
Решение тригонометрических уравнений функционально- графическим методом

Уравнение есть равенство,
которое еще не является истинным,
но которое стремятся сделать
истинным,
не будучи уверенным, что этого можно
достичь.

А. Фуше

Прежде всего, уточним, тригонометрическое уравнение - это уравнение, содержащее неизвестное в тригонометрической функции, и для нахождения его корней необходимо с помощью различных преобразований свести данное уравнение к простейшему тригонометрическому уравнению, а затем найти неизвестное.

Существуют общие методы решений уравнений как тригонометрических, так и показательных и логарифмических.

Мы знаем такие методы как:

- сведение к квадратным уравнениям;
 - разложение на множители;
 - введение новой переменной (вспомогательного угла);
 - однородные уравнения;
 - различные преобразования с помощью формул;
 - использование ограниченности функций;
 - функционально-графический метод;
 - и др.
-

функционально-графический метод решения уравнений

**основан на применении свойств
тригонометрических функций и
анализа построения графиков
функций.**

Этот метод является общим для различных уравнений,
поэтому знание его поможет в решении многих
уравнений

Примерами, в решении которых используется данный метод, могут быть

$$\sin\left(\frac{37}{2}\pi + x\right) = 3x^2 + 1$$

$$\sin x = 3x^2 + 1$$

$$\sqrt{16 - (4x + 5)^2} = 4 + \cos^2 \frac{2\pi x}{5}$$

$$16x^2 + 24x + 12 = \left(\sqrt{3} - \cos \frac{14\pi x}{3}\right) \left(\sqrt{3} + \cos \frac{14\pi x}{3}\right)$$

