Липецкий государственный технический университет

Кафедра прикладной математики

Прикладная математика

Лекция 4

Целочисленные задачи линейного программирования

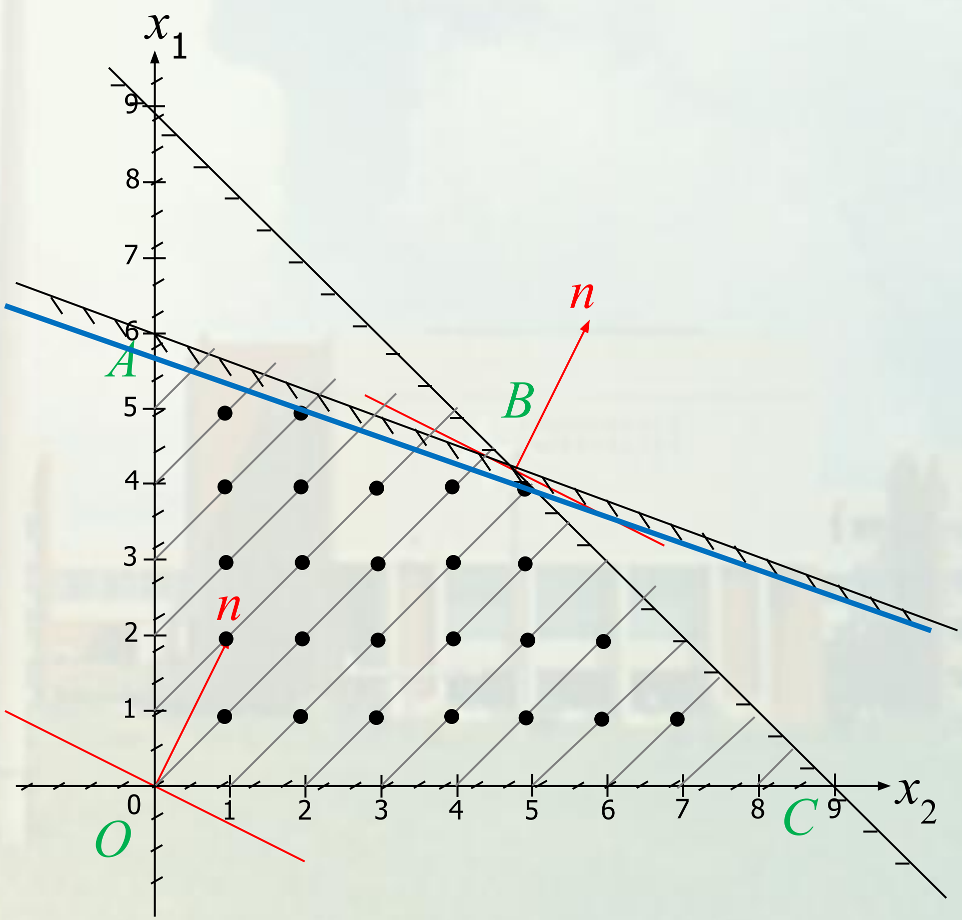
Целочисленные задачи линейного программирования

Задача линейного программирования, в которой требуется, чтобы все переменные были целыми, называется целочисленной. Сначала такие задачи решаются без условия целочисленности. Если полученное решение целочисленное, то оно и является решением целочисленной задачи. Если нецелочисленная задача не имеет решений, то и целочисленная задача тоже.

В других случаях применяются специальные методы решения целочисленных задач такие, как метод отсечения, метод ветвей и границ и другие.

Правильное отсечение

Правильным отсечением называется гиперплоскость, которая отсекает решение нецелочисленной задачи от ОДР, не отсекая при этом ни одной точки с целыми координатами.



Метод отсечений

Метод отсечений был разработан в конце 1950-х годов Гомори для решения целочисленных линейных задач с помощью симплекс-метода.

Целой частью числа x называется число, которое является максимальным из целых чисел не больше x.

Примеры: $\left[4\frac{2}{3}\right]=4,\ \left[-2\frac{3}{5}\right]=-3.$

Дробной частью числа x называется число $\{x\}$, которое находится по формуле $\{x\}=x-[x].$

Примеры: $\left\{4\frac{2}{3}\right\}=\frac{2}{3},\ \left\{-2\frac{2}{3}\right\}=\frac{1}{3}.$

Отсечение Гомори

Если получена симплекс-таблица нецелочисленного решения, то по отсечению Гомори определяется строка вида:

y_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	...	a_{in}

,

где $[b_i]$ максимально по всем строкам и $\{b_i\} > 0.$

После этого в симплекс-таблицу добавляется строка вида:

y_{m+1}	$-\{b_i\}$	$-\{a_{i1}\}$	$-\{a_{i2}\}$	...	$-\{a_{in}\}$

.

