Информатика
Программирование:
Лекция 5
Работа в рамках материала 1 семестра

Доцент каф. ВММБ, к.т.н. Каменских Анна Александровна

Адрес кафедры ВММБ:108 к. Г (ул. Пр. Поздеева),

Тел. кафедры ВММБ: +7(342) 239-15-64

Электронная почта преподавателя: anna_kamenskih@mail.ru

Задания на лабораторную работу № 5

1. Создать программы на языке Java для нахождения корней уравнений с использованием численных методов: половинного деления, простой итерации, Ньютона. Оценку качества решения организовать с использованием массивов.
2. Создать программу на языке Java, которая находит решение СЛАУ с использованием метода Гаусса.
3. Создать программу на языке Java, которая при помощи математических свойств матриц и итерационной процедуры позволяет найти обратную матрицу.
4. Создать программу на языке Java, которая повторяет алгоритм метода наименьших квадратов (варианты заданий взять в УИР), с обращением для решения СЛАУ к классу метода Гаусса. Проверка решения СЛАУ завязана на метод обратной матрицы.
5. Оформить отчет в MS Word с тестированием работы программ.

Метод половинного деления

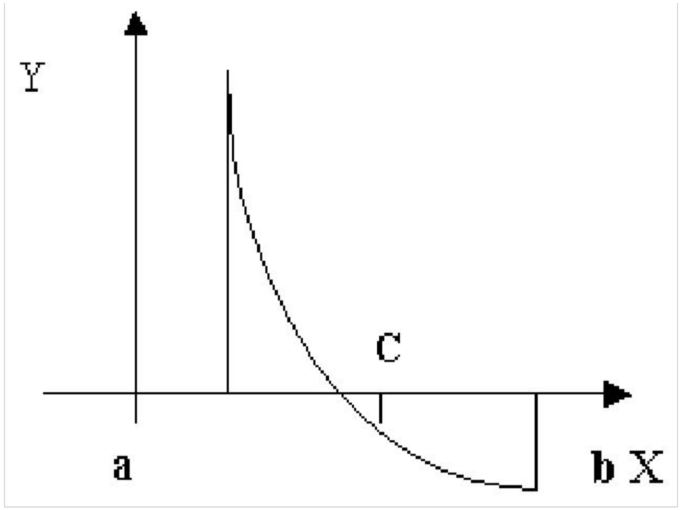


Рис. 1 Функция меняет знак на $[a,c]$

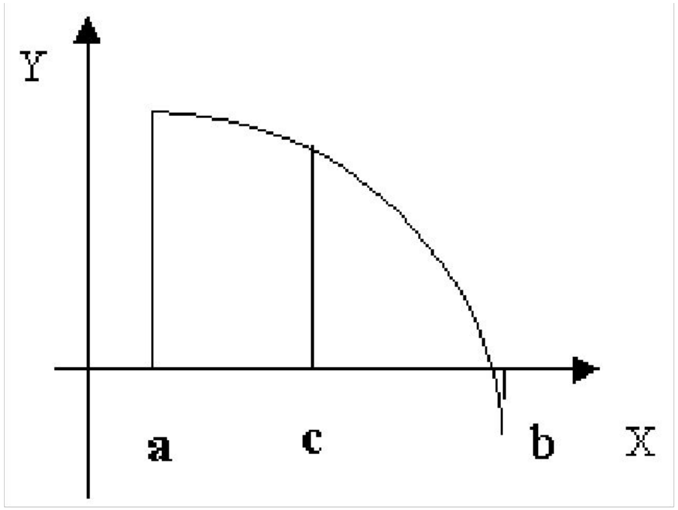
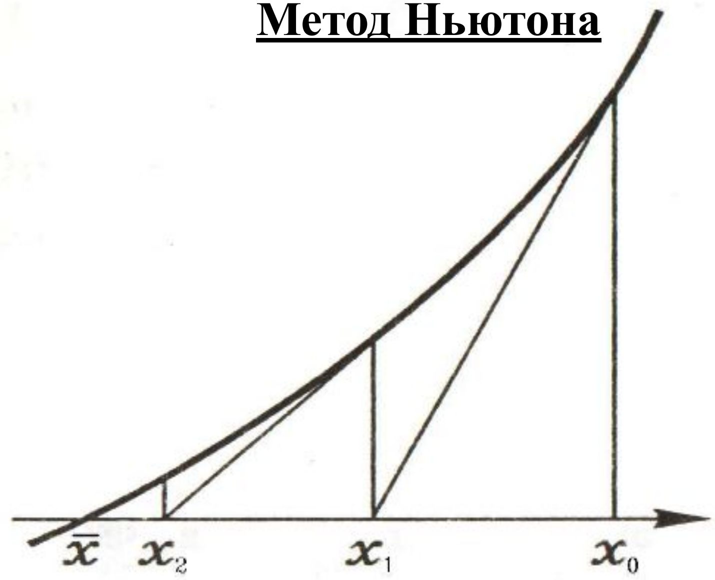


