

Информатика

Программирование:

Лекция 5

Работа в рамках материала 1 семестра

Доцент каф. ВММБ, к.т.н. Каменских Анна Александровна

Адрес кафедры ВММБ:108 к. Г (ул. Пр. Поздеева),

Тел. кафедры ВММБ: +7(342) 239-15-64

Электронная почта преподавателя: anna_kamenskih@mail.ru

Задания на лабораторную работу № 5

1. Создать программы на языке Java для нахождения корней уравнений с использованием численных методов: половинного деления, простой итерации, Ньютона. Оценку качества решения организовать с использованием массивов.
2. Создать программу на языке Java, которая находит решение СЛАУ с использованием метода Гаусса.
3. Создать программу на языке Java, которая при помощи математических свойств матриц и итерационной процедуры позволяет найти обратную матрицу.
4. Создать программу на языке Java, которая повторяет алгоритм метода наименьших квадратов (варианты заданий взять в УИР), с обращением для решения СЛАУ к классу метода Гаусса. Проверка решения СЛАУ завязана на метод обратной матрицы.
5. Оформить отчет в MS Word с тестированием работы программ.

Метод половинного деления

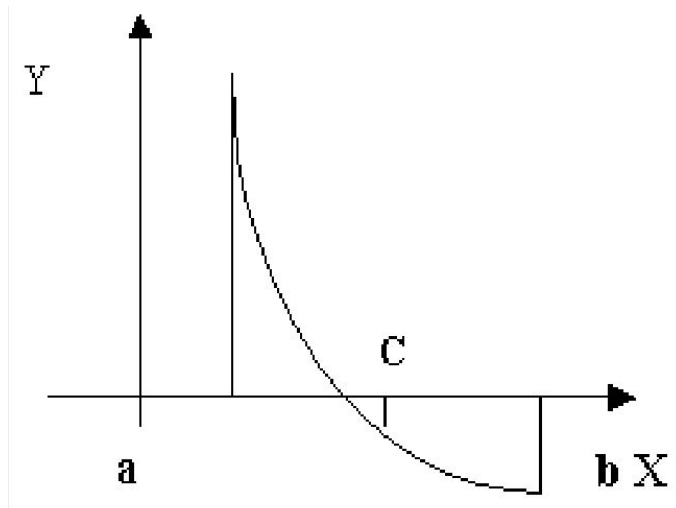


Рис. 1 Функция меняет знак на $[a, c]$

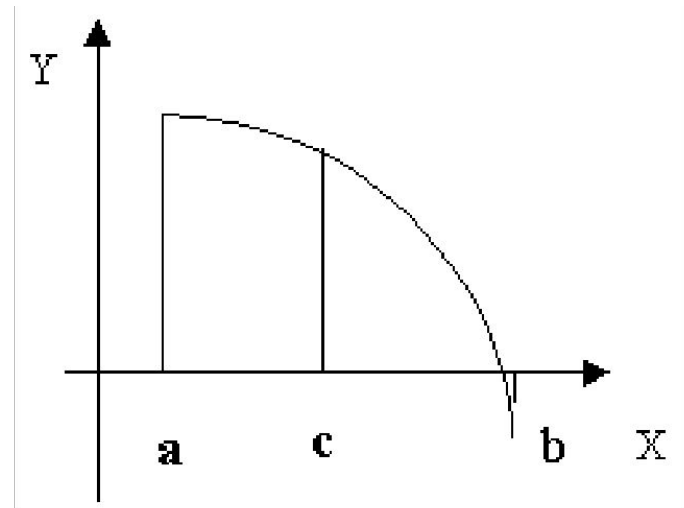


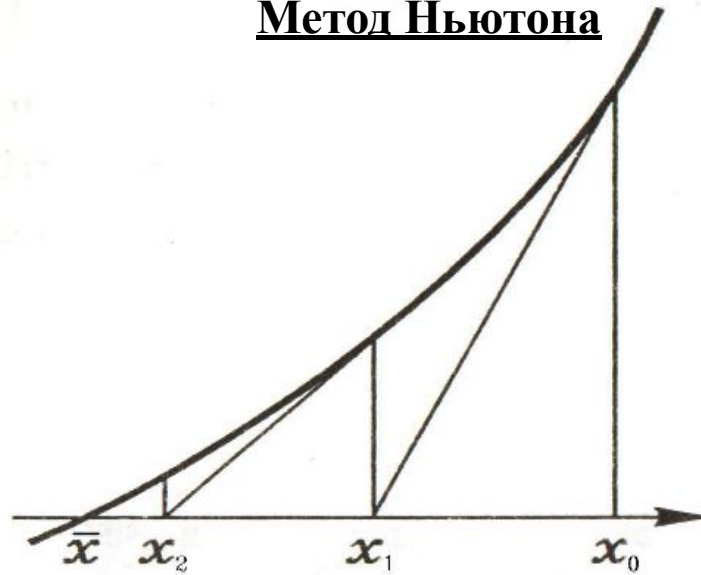
Рис. 2 Функция меняет знак на $[c, b]$

Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $c = \frac{a+b}{2}$. Если $f(c) \neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: либо $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a, c]$ (Рис. 1), либо на отрезке $[c, b]$ (Рис. 2)

$$|b - a| < \varepsilon$$

Остановка итерационной процедуры

Метод Ньютона



Для решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ по методу Ньютона используется

итерационный процесс: $x(k+1) = x(k) - \frac{f(x(k))}{f'(x(k))}$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, $x(0)$ – некоторое