Эта строка и определяет уровень правильного отсечения Гомори. После этого ищется оптимальный план. Если некоторые переменные будут дробными, то процедура повторяется.

Задача о раскрое

Имеются бревна длиной 3 метра. Из них требуется сделать не менее 50 заготовок длиной 1,2 метра и не менее 81 заготовки длиной 0,9 метра.

Какое наименьшее число бревен потребуется и какими способами их надо для этого распилить?

Рассмотрим способы распила бревен:

1) 1,2 м и 1,2 м;
2) 1,2 м, 0,9 м и 0,9 м;
3) 0,9 м, 0,9 м и 0,9 м.

Задача о раскрое

Обозначим x_i - количество бревен, распиливаемых i-м способом, $i = 1, 2, 3.$ Тогда задача примет вид

$$L = x_1 + x_2 + x_3 \to \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 50, \\ 2x_2 + 3x_3 \ge 81. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

$$x_1 \in Z, \quad x_2 \in Z, \quad x_3 \in Z.$$

Задача о раскрое

Запишем симплекс-таблицу.

	C	x_1	x_2	x_3
L	0	-1	-1	-1
y_1	-50	-2	-1	0
y_2	-81	0	-2	-3

Находим разрешающий элемент. В данной таблице он находится на пересечении строки y_1 и столбца x_1.

Задача о раскрое

	C	y_1	x_2	x_3
L	25	−1/2	−1/2	−1
x_1	25	−1/2	1/2	0
y_2	−81	0	−2	−3

Задача о раскрое

	C	y_1	y_2	x_3
L	181/4	−1/2	−1/4	−1/4
x_1	19/4	−1/2	1/4	−3/4
x_2	81/2	0	−1/2	3/2

Задача о раскрое

	C	y_1	y_2	x_3
L	181/4	−1/2	−1/4	−1/4
x_1	19/4	−1/2	1/4	−3/4
x_2	81/2	0	−1/2	3/2
y_3	−1/2	0	−1/2	−1/2

Задача о раскрое

	C	y_1	y_3	x_3
L	91/2	−1/2	−1/2	0
x_1	9/2	−1/2	1/2	−1
x_2	41	0	−1	2
y_2	1	0	−2	1

Задача о раскрое

	C	y_1	y_3	x_3
L	91/2	−1/2	−1/2	0
x_1	9/2	−1/2	1/2	−1
x_2	41	0	−1	2
y_2	1	0	−2	1
y_4	−1/2	−1/2	−1/2	0

Задача о раскрое

	C	y_4	y_3	x_3
L	46	−1	0	0
x_1	5	−1	1	−1
x_2	41	0	−1	2
y_2	1	0	−2	1
y_1	1	−2	1	0

Оптимальный план целочисленной задачи найден.

Ответ: $L_{\min} = 46$ при $x_1 = 5,\ x_2 = 41,\ x_3 = 0.$

Задача о раскрое

Найдем другие решения этой задачи. Так как в первой строке L симплекс-таблицы при y_3 и x_3 коэффициенты равные 0, эти переменные в L не входят и могут быть больше 0.

Из последней строки конечной таблицы, учитывая условие $y_1 \geq 0$, получаем $y_3 \leq 1$. Далее рассмотрим 2 возможных случая $y_3 = 0$ и $y_3 = 1$. При $y_3 = 0$ из предпоследней строки таблицы с учётом условия $y_2 \geq 0$, получаем $x_3 \leq 1$. Следовательно, $x_3 = 0$ или $x_3 = 1$. При $y_3 = 1$ из этого же условия получаем $x_3 \leq 3$.

Таким образом, получаем еще пять решений.

Задача о раскрое

Следовательно, задача имеет 6 решений.

