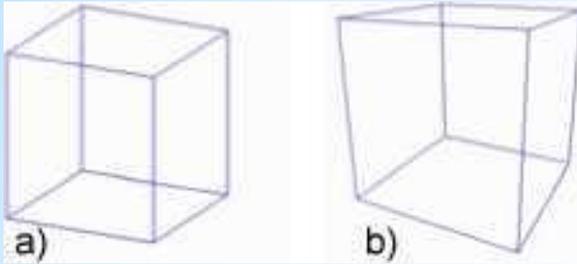


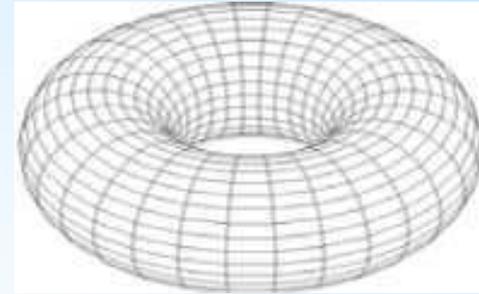
* Лекция 5. Трехмерные преобразования

Лектор: Решевская Екатерина Сергеевна

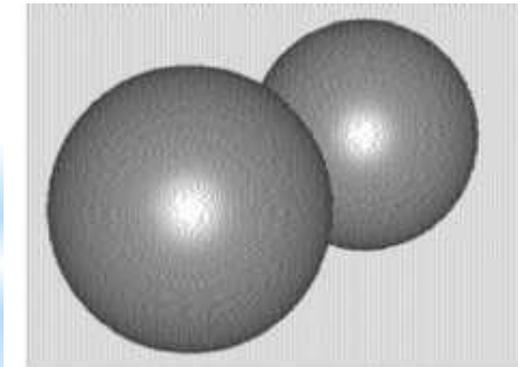
*Типы моделей 3Д-объектов



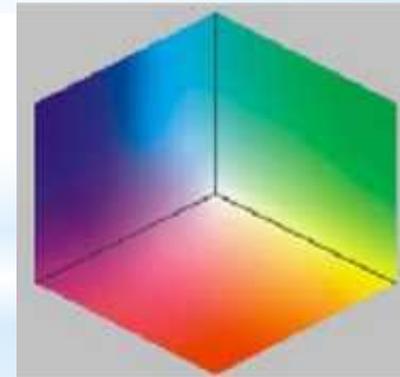
Каркасные (проволочные) модели
Параллельная (а) и центральная (б)
проекции