начальное приближение к корню. При этом предполагается, что $f'(x) \neq 0$ на отрезке $[a, b]$.

При вычислении корня уравнения с точностью ε по методу Ньютона условием окончания итераций может служить:

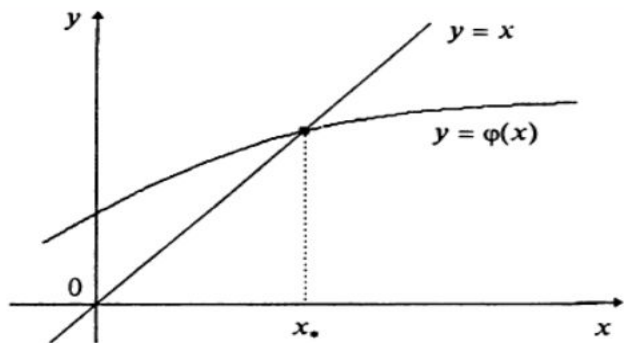
$$|x(k+1) - x(k)| \leq \varepsilon.$$

Метод простой итерации

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$ с корнем $x \in [a, b]$. Для решения уравнения методом простых итераций приведем его к равносильному виду: $x = \varphi(x)$. Это всегда можно сделать, причем многими способами. Например: $x = g(x)f(x) + x \equiv \varphi(x)$, где $g(x)$ – произвольная непрерывная функция, не имеющая корней на отрезке $[a, b]$.

Пусть $x(0)$ – полученное каким-либо способом приближение к корню x (в простейшем случае $x(0) = \frac{a+b}{2}$). Метод простой итерации заключается в последовательном вычислении членов итерационной последовательности: $x(k+1) = \varphi(x(k))$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, начиная с приближения $x(0)$.

Критерий окончания итерационного процесса. При заданной точности $\varepsilon > 0$ вычисления следует вести до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство $|x(k+1) - x(k)| < \frac{1-q}{q} \varepsilon$, где $0 \leq q < 1$ – постоянная и удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)| \leq q$. Если величина $0 < q \leq 0,5$, то можно использовать более простой критерий окончания итераций: $|x(k+1) - x(k)| < \varepsilon$.



При этом задача сводится к нахождению абсциссы точки

- пересечения прямой $y = x$
- и кривой $y = \varphi(x)$

Задание: получить методами половинного деления, простой итерации и Ньютона корень уравнения с точностью **0,01;0,001;0,00001;0,0000001**. Сделать сравнение полученного численного решения с аналитическим и между собой.