1) при $y_3 = 0,\ x_3 = 0$ решение $x_1 = 5,\ x_2 = 41,\ x_3 = 0;$

2) при $y_3 = 0,\ x_3 = 1$ решение $x_1 = 6,\ x_2 = 39,\ x_3 = 1;$

3) при $y_3 = 1,\ x_3 = 0$ решение $x_1 = 4,\ x_2 = 42,\ x_3 = 0;$

4) при $y_3 = 1,\ x_3 = 1$ решение $x_1 = 5,\ x_2 = 40,\ x_3 = 1;$

5) при $y_3 = 1,\ x_3 = 2$ решение $x_1 = 6,\ x_2 = 38,\ x_3 = 2;$

6) при $y_3 = 1,\ x_3 = 3$ решение $x_1 = 7,\ x_2 = 36,\ x_3 = 3.$

Задача о раскрое

Можно принять во внимание дополнительные соображения по поводу лучшего решения:

1) Минимальные отходы.

Так как второй способ распила - безотходный, лучшее решение - то, при котором максимальное число бревен распиливается этим способом.

Таким образом, лучшее решение – третье.

2) Наименьшее число распилов.

При первом способе - 2 распила , при втором - 2 распила, при третьем - 3 распила.

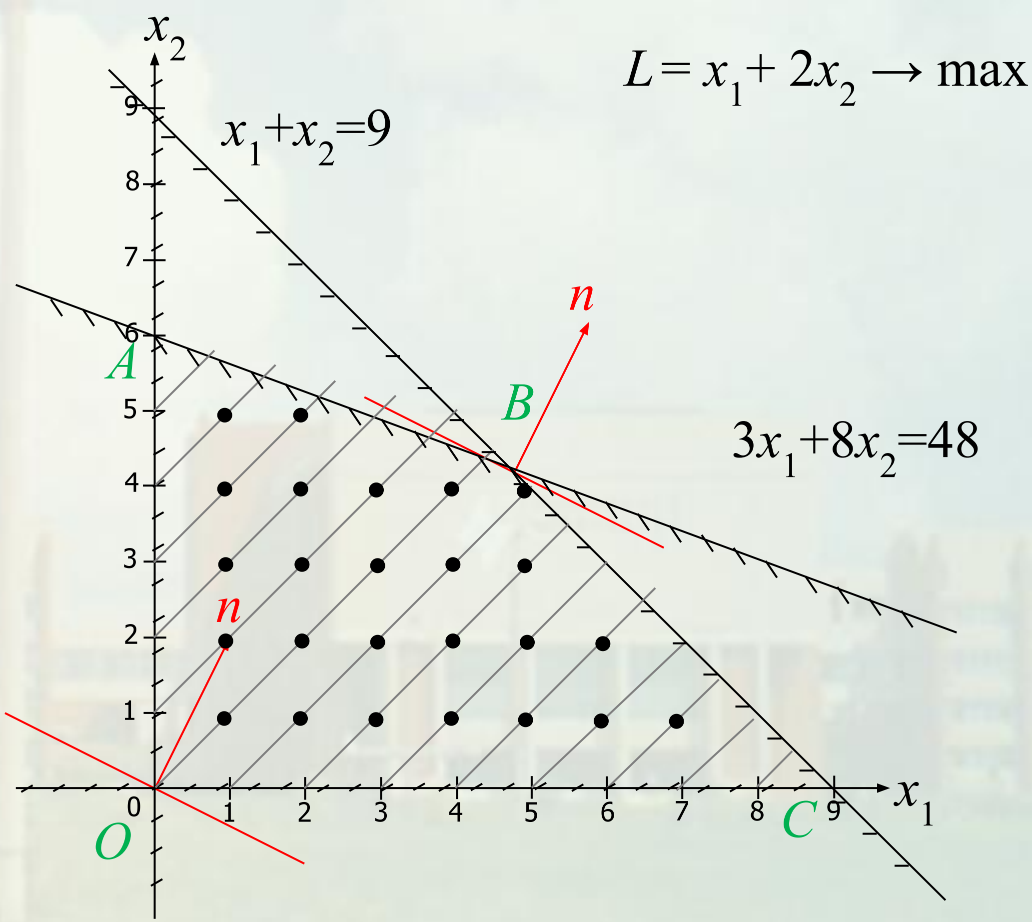
Лучшее решение первое и третье, так как они не используют третьего способа распила.