Формы
с удалением скрытых линий

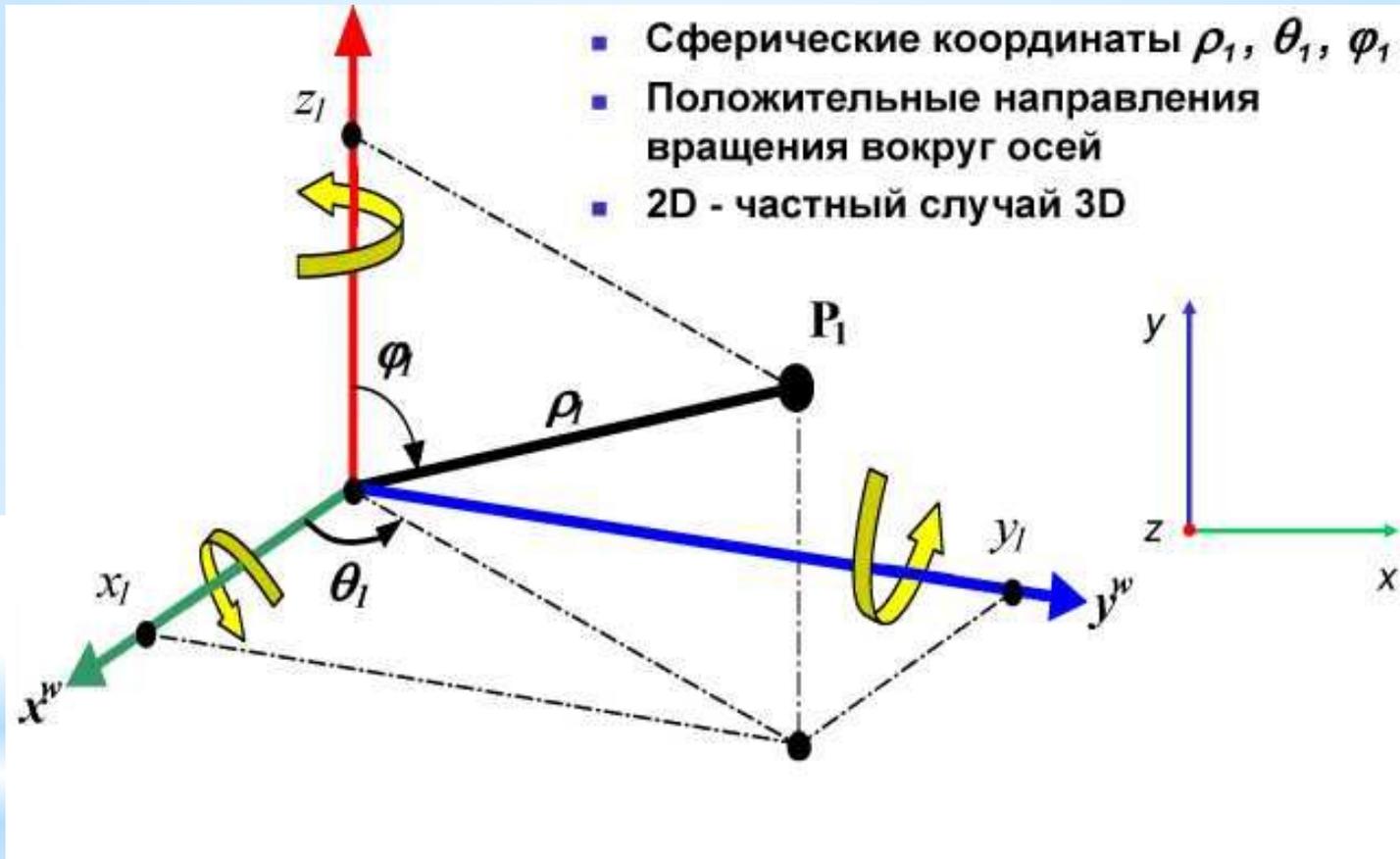


Полутоновые формы



Цветные формы

* 3D-система координат



* Пересчет систем координат

■ Из декартовых в сферические

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ при } \rho = 0, \text{ считаем } \varphi = \theta = 0$$

$$\varphi = \arccos \frac{z}{\rho}$$

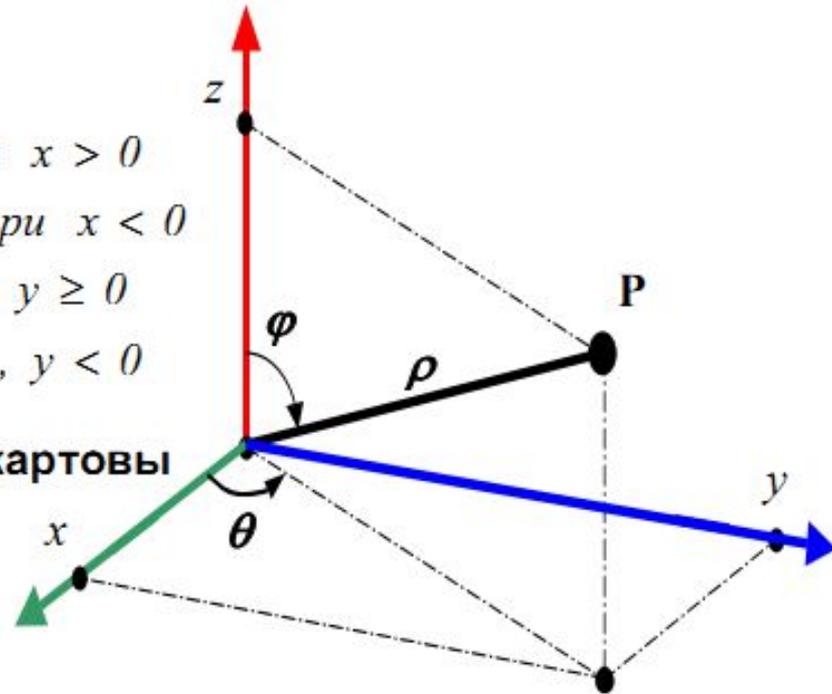
$$\theta = \begin{cases} \operatorname{arctg} (y / x), & \text{при } x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg} (y / x), & \text{при } x < 0 \\ \pi / 2, & \text{при } x = 0, y \geq 0 \\ 3\pi / 2, & \text{при } x = 0, y < 0 \end{cases}$$

■ Из сферических в декартовы

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta$$

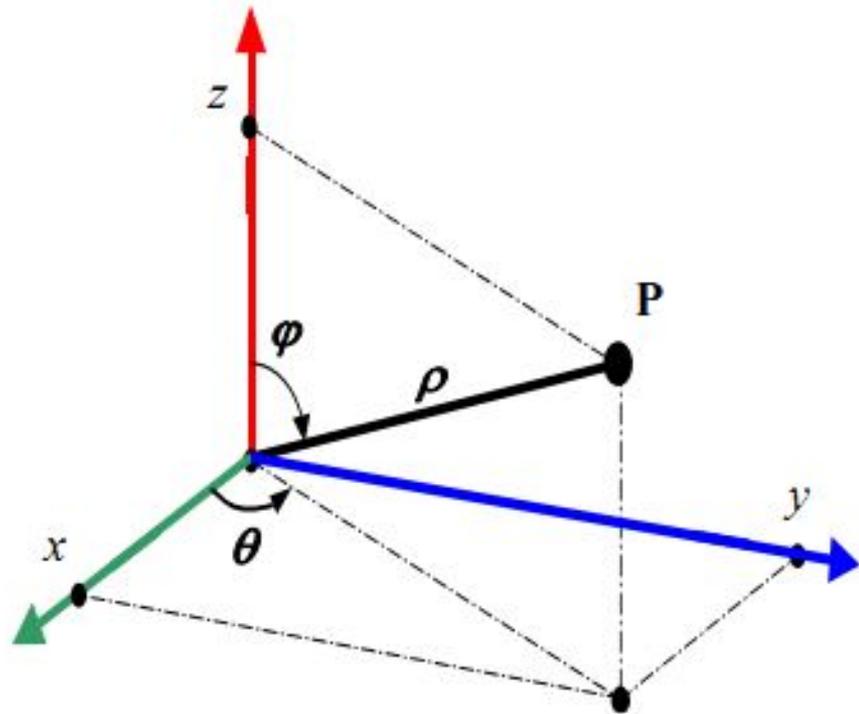
$$y = \rho \sin \varphi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \varphi$$



