

Задача 8
**Кодирование данных,
комбинаторика, системы
счисления**

Что нужно знать

- В русском языке 33 буквы: 10 гласных букв (а, у, о, ы, и, э, я, ю, ё, е), 21 согласная буква (б, в, г, д, ж, з, й, к, л, м, н, п, р, с, т, ф, х, ц, ч, ш, щ) и два знака (ь, ъ).
- Алфавит английского языка по написанию совпадает с латинским алфавитом и состоит из 26 букв.
- принципы работы с числами, записанными в позиционных системах счисления
- если слово состоит из L букв, причем есть n_1 вариантов выбора первой буквы, n_2 вариантов выбора второй буквы и т.д., то число возможных слов вычисляется как произведение

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_L$$

Что нужно знать

- если слово состоит из L букв, причем каждая буква может быть выбрана n способами, то число возможных слов вычисляется как $N = n^L$
- если в программе L вложенных циклов и внешний цикл выполняется n_1 раз, следующий (вложенный) n_2 раз и т.д., то команды самого внутреннего цикла будут выполняться N раз, где
$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_L.$$
Если $n_1 = n_2 = \dots = n_L = n$, то $N = n^L$.
- при увеличении n или L значение N сильно возрастает, что приводит к существенному увеличению времени выполнения программы.

Пример задания

Игорь составляет таблицу кодовых слов для передачи сообщений, каждому сообщению соответствует своё кодовое слово. В качестве кодовых слов Игорь использует трёхбуквенные слова, в которых могут быть только буквы Ш, К, О, Л, А, причём буква К появляется ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в кодовом слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько различных кодовых слов может использовать Игорь?

Решение

- буква К может стоять на одном из трёх мест, остальные две буквы выбираются из оставшихся четырёх: Ш, О, Л или А
- пусть К – первая буква, тогда оставшиеся две буквы можно выбрать $4^2 = 16$ способами
- так как К может стоять на одной из трёх позиций, общее количество подходящих слов –
 $3 \cdot 16 = 48$

Ответ: 48.

Задание 2

Маша составляет шестибуквенные слова перестановкой букв слова КАПКАН. При этом она избегает слов с двумя подряд одинаковыми буквами. Сколько различных кодов может составить Маша?

Решение

- проще всего сначала найти общее количество возможных слов, а затем вычесть из него количество «запрещённых» слов – тех, которые начинаются на букву Ъ или содержат комбинации ЪУ и ЪА
- сначала найдём общее количество слов, не накладывая никаких ограничений; при этом есть 5 способов выбрать первую букву, 4 способа выбрать вторую и т.д., так что общее число вариантов равно $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$
- первой буквой не может быть Ъ, это исключает $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ варианта
- теперь определим, сколько слов содержит запрещённую комбинацию символов ЪУ; эта комбинация может располагаться на одной из 4-х позиций:
 - ЪУ***, *ЬУ**, **ЬУ*, ***ЬУ
- первый случай уже исключён (слово не может начинаться с буквы Ъ), для каждого из остальных случаев количество вариантов распределения остальных букв равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ вариантов, то есть запрет сочетания ЪУ исключает $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$ кодов
- аналогично запрет сочетания ЪА исключает ещё 18 кодов
- таким образом, из 120 слов запрещёнными являются 24 варианта с первой буквой Ъ, 18 вариантов, содержащие ЪУ в середине слова, и 18 вариантов, содержащие ЪА в середине слова
- остаётся $120 - 24 - 18 - 18 = 60$ кодов

Ответ: 60.

Задание 3

Вася составляет 4-буквенные коды из букв У, Л, Е, Й. Каждую букву нужно использовать ровно 1 раз, при этом код не может начинаться с буквы Й и не может содержать сочетания ЕУ. Сколько различных кодов может составить Вася?

Решение

- проще всего сначала найти общее количество возможных слов, а затем вычесть из него количество слов, в которых есть сочетание ЕУ
- первой буквой не может быть Й, поэтому осталось только 3 возможных первых буквы
- предположим, что первую букву выбрали, тогда вторую выбираем из оставшихся трёх
- при выборе третьей буквы у нас только 2 варианта, а последняя буква – та, которая осталась последней невыбранной:

3	3	2	1
---	---	---	---

- в итоге общее количество возможных слов равно $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$
- теперь определим, сколько слов содержат сочетание ЕУ; нужно рассмотреть все возможные позиции, где может стоять пара ЕУ

Решение

- пусть слово начинается с ЕУ, тогда следующую букву можно выбрать двумя способами, а последнюю – только одним, так что количество вариантов равно 2:

1(Е)	1(У)	2	1
------	------	---	---

- пусть пара ЕУ – это вторая и третья буквы; тогда на первом месте может стоять только буква Л (но не Й), а на последнем – Й, получаем еще один вариант:

1(Л)	1(Е)	1(У)	1(Й)
------	------	------	------

- сдвиг пары ЕУ в конец слова даёт ещё одну комбинацию

1(Л)	1(Й)	1(Е)	1(У)
------	------	------	------

- таким образом, из 18 слов четыре (2 + 1 + 1) содержат ЕУ
Ответ: 14.