1. $x - \sin x - 0.25$;
2. $x^3 - e^x - 1$;
3. $\sqrt{x} - \cos x - 0$;
4. $x^2 + 1 - \arccos x$;
5. $\lg x - \frac{7}{2x + 6} - 0$;
6. $\operatorname{tg}(0.5x + 0.2) - x^2$;
7. $3x - \cos x - 1 - 0$;
8. $x + \lg x - 0.5$;
9. $x^2 - \arcsin(x - 0.2)$;
10. $x^2 + 4 \sin x - 2$;
11. $\operatorname{ctg} x - x^2 - 0$;
12. $\operatorname{tg} x - \cos x - 0.1$;
13. $x \ln(x + 1) - 0.3 - 0$;
14. $x^2 - \sin 10x - 0$;
15. $\operatorname{ctg} x - x$;
16. $\operatorname{tg} 3x + 0.4 - x^2$;
17. $x^2 + 1 - \operatorname{tg} x$;
18. $x^2 - 1 - \ln x$;
19. $0.5^x + 1 - (x - 2)^2$;
20. $(x + 3) \cos x - 1$;
21. $x^2 \cos 2x - -1$;
22. $\cos(x + 0.3) - x^2$;
23. $2^x(x - 1)^2 - 2$;
24. $x \ln(x + 1) - 0.5$.

Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит в исключении слагаемых системы путем ее равносильного преобразования. При этом в численном анализе с целью хорошей алгоритмизации задачи преобразованию подвергаются не сами уравнения, а исходные данные – матрица A и вектор b , соединенные в одну (расширенную) матрицу. В этом случае метод разбивается на две совокупности операций, которые условно названы *прямым ходом* и *обратным ходом*.

Методика решения задачи

1. *Прямой ход* состоит в исключении элементов, расположенных ниже элементов, соответствующих главной диагонали матрицы A . Схематически прямой ход представляется в виде

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} & \vdots & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2n} & \vdots & d_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \vdots & d_n \end{pmatrix} = \hat{A}_1, \quad (1.3)$$

где \hat{A}_1 – матрица, которая содержит *опорные строки* (о.с.), получающиеся при выполнении прямого хода, а затем используется в обратном ходе.

Особенности прямого хода:

а) матрица A преобразуется к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали;

б) получение матрицы \hat{A}_1 в прямом ходе включает следующие действия:

– деление на *ведущие элементы* – на a_{11} в первой строке, на \tilde{a}_{22} – во второй, на $\tilde{\tilde{a}}_{33}$ – в третьей и т.д. (при этом полагается, что они отличны от нуля, и в этом случае рассматриваемый метод Гаусса называется методом *единственного деления* в смысле отсутствия перебора ведущих элементов);

– исключение элементов a_{ij} столбцов, лежащих ниже опорных строк матрицы \hat{A}_1 . Для исключения элементов первого столбца используется первая о.с., для элементов второго столбца – вторая о.с. и т.д. Все остальные действия поясним на примере.

2. *Обратный ход* – от \hat{A}_1 переходим к системе, включающей x_1, \dots, x_n , и, начиная с последнего уравнения, последовательно определяем x_n, x_{n-1}, \dots, x_1 :

$$x_n = d_n;$$

$$x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1,n} \cdot x_n,$$

.....

$$x_1 = d_1 - c_{12}x_2 - \dots - c_{1n}x_n.$$

Здесь и далее знак “*” у компонент решения системы опущен.

Пример 1.4. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2, \\2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2, \\8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 11, \\x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7\end{aligned}$$

методом Гаусса единственного деления.

□ 1. Прямой ход.

$$\begin{aligned}& \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 6 & -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -7 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & 34 & 27 \\ 0 & 7 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{22}{3}} & 13 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{40}{3} & -\frac{57}{3} & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=3} \\ & \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{2814}{66}} & -\frac{2814}{66} \end{pmatrix} \xrightarrow{k=4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

2. Обратный ход.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{39}{22} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned}x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2, \\x_2 - \frac{7}{3}x_3 + 3x_4 &= 2, \\x_3 + \frac{39}{22}x_4 &= \frac{39}{22}, \\x_4 &= 1.\end{aligned}$$

Отсюда $x_4 = 1, \quad x_3 = \frac{39}{22} - \frac{39}{22}x_4 = 0,$

$x_2 = 2 + \frac{7}{3}x_3 - 3x_4 = -1, \quad x_1 = -2 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1.$