* Базовые преобразования в 3Д

- Перенос точки
- Масштабирование точки
- Поворот точки
 - вокруг x
 - вокруг y
 - вокруг z
- Изменение знака
 - x координаты
 - y координаты
 - z координаты



* Базовые преобразования в 3Д

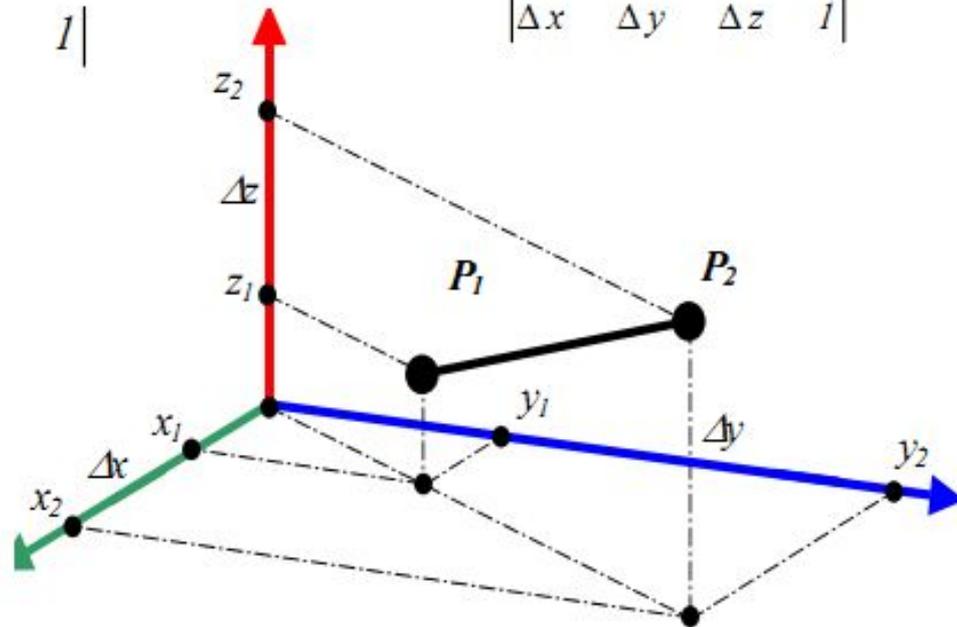
Перенос точки

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot T^*$$

$$T^*(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{vmatrix}$$



* Базовые преобразования в 3Д

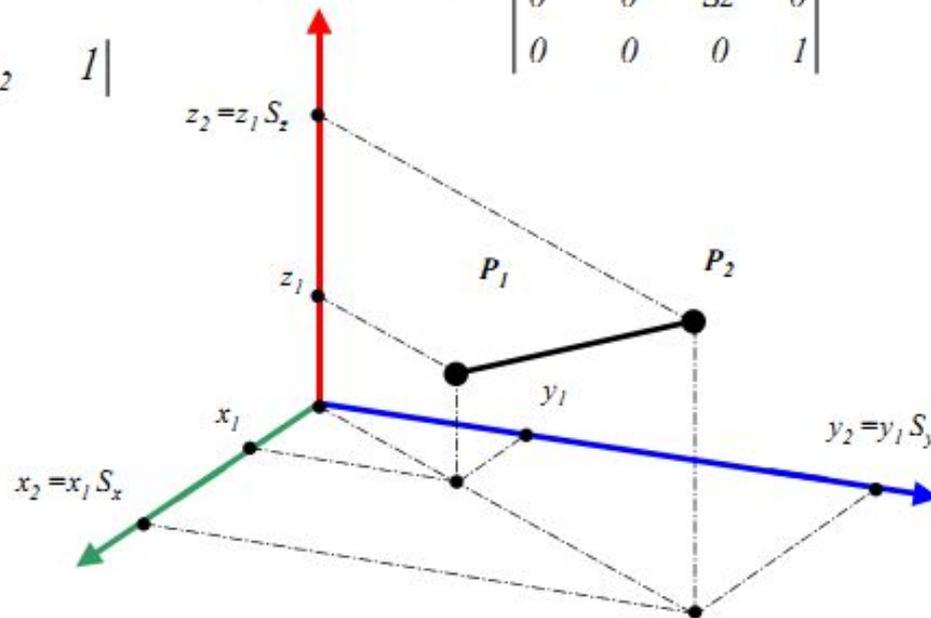
Масштабирование точки

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot S^*$$

$$S^*(S_x, S_y, S_z) = \begin{vmatrix} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