Метод ветвей и границ

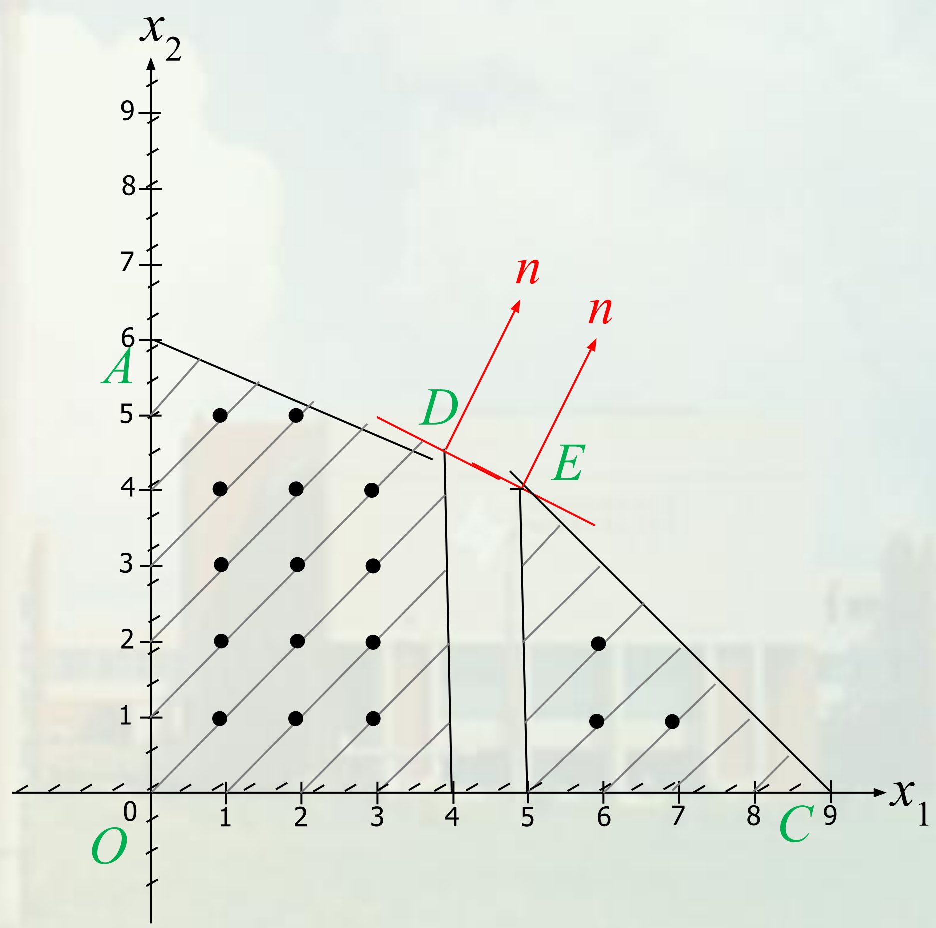
Суть данного метода в том, что если x_i в оптимальном решении дробное, то из ОДР исключается множество $\{x\} < x_i < \{x_i\} + 1.$ После этого решаются в общем случае две задачи в полученных областях.

Если вновь решения будут нецелочисленные, то процедура повторяется до тех пор, пока в каждой из полученных областей решение не будет целочисленным. Рассмотрим этот метод на примере.