Рис. 2Функция меняет знак на $[c,b]$

Разделим отрезок $[a,b]$ пополам точкой $c=\dfrac{a+b}{2}$. Если $f(c)\neq 0$ (что практически наиболее вероятно), то возможны два случая: либо $f(x)$ меняет знак на отрезке $[a,c]$ (Рис. 1), либо на отрезке $[c,b]$ (Рис. 2)

$\boxed{|b-a|<\varepsilon}$ **Остановка итерационной процедуры**

Метод Ньютона



Для решения нелинейного уравнения $f(x)=0$ по методу Ньютона используется итерационный процесс: $\boxed{x(k+1)=x(k)-\frac{f(x(k))}{f'(x(k))}}$,где $k=0,1,2,\ldots,$ $x(0)$ – некоторое начальное приближение к корню. При этом предполагается, что $f'(x)\neq 0$ на отрезке $[a,b]$.

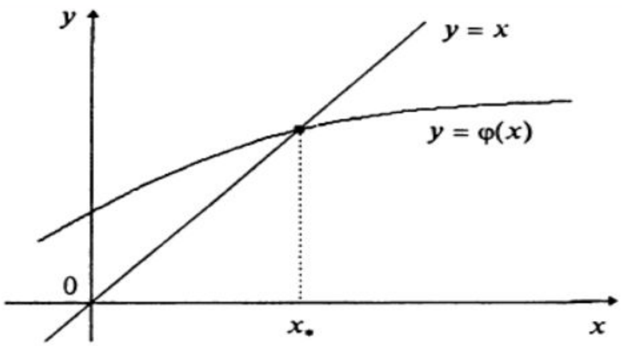
При вычислении корня уравнения с точностью ε по методу Ньютона условием окончания итераций может служить:

$$\boxed{|x(k+1)-x(k)|\leq\varepsilon\,.}$$

Метод простой итерации

Рассмотрим уравнение $f(x)=0$ с корнем $x\in[a,b]$. Для решения уравнения методом простых итераций приведем его к равносильному виду: $x=\varphi(x)$ Это всегда можно сделать, причем многими способами. Например: $x=g(x)f(x)+x\equiv\varphi(x)$, где $g(x)$ – произвольная непрерывная функция, не имеющая корней на отрезке $[a,b]$.

Пусть $x(0)$ – полученное каким-либо способом приближение к корню x (в простейшем случае $x(0)=\dfrac{a+b}{2}$). Метод простой итерации заключается в последовательном вычислении членов итерационной последовательности: $\boxed{x(k+1)=\varphi(x(k))}$, где $k=0,1,2,\ldots$, начиная с приближения $x(0)$. Критерий окончания итерационного процесса. При заданной точности $\varepsilon>0$ вычисления следует вести до тех пор, пока не окажется выполненным неравенство $|x(k+1)-x(k)|<\dfrac{1-q}{q}\varepsilon$, где $0\le q<1$ – постоянная и удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)|\le q$. Если величина $0<q\le 0,5$, то можно использовать более простой критерий окончания итераций: $\boxed{|x(k+1)-x(k)|<\varepsilon}$.



При этом задача сводится к нахождению абсциссы точки

- пересечения прямой $y=x$
- и кривой $y=\varphi(x)$

Задание: получить методами половинного деления, простой итерации и Ньютона корень уравнения с точностью **<u>0,01;0,001;0,00001;0,0000001</u>**. Сделать сравнение полученного численного решения с аналитическим и между собой.