* Базовые преобразования в 3Д

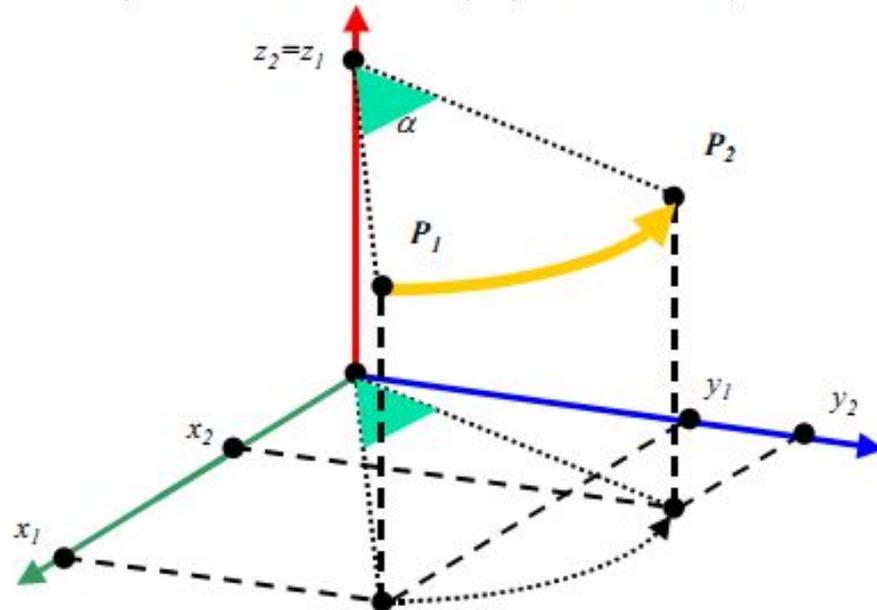
Поворот точки вокруг z

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot R_z^*$$

$$R_z^*(\alpha) = \begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



* Базовые преобразования в 3Д

Поворот точки вокруг x

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} c & s & 0 \\ -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \hline \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \hline \end{vmatrix}$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot R_x^*$$

* Базовые преобразования в 3Д

Поворот точки вокруг у

The diagram illustrates the composition of two rotation matrices, $R_x(\alpha)$ and $R_y(\alpha)$, to perform a rotation around the y-axis. The rotation matrices are shown as 3x3 grids of colored cells:

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$$
$$R_y(\alpha) = \begin{bmatrix} c & 0 & -s \\ 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & c \end{bmatrix}$$

Arrows indicate the composition of these matrices into a single 3x3 grid representing the combined rotation:

$$\begin{bmatrix} 0 & -s & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \end{bmatrix}$$

Below the matrices is a 3D coordinate system with axes labeled x (green), y (blue), and z (red). Yellow curved arrows indicate the direction of rotation around the y -axis.

Transformation matrices are defined as:

$$P_1^* = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$P_2^* = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$P_2^* = P_1^* \cdot R_y^*$$

* Базовые преобразования в 3Д

Изменение знака точки

$$M_x = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

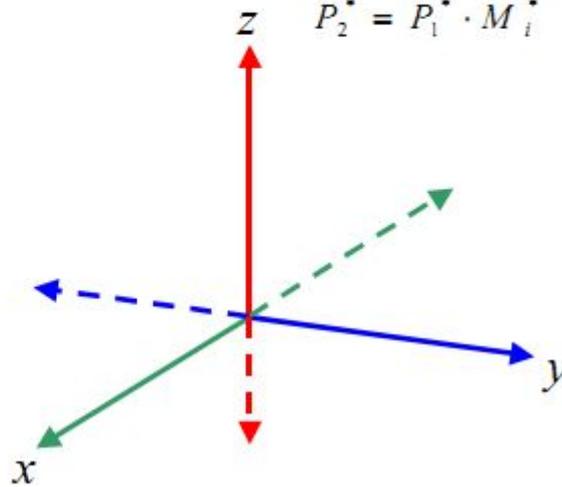
$$M_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$M_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$P_1^* = |x_1 \ y_1 \ z_1 \ 1|$$

$$P_2^* = |x_2 \ y_2 \ z_2 \ 1|$$

$$P_2^* = P_1^* \cdot M_i^*$$



* Базовые преобразования в 3Д

Сводные результаты

$$T^*(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \Delta x & \Delta y & \Delta z & 1 \end{array}$$

$$S^*(S_x, S_y, S_z) = \begin{array}{c|ccc} S_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_z & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$T^{-1}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = T(-\Delta x, -\Delta y, -\Delta z)$$

$$S^{-1}(S_x, S_y, S_z) = S\left(\frac{1}{S_x}, \frac{1}{S_y}, \frac{1}{S_z}\right)$$

$$R_i^{-1}(\alpha) = R_i(-\alpha)$$

$$R_x^*(\alpha) = \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & s & 0 \\ 0 & -s & c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$R_y^*(\alpha) = \begin{array}{c|ccc} c & 0 & -s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ s & 0 & c & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$R_z^*(\alpha) = \begin{array}{c|ccc} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