В результате получено решение: $x_* = (1; -1; 0; 1)^T$. ■

Получение обратной матрицы

Обратной матрицей к матрице A называется матрица A^{-1} , для которой выполнено соотношение:

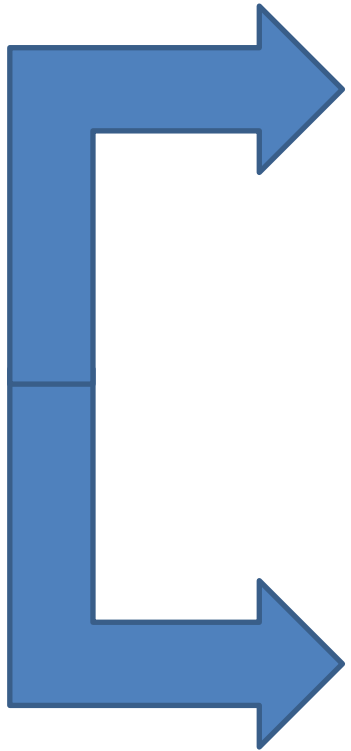
$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Из правила умножения матриц, получим систему из n^2 уравнений с n^2 переменными a_{ij} , $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Чтобы получить первый столбец матрицы E , нужно почленно умножить каждую строку матрицы A на первый столбец матрицы A^{-1} и приравнять полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы E . В результате получим систему уравнений



$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{31} \\ \dots \\ \tilde{a}_{n1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{12} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{13} \cdot \tilde{a}_{31} + \dots + a_{1n} \cdot \tilde{a}_{n1} = 1 \\ a_{21} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{22} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{23} \cdot \tilde{a}_{31} + \dots + a_{2n} \cdot \tilde{a}_{n1} = 0 \\ a_{31} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{32} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{33} \cdot \tilde{a}_{31} + \dots + a_{3n} \cdot \tilde{a}_{n1} = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{n2} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{n3} \cdot \tilde{a}_{31} + \dots + a_{nn} \cdot \tilde{a}_{n1} = 0 \end{cases}$$

Решив полученную **систему**, например методом Гаусса, мы **получим** **первый столбец** **обратной матрицы** A^{-1} .

Чтобы получить второй столбец матрицы E , нужно почленно умножить каждую строку матрицы A на второй столбец матрицы A^{-1} и приравнять полученное произведение соответствующему элементу второго столбца матрицы E . В результате получим систему уравнений, аналогично как и для первого столбца.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{22} \\ \tilde{a}_{32} \\ \dots \\ \tilde{a}_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \iff \begin{cases} a_{11} \tilde{a}_{12} + a_{12} \tilde{a}_{22} + a_{13} \tilde{a}_{32} + \dots + a_{1n} \tilde{a}_{n2} = 0 \\ a_{21} \tilde{a}_{12} + a_{22} \tilde{a}_{22} + a_{23} \tilde{a}_{32} + \dots + a_{2n} \tilde{a}_{n2} = 1 \\ a_{31} \tilde{a}_{12} + a_{32} \tilde{a}_{22} + a_{33} \tilde{a}_{32} + \dots + a_{3n} \tilde{a}_{n2} = 0 \\ \dots \\ a_{n1} \tilde{a}_{12} + a_{n2} \tilde{a}_{22} + a_{n3} \tilde{a}_{32} + \dots + a_{nn} \tilde{a}_{n2} = 0 \end{cases}$$

Решив полученную систему, например методом Гаусса, мы получим **второй столбец обратной матрицы A^{-1}** .

Всего, таким образом, получим n систем по n уравнений в каждой системе, причем все эти системы имеют одну и ту же матрицу A и отличаются только свободными членами. Приведение матрицы A к треугольной делается при этом только один раз. Для каждой правой части делается обратный ход.

Таким образом получение обратной матрицы можно оформить в виде итерационной процедуры (количество итераций равно размерности СЛАУ), где на каждом шаге выполняется обратный ход метода Гаусса.

Проверку работы метода можно сделать несколькими вариантами.