

A person is shown from the chest up, wearing a dark jacket and a light-colored shirt, writing on a chalkboard. The chalkboard is filled with mathematical equations and diagrams. The entire scene is overlaid with a semi-transparent green filter. The text 'Линейная алгебра' is centered on the image in a large, black, serif font.

Линейная алгебра

Матрицей A размерности $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где m -число строк матрицы, а
 n -число столбцов матрицы

Матрицы можно записывать в виде:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ или } A = \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}$$

где a_{ij} - элементы матрицы;

Первый индекс i указывает номер строки, ($i = \overline{1, m}$);

Второй индекс j - номер столбца, ($j = \overline{1, n}$).

Например:

$A = (1 \quad 0 \quad 4)$ - матрица-строка

$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ - матрица размерности 2×3

$C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ - матрица-столбец

- Матрица называется **квадратной**, если $n = m$, число n называют ее порядком.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратная матрица третьего порядка.

Элементы a_{ii} ($i = 1, m$) составляют главную диагональ матрицы, а элементы $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ - вспомогательную, побочную диагональ матрицы.

Если все $a_{ij} = 0$, ($i \neq j$) за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii} , то матрицу называют **диагональной**.

• *Диагональная матрица называется единичной, если все $a_{ii} = 1$,*

обозначают: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$

Если **все $a_{ij} = 0$** , то матрица называется **нулевой**, обозначают **0**.

Две матрицы **A** и **B** называются **равными**, если они одной и той же размерности и их соответствующие элементы равны между собой. $A=B$, если $a_{ij} = b_{ij}$

Операции над матрицами

1) *Суммой матриц $A+B$ называют такую матрицу C , для которой $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.*

Складывать можно матрицы одинаковой размерности.

Операции сложения матриц обладают такими же свойствами, что и операции сложения действительных чисел:

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A+0=A$$

2) Произведением матрицы A на действительное число λ называют такую матрицу $C = \lambda A$, для которой $c_{ij} = \lambda a_{ij}$. Из данного определения вытекают следующие свойства:

$$\lambda \beta A = \lambda(\beta A)$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$$

где λ, β - действительные числа;

A, B - матрицы.

Разность матриц $A - B$ можно ввести как сумму

$$A + (-1)B.$$

- 3) Произведением матрицы $A = (a_{ij})_{m \times n}$ на матрицу $B = (b_{ij})_{m \times k}$ называется матрица $C = (c_{ij})_{m \times k}$ элементы, которой
$$C_{ij} = \sum_{s=1}^n a_{is} b_{sj}; \quad (i = \overline{1, m}; \overline{1, k})$$
, то есть элемент *матрицы* C , стоящий на пересечении i -ой строки и j -го столбца равен сумме произведений элементов i -ой строки *матрицы* A на соответствующие элементы j -го столбца *матрицы* B .

В общем случае:

Матрицы называются коммутативными, если $AB \neq BA$

Свойства произведения матриц

$$(AB)C = A(BC)$$

$$(A+B)C = AC + BC$$

$$\alpha AB = (\alpha A)B = A(\alpha B),$$

$AE = EA = A$, где E - единичная матрица

$A0 = 0$, где 0 - нулевая матрица.

Если у матрицы A строки заменить соответствующими столбцами, то получим так называемую *транспонированную матрицу*, которую обозначают A^T .

Свойства:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A+B)^T = A^T + B^T$$

$$(\alpha A)^T = \alpha A^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

• Пример 1. Найти: $C = 2A - 3(B - A)$,

$$\text{где } A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$C = 2A - 3(B - A) = 2A - 3B + 3A = 5A - 3B.$$

$$C = 5 \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -3 \\ 26 & 50 \end{pmatrix}$$

- **Пример 2.** Найти AB ,

Где $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \times 2 + 6 \times 8 & 3 \times 4 + 6 \times 9 \\ 7 \times 2 + 1 \times 8 & 7 \times 4 + 1 \times 9 \\ 5 \times 2 + 2 \times 8 & 5 \times 4 + 2 \times 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 54 & 66 \\ 22 & 37 \\ 26 & 38 \end{pmatrix}.$$

- **Пример 3.** Найти $A (B + 2A)$, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$