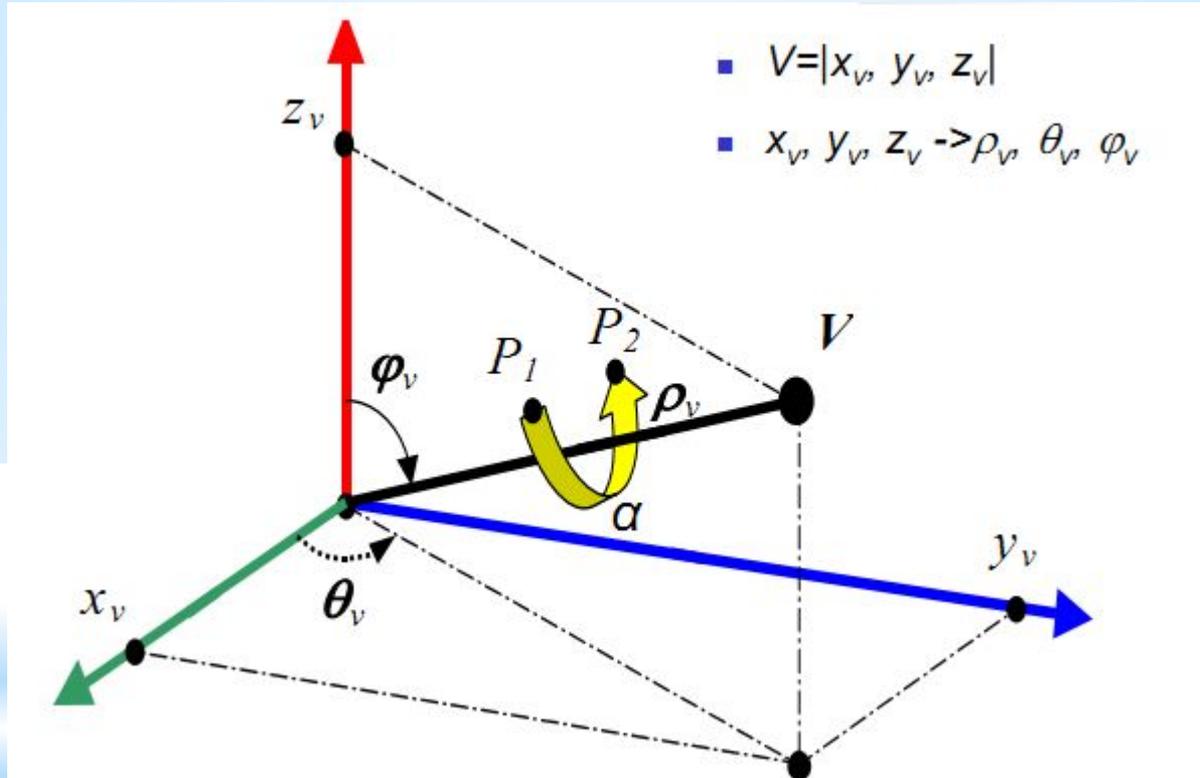
$$M_x^* = \begin{array}{c|ccc} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M_y^* = \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$M_z^* = \begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

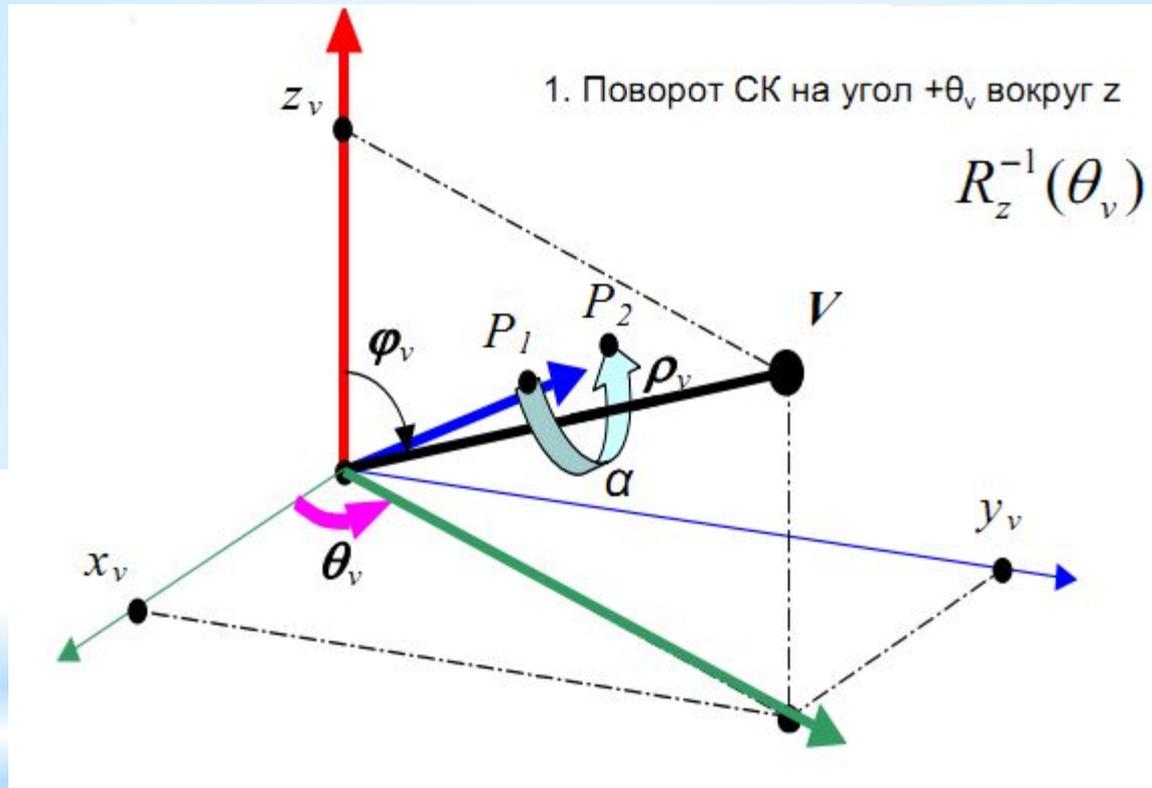
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