Задание 4

Вася составляет 3-буквенные слова, в которых есть только буквы В, Е, С, Н, А, причём буква А используется в каждом слове хотя бы 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Решение

- буква А может стоять на одном из трёх мест: A^{**} , $*A^*$, $**A$, где * обозначает любой из пяти символов
- в каждом случае в остальных двух позициях может быть любая из пяти букв
- для шаблона A^{**} получаем (перемножая количество вариантов для каждой позиции)
- $1 \cdot 5 \cdot 5 = 25$ слов
- для шаблона $*A^*$ тоже получим 25 слов, но нужно учесть, что все слова, в которых первая буква А мы уже подсчитали, поэтому считаем только слова, где на первом месте стоит какая-то другая буква (В, Е, С или Н)
- отсюда находим, что шаблон $*A^*$ добавляет $4 \cdot 1 \cdot 5 = 20$ новых слов
- рассматривая шаблон $**A$, не учитываем уже подсчитанные слова, в которых буква А есть на первом или втором местах, количество новых слов – $4 \cdot 4 \cdot 1 = 16$
- всего получается $25 + 20 + 16 = 61$ слово

Ответ: 61.

Задание 5

Вася составляет 5-буквенные слова, в которых есть только буквы С, Л, О, Н, причём буква С используется в каждом слове ровно 1 раз. Каждая из других допустимых букв может встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Словом считается любая допустимая последовательность букв, не обязательно осмысленная. Сколько существует таких слов, которые может написать Вася?

Решение

- буква С может стоять на одном из пяти мест: С****, *С***, **С**, ***С* и ****С, где * обозначает любой из оставшихся трёх символов
- в каждом случае в остальных четырёх позициях может быть любая из трёх букв Л, О, Н, поэтому при заданном расположении буквы С имеем $3^4 = 81$ вариант
- всего вариантов $5 \cdot 81 = 405$.
- Ответ: 405.

Задание 6

Сколько существует различных символьных последовательностей длины 5 в четырёхбуквенном алфавите {A, C, G, T}, которые содержат ровно две буквы A?

Решение

- рассмотрим различные варианты слов из 5 букв, которые содержат две буквы А и начинаются с А:

АА*** А*А** А**А* А***А

Здесь звёздочка обозначает любой символ из набора {С, G, Т}, то есть один из трёх символов.

- итак, в каждом шаблоне есть 3 позиции, каждую из которых можно заполнить тремя способами, поэтому общее число комбинаций (для каждого шаблона!) равно $3^3 = 27$
- всего 4 шаблона, они дают $4 \cdot 27 = 108$ комбинаций
- теперь рассматриваем шаблоны, где первая по счёту буква А стоит на второй позиции, их всего три:

*АА** *А*А* *А**А

они дают $3 \cdot 27 = 81$ комбинацию

Решение

- два шаблона, где первая по счёту буква А стоит на третьей позиции:

**АА* **А*А

они дают $2 \cdot 27 = 54$ комбинации

- и один шаблон, где сочетание АА стоит в конце

***АА

они дают 27 комбинаций

- всего получаем $(4 + 3 + 2 + 1) \cdot 27 = 270$ комбинаций

ответ: 270.

Задание 7

Сколько слов длины 5, начинающихся с гласной буквы, можно составить из букв Е, Г, Э? Каждая буква может входить в слово несколько раз. Слова не обязательно должны быть осмысленными словами русского языка.

Решение:

- первая буква слова может быть выбрана двумя способами (Е или Э), остальные – тремя
- общее число различных слов равно
 $2 * 3 * 3 * 3 * 3 = 162$

ответ: 162.

Задание 8

- *Все 5-буквенные слова, составленные из букв А, О, У, записаны в алфавитном порядке.*

Вот начало списка:

- **1. ААААА**
- **2. ААААО**
- **3. ААААУ**
- **4. АААОА**
- **.....**

Запишите слово, которое стоит на 240-м месте от начала списка.

Решение

- подсчитаем, сколько всего 5-буквенных слов можно составить из трех букв;
- очевидно, что есть всего 3 однобуквенных слова (А, О, У); двух буквенных слов уже $3 \times 3 = 9$ (АА, АО, АУ, ОА, ОО, ОУ, УА, УО и УУ)
- аналогично можно показать, что есть всего $3^5 = 243$ слова из 5 букв
- очевидно, что последнее, 243-е слово – это УУУУУ
- далее идём назад: предпоследнее слово УУУУО (242-е), затем идет УУУУА (241-е) и, наконец, УУУОУ (240-е)

Ответ: УУУОУ.

Возможные ловушки и проблемы:

хорошо, что требовалось найти слово, которое стоит близко к концу списка; если бы было нужно, скажем, 123-е слово, работы было бы значительно больше