1. $x - \sin x = 0.25;$
2. $x^3 = e^x - 1;$
3. $\sqrt{x} - \cos x = 0;$
4. $x^2 + 1 = \arccos x;$
5. $\lg x - \dfrac{7}{2x+6} = 0;$
6. $\operatorname{tg}(0.5x + 0.2) = x^2;$
7. $3x - \cos x - 1 = 0;$
8. $x + \lg x = 0.5;$
9. $x^2 = \arcsin(x - 0.2);$
10. $x^2 + 4\sin x = 2;$
11. $\operatorname{ctg} x - x^2 = 0;$
12. $\operatorname{tg} x = \cos x - 0.1;$
13. $x \ln(x+1) - 0.3 = 0;$
14. $x^2 - \sin 10x = 0;$
15. $\operatorname{ctg} x = x;$
16. $\operatorname{tg} 3x + 0.4 = x^2;$
17. $x^2 + 1 = \operatorname{tg} x;$
18. $x^2 - 1 = \ln x;$
19. $0.5^x + 1 = (x-2)^2;$
20. $(x+3)\cos x = 1;$
21. $x^2 \cos 2x = -1;$
22. $\cos(x + 0.3) = x^2;$
23. $2^x (x-1)^2 = 2;$
24. $x \ln(x+1) = 0.5.$

Метод Гаусса

Метод Гаусса состоит в исключении слагаемых системы путем ее равносильного преобразования. При этом в численном анализе с целью хорошей алгоритмизации задачи преобразованию подвергаются не сами уравнения, а исходные данные – матрица A и вектор b, соединенные в одну (расширенную) матрицу. В этом случае метод разбивается на две совокупности операций, которые условно названы *прямым ходом* и *обратным ходом*.

Методика решения задачи

1. *Прямой ход* состоит в исключении элементов, расположенных ниже элементов, соответствующих главной диагонали матрицы A. Схематически прямой ход представляется в виде

$$A_1 = \left(\begin{array}{l|l} a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n} & b_1 \\ a_{21}a_{22}a_{23}\ldots a_{2n} & b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ldots a_{nn} & b_n \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l|l} 1\ c_{12}\ c_{13}\ldots c_{1n} & d_1 \\ 0\ 1\quad c_{23}\ldots c_{2n} & d_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0\ 0\quad 0\ldots\ldots\ 1 & d_n \end{array}\right) = \hat{A}_1, \qquad (1.3)$$

где $\hat{A}_1$ – матрица, которая содержит *опорные строки* (о.с.), получающиеся при выполнении прямого хода, а затем используется в обратном ходе.

Особенности прямого хода:

а) матрица A преобразуется к верхнетреугольному виду с единицами на главной диагонали;

б) получение матрицы $\hat{A}_1$ в прямом ходе включает следующие действия:

– деление на *ведущие элементы* – на a_{11} в первой строке, на $\tilde{a}_{22}$ – во второй, на $\tilde{\tilde{a}}_{33}$ – в третьей и т.д. (при этом полагается, что они отличны от нуля, и в этом случае рассматриваемый метод Гаусса называется методом *единственного деления* в смысле отсутствия перебора ведущих элементов);

– исключение элементов a_{ij} столбцов, лежащих ниже опорных строк матрицы $\hat{A}_1$. Для исключения элементов первого столбца используется первая о.с., для элементов второго столбца – вторая о.с. и т.д. Все остальные действия поясним на примере.

2. *Обратный ход* – от $\hat{A}_1$ переходим к системе, включающей $x_1,...,x_n$, и, начиная с последнего уравнения, последовательно определяем $x_n, x_{n-1},...,x_1$:

$$x_n = d_n;$$

$$x_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1,n} \cdot x_n,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_1 = d_1 - c_{12}x_2 - \dots - c_{1n}x_n.$$

Здесь и далее знак "*" у компонент решения системы опущен.

Пример 1.4. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2, \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 &= 2, \\ 8x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= 11, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 - 2x_4 &= -7 \end{aligned}$$

методом Гаусса единственного деления.

□ 1. Прямой ход.