$$x^2 - 8x + 20 = (2 - \sin \pi x) (2 + \sin \pi x)$$

$$x^2 - 8x - 20 = (2 - \cos \pi x) (2 + \cos \pi x)$$

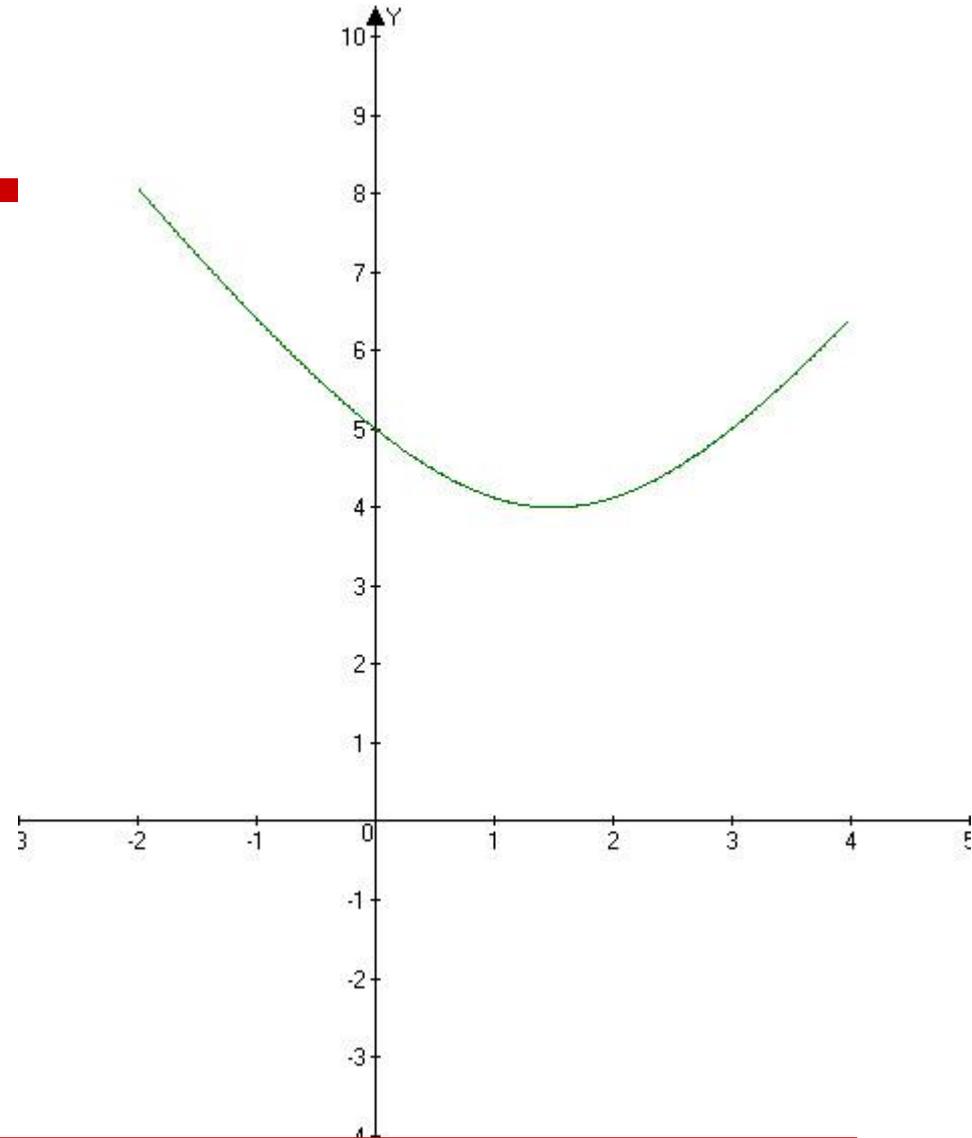
Решим уравнение

$$\sqrt{16 + (2x - 3)^2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$$

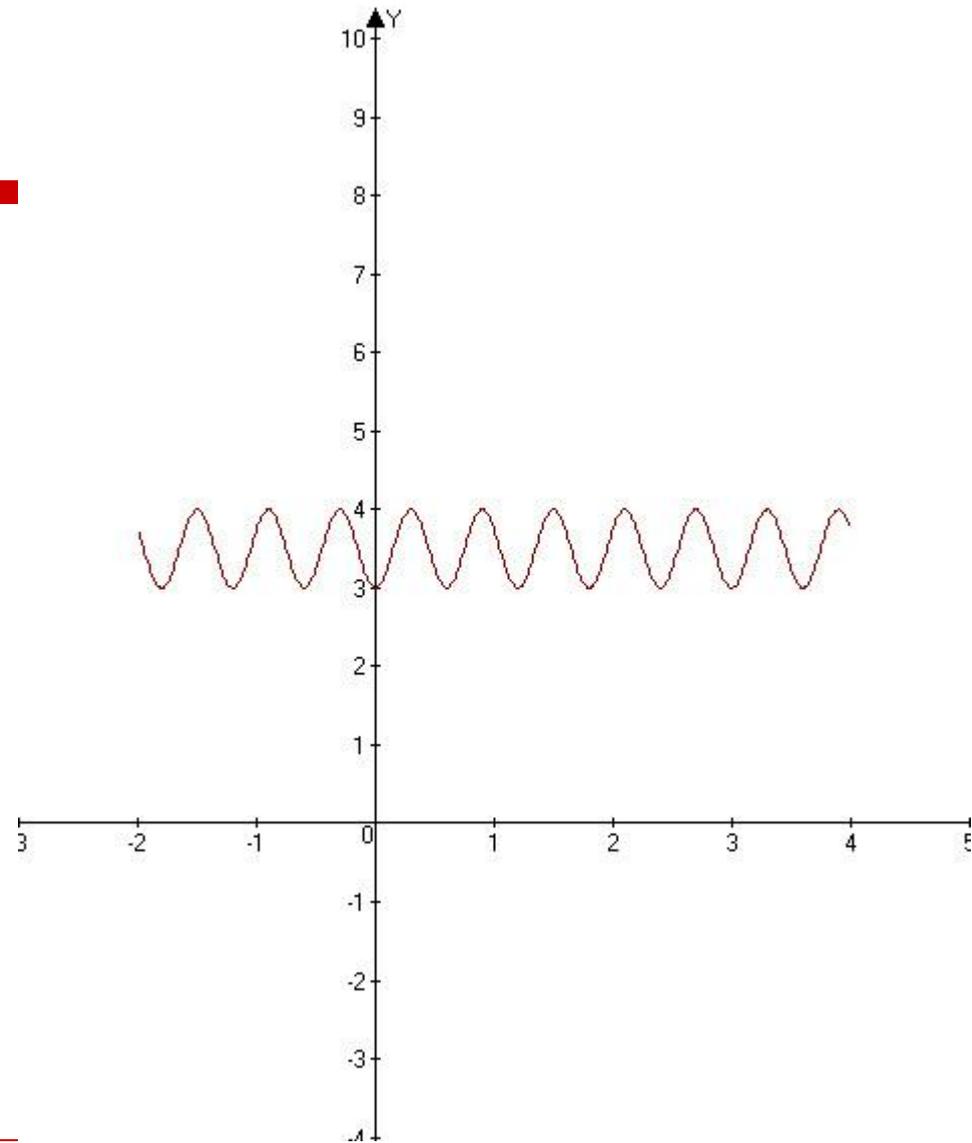
Построим графики двух функций

$$y_1 = \sqrt{16 + (2x - 3)^2} \text{ и } y_2 = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$$

