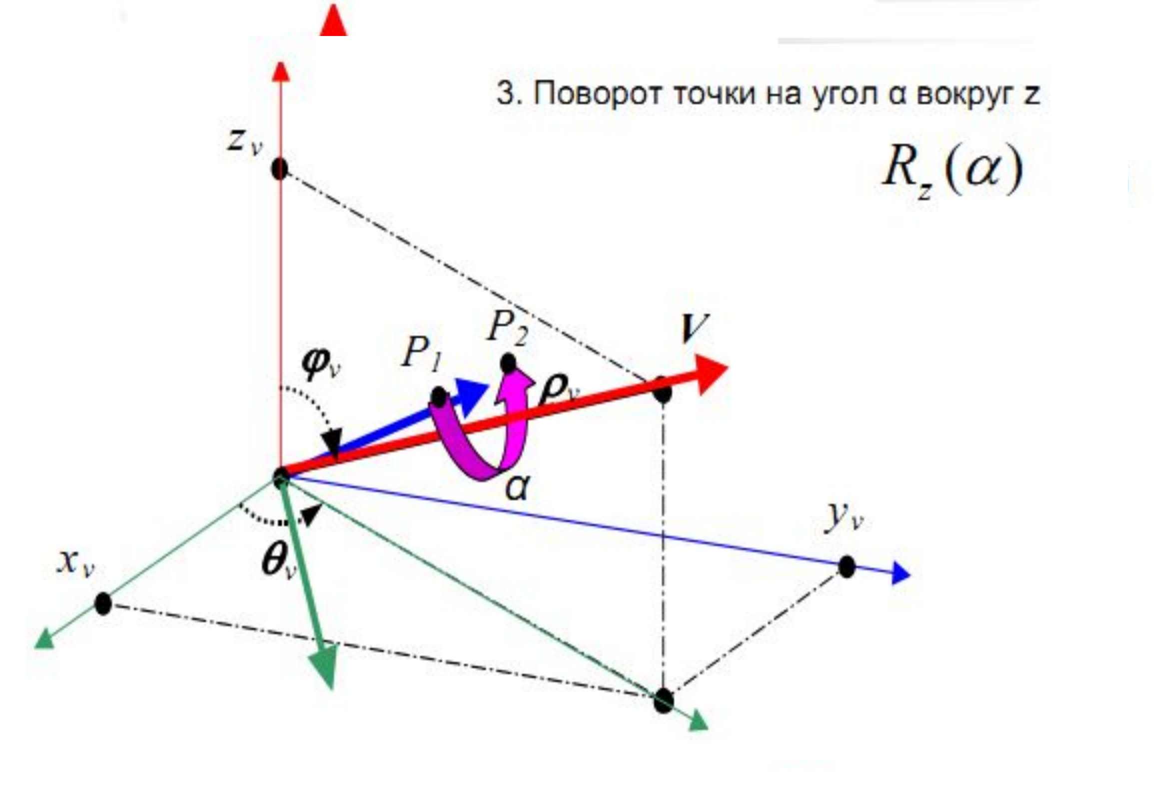
*Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