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ 8 & -1 & -1 & 2 & 11 \\ 1 & 6 & -2 & -2 & -7 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & \boxed{3} & -7 & 9 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & 34 & 27 \\ 0 & 7 & -3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{22}{3}} & 13 & 13 \\ 0 & 0 & \frac{40}{3} & -\frac{57}{3} & -19 \end{pmatrix} \xrightarrow{k=3}$$

$$\xrightarrow{k=3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{-\frac{2814}{66}} & -\frac{2814}{66} \end{pmatrix} \xrightarrow{k=4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Обратный ход.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{3} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{39}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ \frac{39}{22} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{или}$$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 &= -2, \\ x_2 - \frac{7}{3}x_3 + 3x_4 &= 2, \\ x_3 + \frac{39}{22}x_4 &= \frac{39}{22}, \\ x_4 &= 1. \end{aligned}$$

Отсюда $x_4 = 1$, $x_3 = \frac{39}{22} - \frac{39}{22}x_4 = 0$,

$x_2 = 2 + \frac{7}{3}x_3 - 3x_4 = -1$, $x_1 = -2 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 1$.

В результате получено решение: $x_* = (1; -1; 0; 1)^T$. ■

Получение обратной матрицы

Обратной матрицей к матрице ***A*** называется матрица ***A*$^{-1}$**, для которой выполнено соотношение:

$$A \cdot A^{-1} = E$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} A^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3n} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} & \dots & \tilde{a}_{3n} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \tilde{a}_{n3} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Из правила умножения матриц, получим систему из n^2 уравнений с n^2 переменными a_{ij}, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Чтобы получить первый столбец матрицы ***E***, нужно почленно умножить каждую строку матрицы ***A*** на первый столбец матрицы A^{-1} и приравнять полученное произведение соответствующему элементу первого столбца матрицы ***E.*** В результате получим систему уравнений

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{a}_{11} \\ \tilde{a}_{21} \\ \tilde{a}_{31} \\ .. \\ \tilde{a}_{n1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{12} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{13} \cdot \tilde{a}_{31} + \ldots + a_{1n} \cdot \tilde{a}_{n1} = 1 \\ a_{21} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{22} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{23} \cdot \tilde{a}_{31} + \ldots + a_{2n} \cdot \tilde{a}_{n1} = 0 \\ a_{31} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{32} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{33} \cdot \tilde{a}_{31} + \ldots + a_{3n} \cdot \tilde{a}_{n1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot \tilde{a}_{11} + a_{n2} \cdot \tilde{a}_{21} + a_{n3} \cdot \tilde{a}_{31} + \ldots + a_{nn} \cdot \tilde{a}_{n1} = 0 \end{cases}$$

Решив полученную **систему**, например методом Гаусса, мы **получим первый столбец обратной матрицы** A^{-1}.

Чтобы получить второй столбец матрицы ***E***, нужно почленно умножить каждую строку матрицы ***A*** на второй столбец матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ и приравнять полученное произведение соответствующему элементу второго столбца матрицы ***E.*** В результате получим систему уравнений, аналогично как и для первого столбца.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ .. & .. & .. & \dots & .. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{22} \\ \tilde{a}_{32} \\ .. \\ \tilde{a}_{n2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11} \cdot \tilde{a}_{12} + a_{12} \cdot \tilde{a}_{22} + a_{13} \cdot \tilde{a}_{32} + \dots + a_{1n} \cdot \tilde{a}_{n2} = 0 \\ a_{21} \cdot \tilde{a}_{12} + a_{22} \cdot \tilde{a}_{22} + a_{23} \cdot \tilde{a}_{32} + \dots + a_{2n} \cdot \tilde{a}_{n2} = 1 \\ a_{31} \cdot \tilde{a}_{12} + a_{32} \cdot \tilde{a}_{22} + a_{33} \cdot \tilde{a}_{32} + \dots + a_{3n} \cdot \tilde{a}_{n2} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \cdot \tilde{a}_{12} + a_{n2} \cdot \tilde{a}_{22} + a_{n3} \cdot \tilde{a}_{32} + \dots + a_{nn} \cdot \tilde{a}_{n2} = 0 \end{cases}$$

Решив полученную **систему**, например методом Гаусса, мы получим **второй столбец обратной матрицы** $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Всего, таким образом, получим *n* систем по *n* уравнений в каждой системе, причем все эти системы имеют одну и ту же матрицу ***A*** и отличаются только свободными членами. Приведение матрицы ***A*** к треугольной делается при этом только один раз. Для каждой правой части делается обратный ход.

Таким образом получение обратной матрицы можно оформить в виде итерационной процедуры (количество итераций равно размерности СЛАУ), где на каждом шаге выполняется обратный ход метода Гаусса.

Проверку работы метода можно сделать несколькими вариантами.