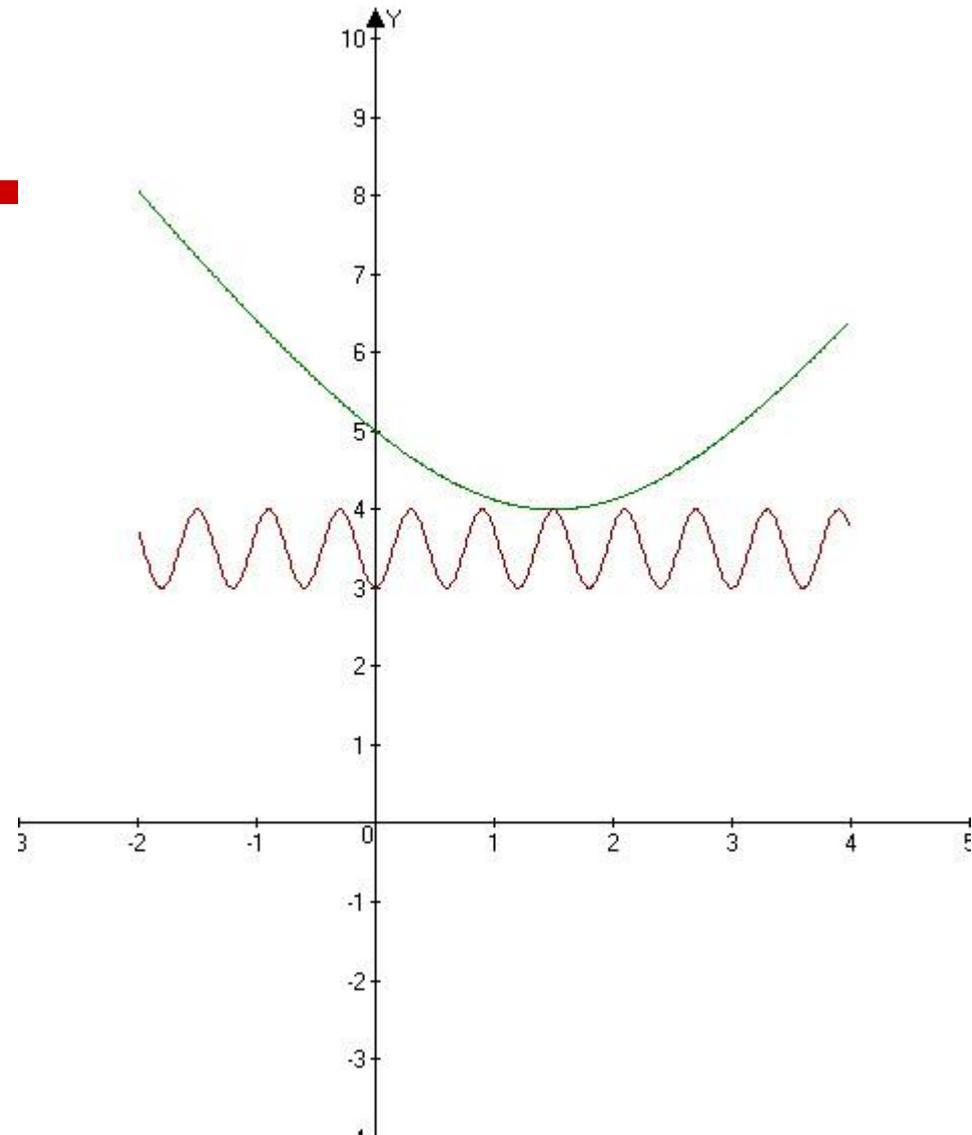
$$y = \sqrt{16 + (2x - 3)^2}$$



$$y = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$$



$$\sqrt{16 + (2x - 3)^2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3}$$



Графически решить это уравнение сложно, но можно воспользоваться свойствами данных функций.