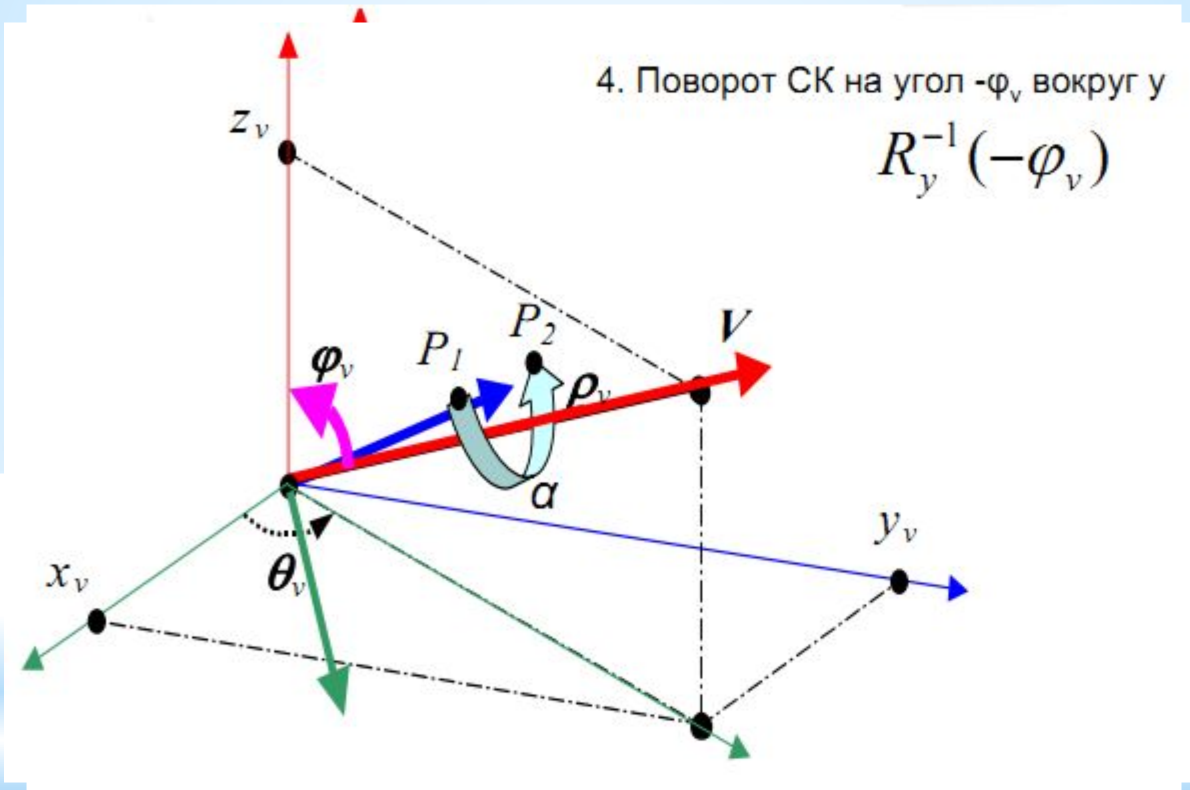
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



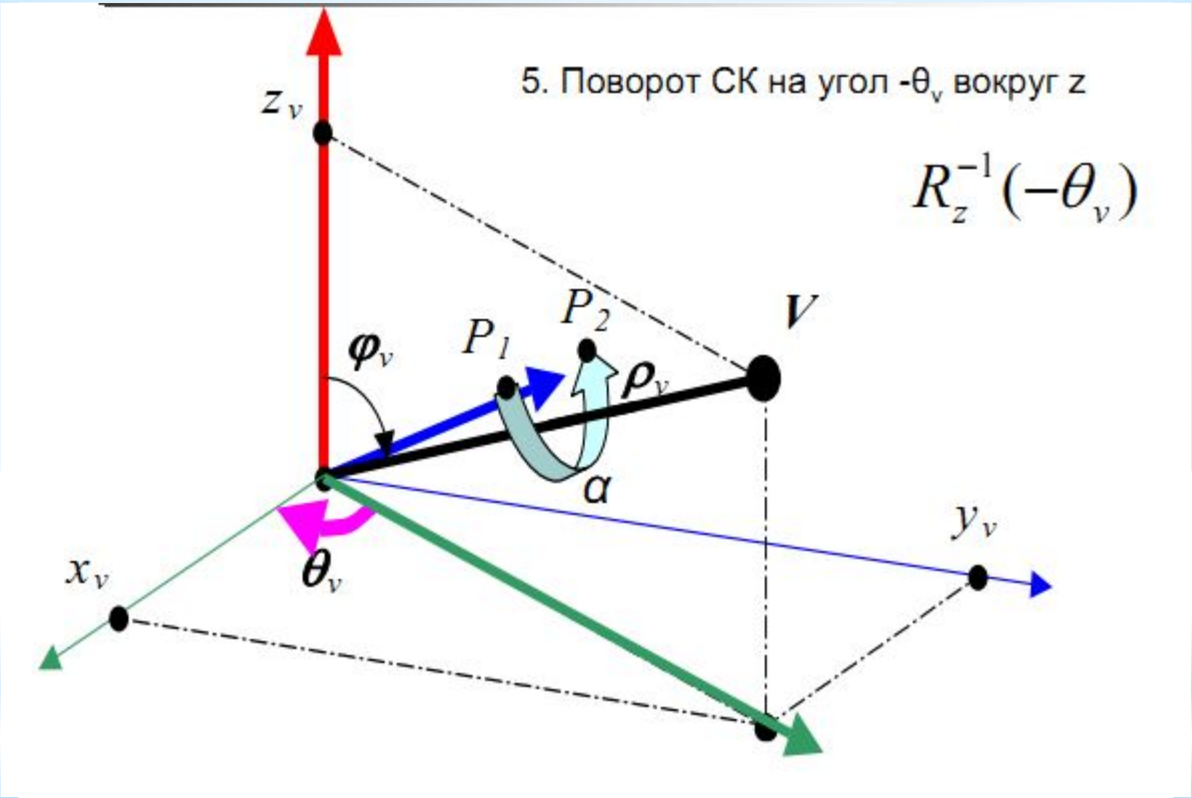
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