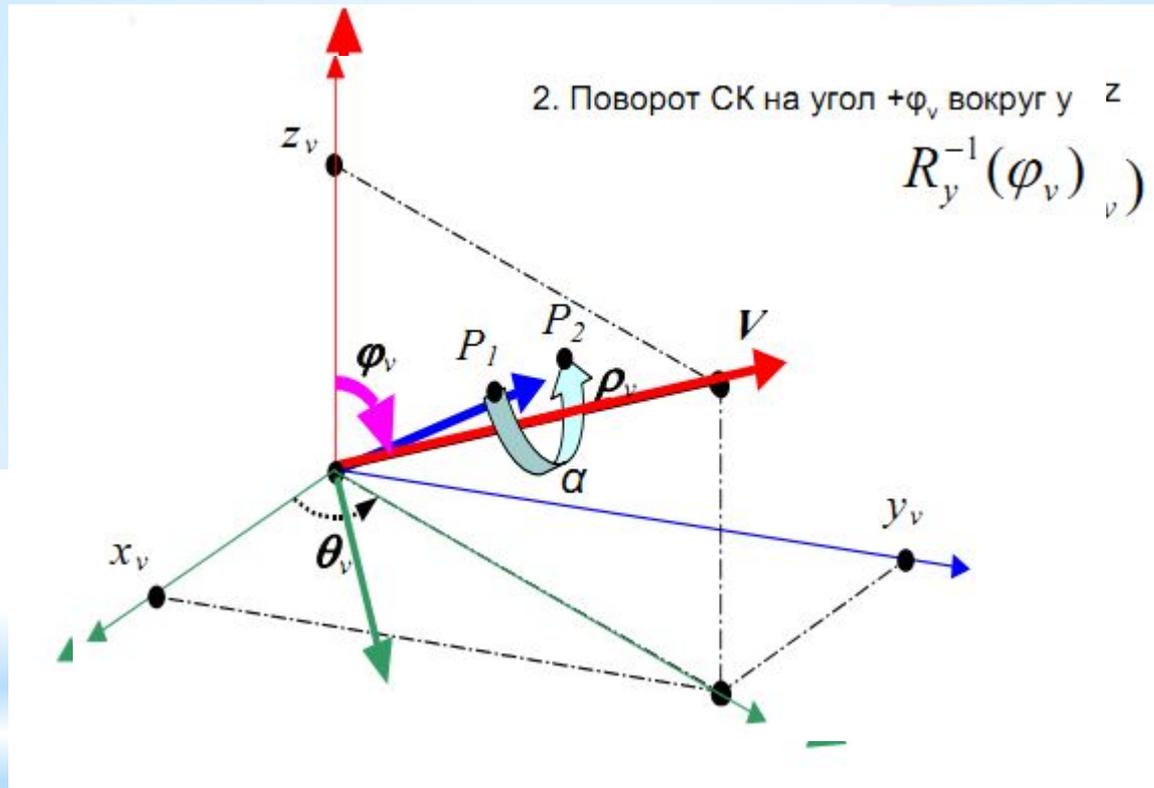
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



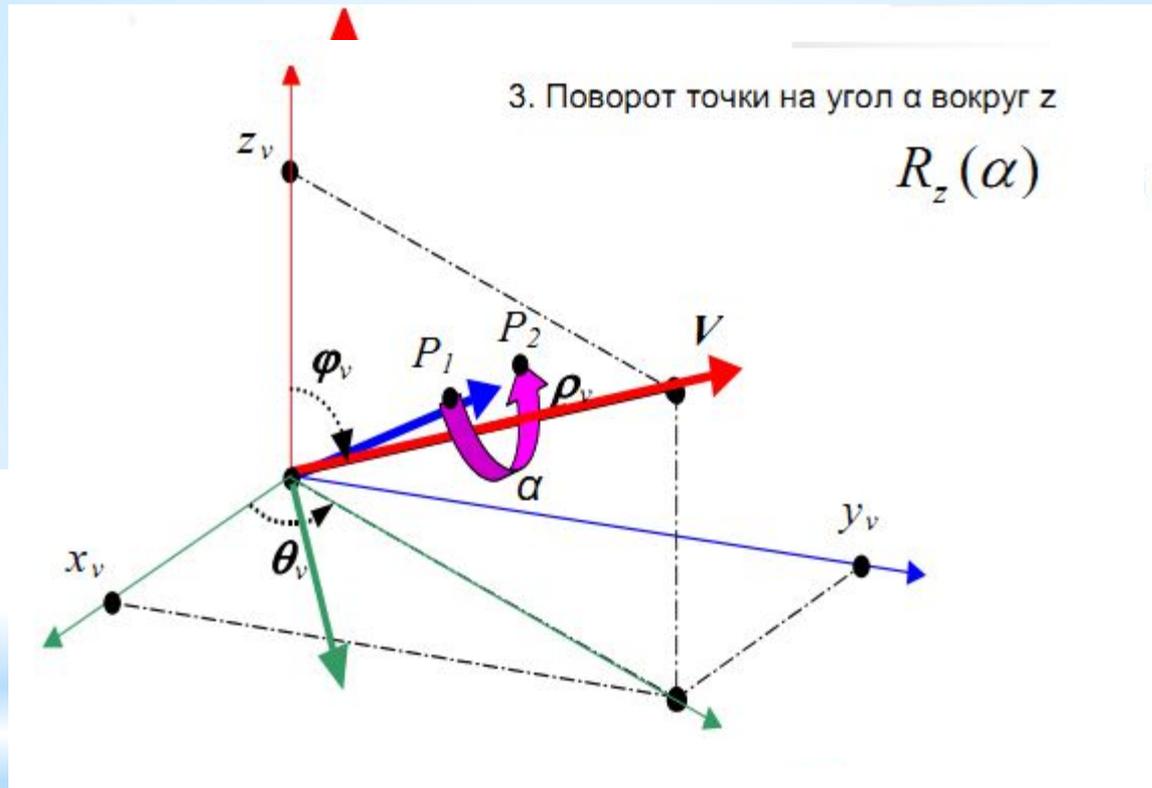
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