Попробуем решить аналитическим путем

Найдем множество значений данных функций

$E(y_1) = [4; \infty)$, т.к. какое бы x не было,

всегда подкоренное выражение будет больше или равно 16,

и $E(y_2) = [3; 4]$ т.к. по свойству ограниченности функции имеем

$$0 < \cos^2 \frac{5\pi x}{3} < 1$$

$$-1 < -\cos^2 \frac{5\pi x}{3} < 0$$

$$3 < 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3} < 4$$

Ординаты двух функций имеют одно общее значение равное 4.

Следует выяснить, существует ли такая точка $A(X, 4)$, принадлежащая обоим графикам.

Для этого обратим внимание, что

$\sqrt{16 + (2x - 3)^2} = 4$, при наименьшем значении, имеем

$$16 + 4x^2 - 12x + 9 = 16$$

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3) = 0$$

$$X = \frac{3}{2}$$

2. Проверим, принадлежит ли $X = \frac{3}{2}$ второй функции

$$y_2 = 4 - \cos^2 \frac{5\pi x}{3} \text{ и}$$

будет ли при этом значении $X = \frac{3}{2}$, $y_2 = 4$

$$4 - \cos^2 \frac{5\pi \cdot 3}{3 \cdot 2} = 4 - \cos^2 \frac{5\pi}{2} = 4 - 0 = 4$$

Значит, точка $(\frac{3}{2}; 4)$ принадлежит двум графикам и

решением данного уравнения является $X = \frac{3}{2}$

Решим уравнение $\sin\left(\frac{37\pi}{2} + x\right) = 3x^2 + 1$

Упростим аргумент $\sin\left(\frac{37\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

Исходное уравнение примет вид $\cos x = 3x^2 + 1$

Т.к. $-1 \leq \cos x \leq 1$, и $3x^2 + 1 \geq 1$,

то уравнение имеет решение, если имеет решение система
$$\begin{cases} \cos x = 1 \\ 3x^2 + 1 = 1 \end{cases}$$

Решим второе уравнение $3x^2 + 1 = 1$; $x = 0$.

Проверим, удовлетворяет ли полученное число 0 первому уравнению:

$$\begin{cases} \cos 0 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ (верно).}$$

Значит, корнем данного уравнения будет $x = 0$.

Рассмотрим еще пример с использованием данного метода

$$25X^2 - 20X + 6 = (\sqrt{2} - \cos \frac{5\pi x}{4}) * (\sqrt{2} + \cos \frac{5\pi x}{4})$$