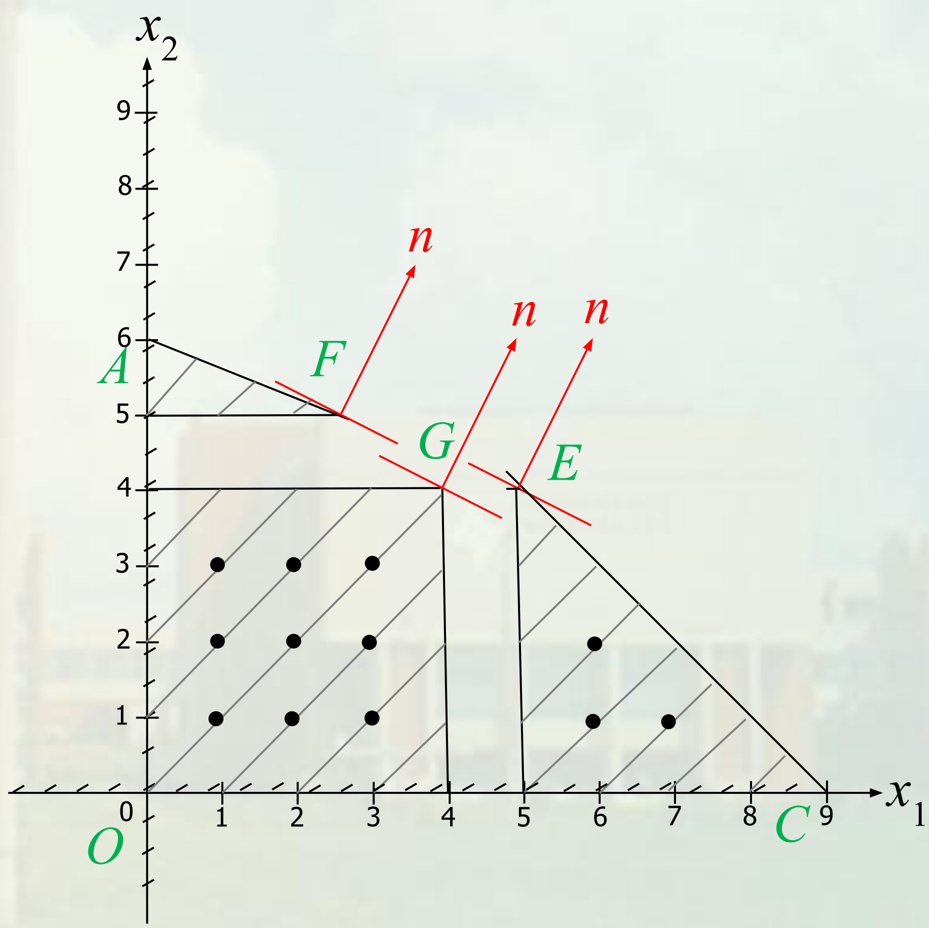
Метод ветвей и границ



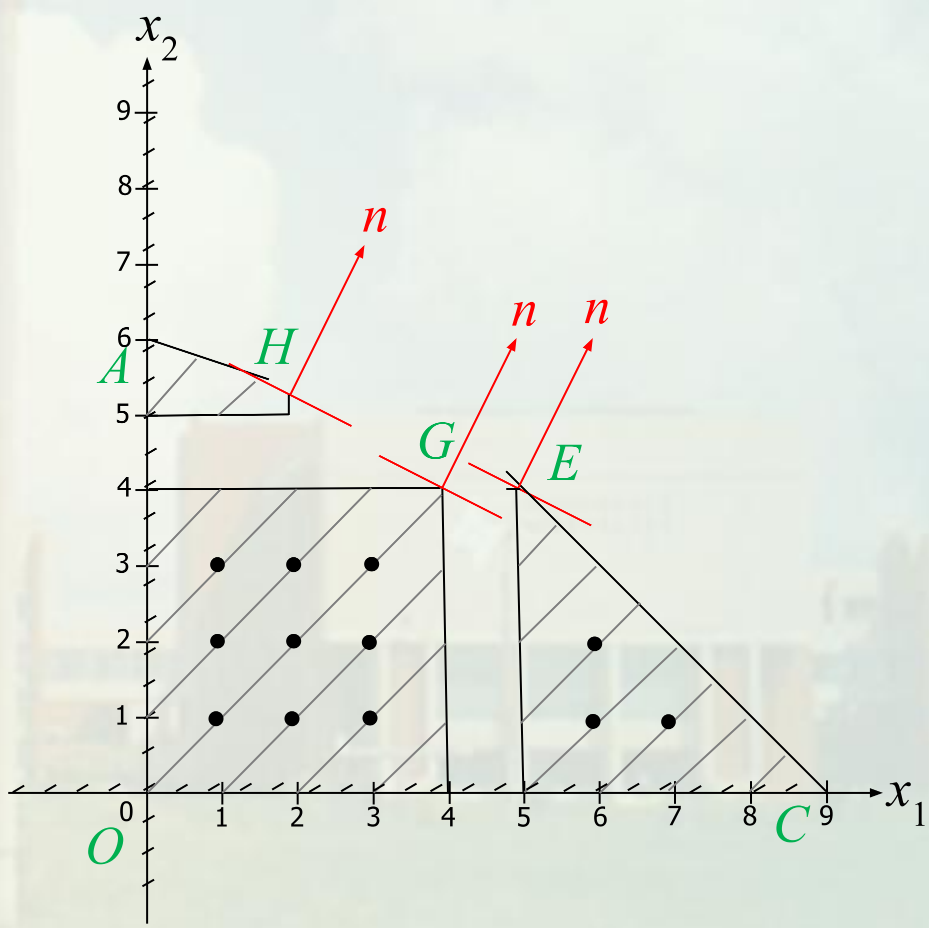
Метод ветвей и границ



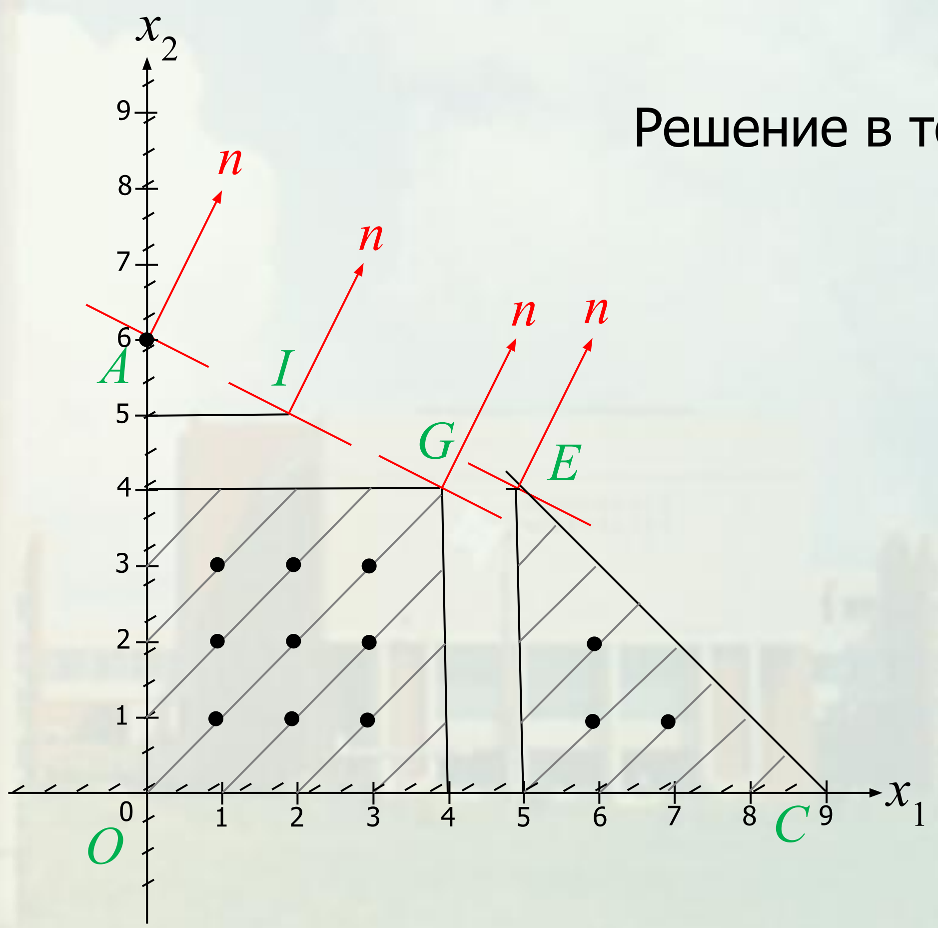
Метод ветвей и границ



Метод ветвей и границ



Метод ветвей и границ



Решение в точке $E\ (5;4)$.

Ответ: $L_{\max} = L(5;4) = 13.$

Задания для самоконтроля

1. Целочисленной задачей линейного программирования называется задача линейного программирования, в которой дополнительно требуются, чтобы...

1) все коэффициенты целевой функции были целыми;
2) все коэффициенты ограничений были целыми;
3) все переменные были целыми;
4) все коэффициенты целевой функции, ограничений и переменные были целыми.

Задания для самоконтроля

2. Целой частью числа x называется…

1) максимальное целое число, которое не меньше x;
2) максимальное целое число, которое не больше x;
3) минимальное целое число, которое не больше x;
4) минимальное целое число, которое не меньше x.

Задания для самоконтроля

3. В методе отсечений Гомори в симплекс-таблицу оптимального нецелочисленного решения добавляется строка, для которой...

1) коэффициент в первом столбце максимальный;
2) коэффициент в первом столбце имеет максимальную целую часть;
3) коэффициент в первом столбце минимальный;
4) коэффициент в первом столбце имеет максимальную дробную часть.


Спасибо за внимание