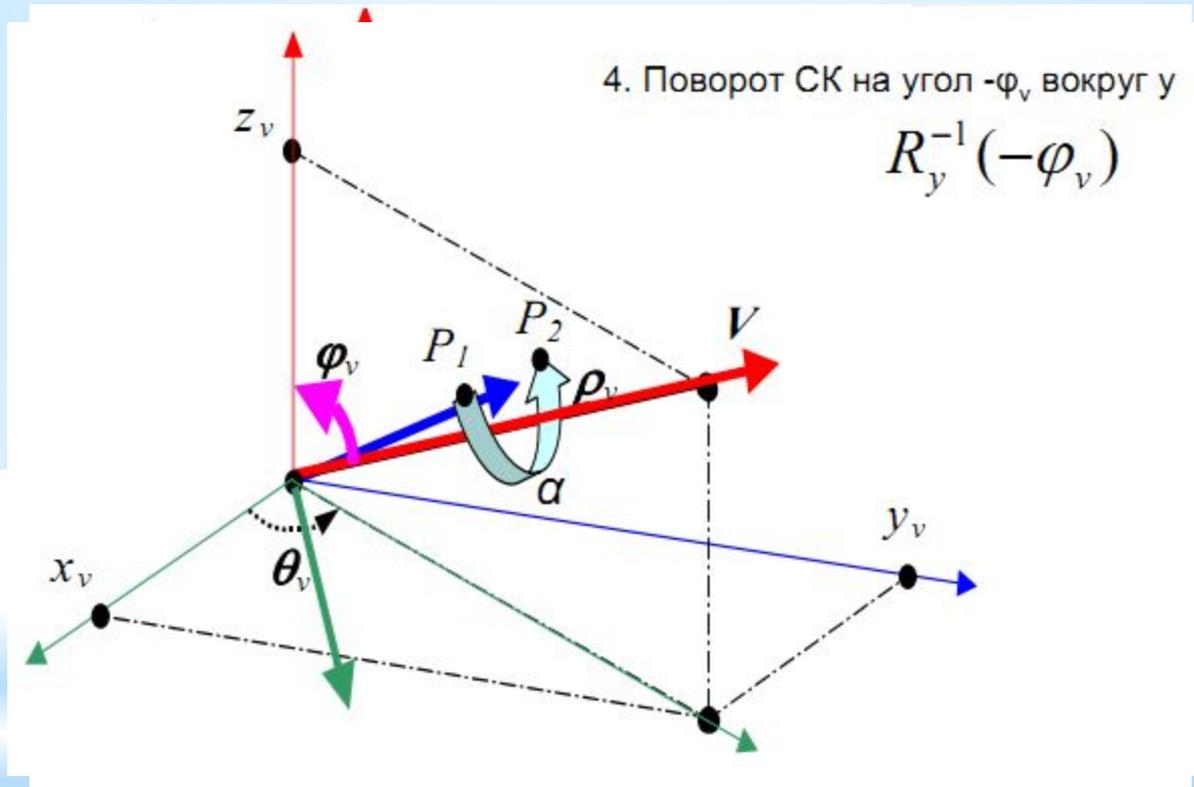
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