$$(25X^2 - 20X + 4) + 2 = 2 - \cos^2 \frac{5\pi x}{4}$$

$$(5x-2)^2 + 2 = 2 - \cos^2 \frac{5\pi x}{4}$$

$$(5x-2)^2 = -\cos^2 \frac{5\pi x}{4}$$

$$Y_1 = (5x-2)^2, Y_2 = -\cos^2 \frac{5\pi x}{4}$$

Y_1 - парабола, ветви которой направлены вверх,
вершина находится в точке

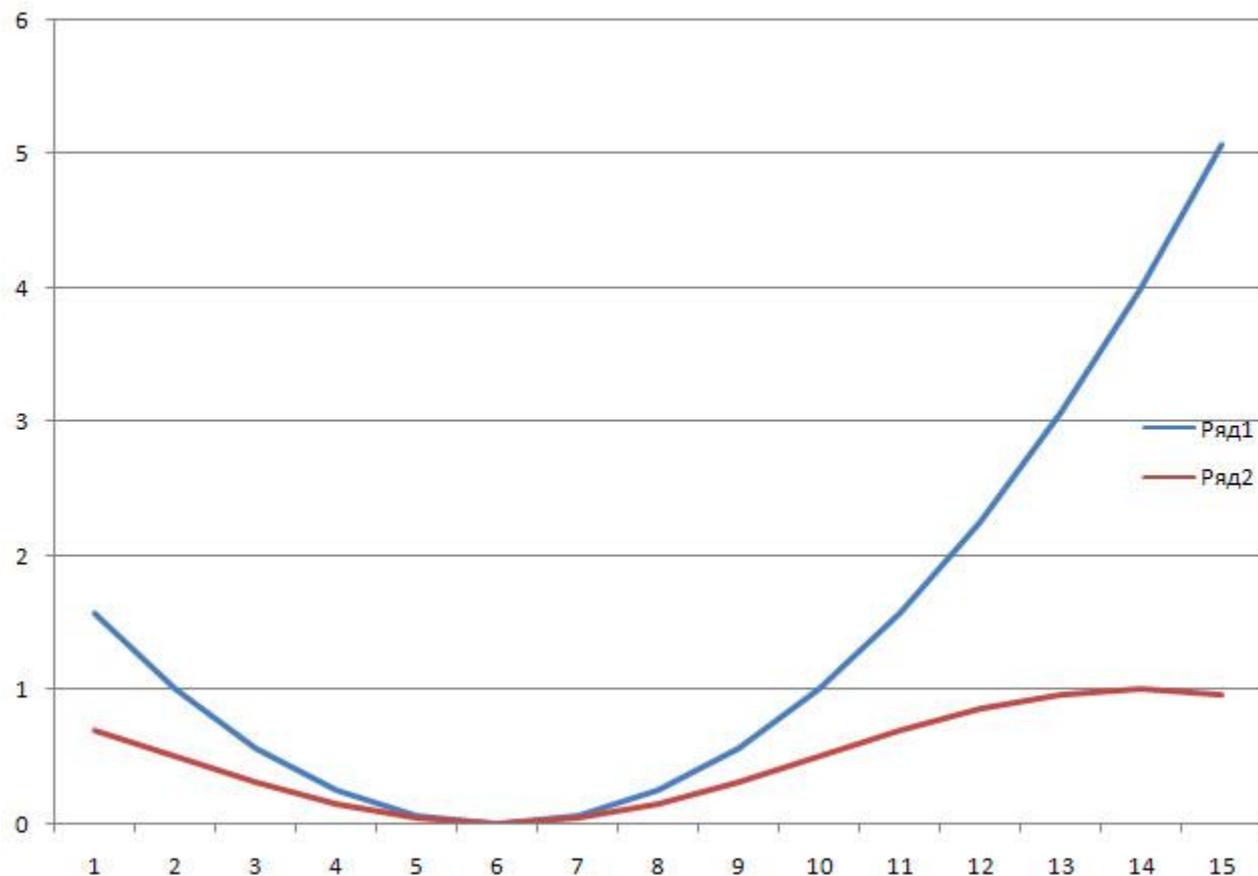
с абсциссой $X = \frac{2}{5}$. Это точка $(\frac{2}{5}; 0)$

Выясним, будет ли иметь общую точку график
функции $y = (5x-2)^2 + 2$

с графиком функции $Y_2 = -\cos^2 \frac{5\pi x}{4}$

На чертеже это легко увидеть, что такая точка есть.

0	4	1	3
0,05	3,0625	0,961978	2,100522
0,1	2,25	0,853694	1,396306
0,15	1,5625	0,691618	0,870882
0,2	1	0,500398	0,499602
0,25	0,5625	0,309118	0,253382
0,3	0,25	0,146869	0,103131
0,35	0,0625	0,038327	0,024173
0,4	0	6,34E-07	-6,3E-07
0,45	0,0625	0,037718	0,024782
0,5	0,25	0,145743	0,104257
0,55	0,5625	0,307647	0,254853
0,6	1	0,498806	0,501194
0,65	1,5625	0,690146	0,872354
0,7	2,25	0,852567	1,397433
0,75	3,0625	0,961366	2,101134
0,8	4	0,999997	3,000003
0,85	5,0625	0,962585	4,099915



На чертеже это легко увидеть, что такая точка есть.

Проверим аналитически.

$$2 - \cos^2 \frac{5\pi x}{4} = 2 - \cos^2 \frac{5\pi \cdot 2}{4 \cdot 5} = 2 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 2.$$

Осталось увидеть, что точка с координатами $(\frac{2}{5}; 2)$

принадлежит и параболе $Y_1 = (5x-2)^2$ и косинусоиде $Y_2 = -\cos^2 \frac{5\pi x}{4}$,

т.е. $X = \frac{2}{5}$ является корнем данного уравнения.

Данные уравнения входили в задания С в ЕГЭ 2008–2010 г.г.

В презентации использовались программы:

- Microsoft PowerPoint 2007
- Microsoft Office Word 2007
- Microsoft Office Excel 2007
- Microsoft Office Equation 3/0
- Fast Stone Capture
- Advanced Grapher

Задания выполнила Шлеенкова Мария 10 класс