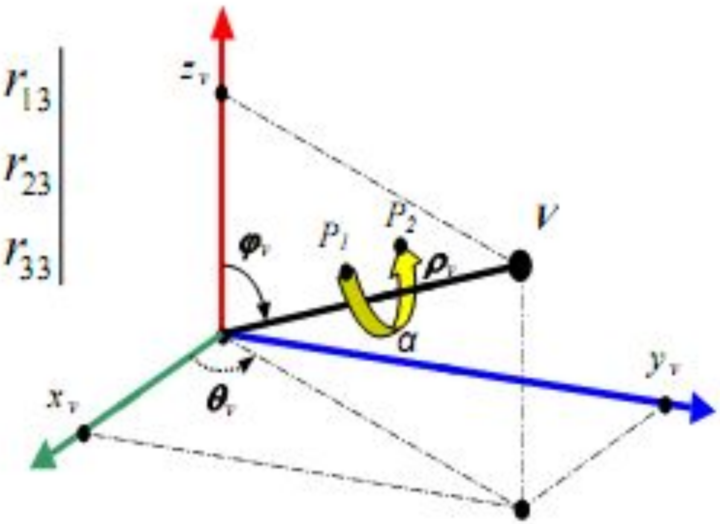
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК

$$P_2 = P_1[R_z^{-1}(\theta_v)R_y^{-1}(\varphi_v)R_z(\alpha)R_y^{-1}(-\varphi_v)R_z^{-1}(-\theta_v)] =$$

$$= P_1 R_0(\alpha)$$

$$R_0(\alpha) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$$



*Композиция 3Д-преобразований

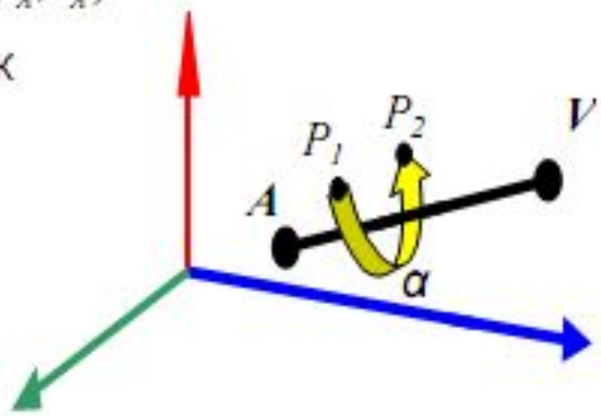
Поворот точки относительно произвольной линии

1. Перенос СК в А $T^{*-1}(x_A, y_A, z_A)$

2. Вычисление φ_v и θ_v в новой СК

3. Поворот

$$R_0^*(\alpha) = \left|\begin{array}{ccc:c} & R_0(\alpha) & & 0 \\ & & & 0 \\ & & & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right|$$



4. Перенос СК назад $T^{*-1}(-x_A, -y_A, -z_A)$