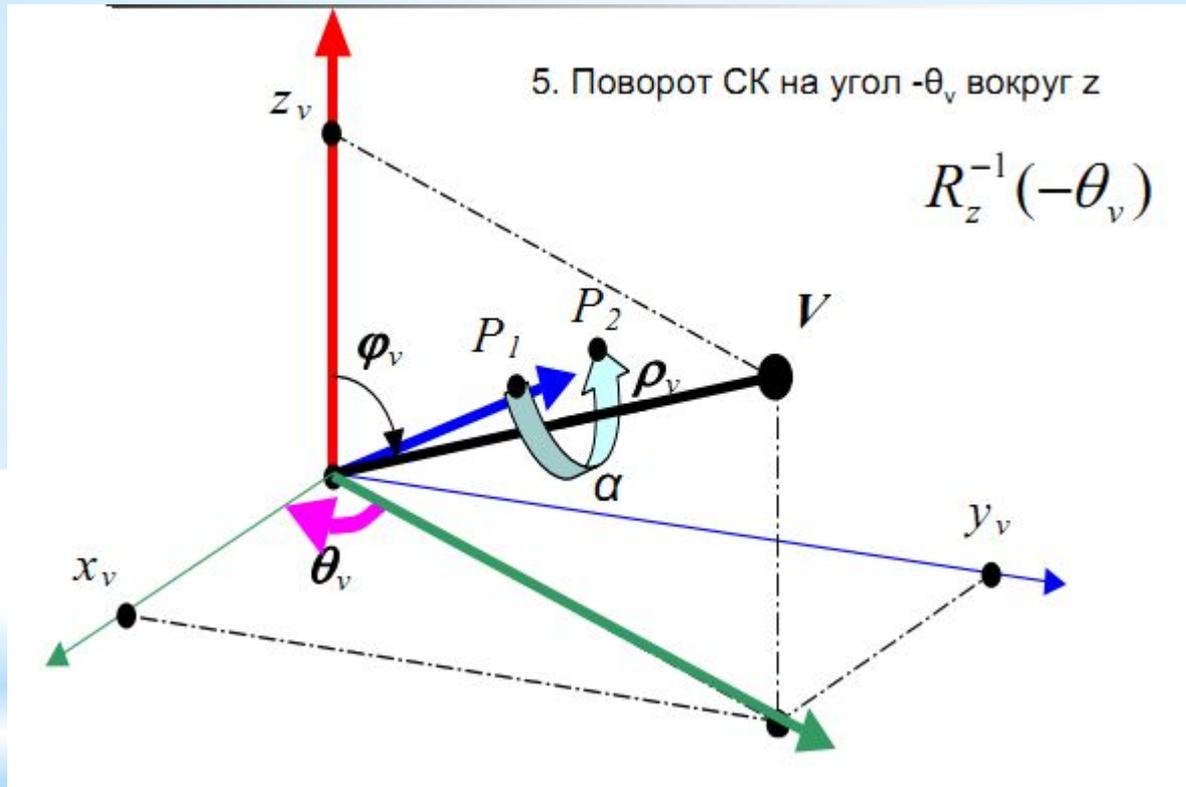
* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК



* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК

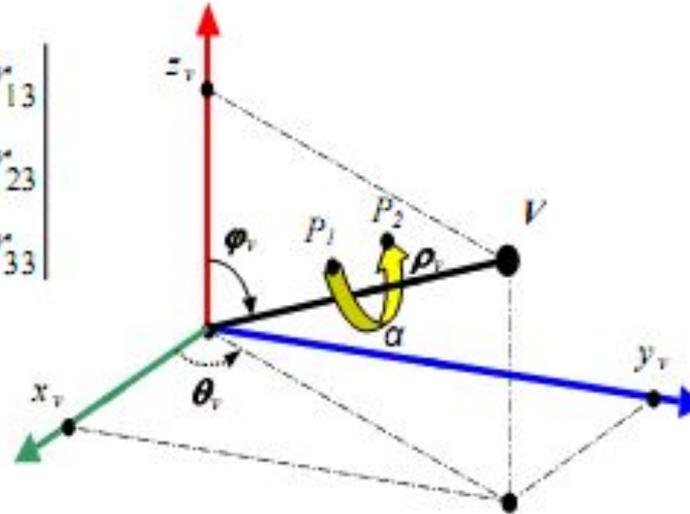


* Композиция 3Д-преобразований

Поворот точки относительно линии, которая проходит через начало СК

$$P_2 = P_1[R_z^{-1}(\theta_v)R_y^{-1}(\varphi_v)R_z(\alpha)R_y^{-1}(-\varphi_v)R_z^{-1}(-\theta_v)] = \\ = P_1R_0(\alpha)$$

$$R_0(\alpha) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{vmatrix}$$



* Композиция 3Д-преобразований

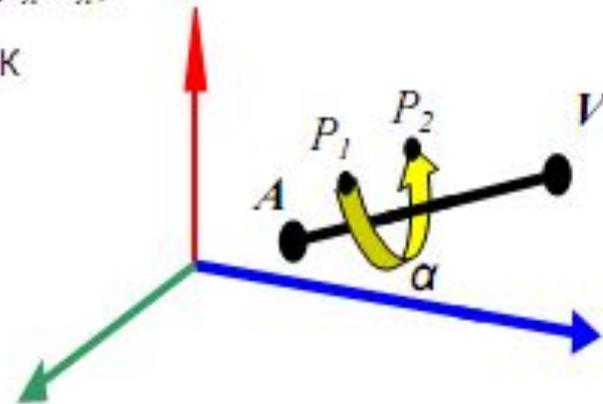
Поворот точки относительно произвольной линии

1. Перенос СК в А $T^{s-1}(x_A, y_A, z_A)$

2. Вычисление φ_v и θ_v в новой СК

3. Поворот

$$R_0^*(\alpha) = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & R_0(\alpha) & & 0 \\ & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$



4. Перенос СК назад $T^{s-1}(-x_A, -y_A, -z_A)$