Линейная алгебра

Матрицей А размерности ***m* x *n***
называется прямоугольная таблица чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

где *m*-число строк матрицы, а
n-число столбцов матрицы

Матрицы можно записывать в виде:

$$A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n} \text{ или } A = \left\|a_{ij}\right\|_{m\times n}$$

где a_{ij} - элементы матрицы;

Первый индекс ***i*** указывает номер строки, $(i = \overline{1,m})$;

Второй индекс ***j*** – номер столбца, $(j = \overline{1,n})$.

Например:

A= $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ **-матрица-строка**

B= $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$ - **матрица размерности 2 *x* 3**

C= $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ **- матрица-столбец**

- Матрица называется **квадратной**, если $n = m$, число $\boldsymbol{n}$ называют ее порядком.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

квадратная матрица третьего порядка.

Элементы $\boldsymbol{a_{ii}}$ $(i = 1, m)$ составляют главную диагональ матрицы, а элементы a_{1n}, a_{2n-1}, ... , a_{n1} - вспомогательную, побочную диагональ матрицы.

Если все $a_{ij} = 0$, $(i \neq j)$ за исключением элементов, стоящих на главной диагонали a_{ii},то матрицу называют **диагональной.**

- *Диагональная матрица называется* ***единичной****, если все* $\boldsymbol{a_{ii} = 1}$ *,*

обозначают: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$.

Если **все** $\boldsymbol{a_{ij} = 0}$, то матрица называется **нулевой,** обозначают **0**.

Две матрицы **А и В** называются **равными,** если они одной и той же размерности и их соответствующие элементы равны между собой. А=В, если $a_{ij}= b_{ij}$

Операции над матрицами

1) ***Суммой матриц* A+B *называют такую матрицу* C*, для которой* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.**

Складывать можно матрицы одинаковой размерности.

Операции сложения матриц обладают такими же свойствами, что и операции сложения действительных чисел:

$$A+B=B+A$$

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

$$A+0=A$$

2) ***Произведением матрицы А на действительное число*** $\boldsymbol{\lambda}$ *называют такую матрицу* $\boldsymbol{C = \lambda A}$, *для которой* $\boldsymbol{c_{ij} = \lambda a_{ij}}$. Из данного определения вытекают следующие свойства:

$$\lambda \beta A = \lambda(\beta A)$$

$$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$$

$$(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta B$$

где λ, β - действительные числа;

А, В - матрицы.

Разность матриц А - В можно ввести как сумму А +(-1)В.

- 3) **Произведением** матрицы $A = (a_{ij})_{m\times n}$ на **матрицу** $\mathbf{B = (b_{ij})_{m\times k}}$ называется **матрица** $\mathbf{C = (c_{ij})_{m\times k}}$ элементы,которой $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj};\ (i = \overline{1,m}; \overline{1,k})$,то есть

элемент ***матрицы C***, стоящий на пересечении

i-ой строки и ***j***-го столбца равен сумме произведений

элементов ***i***-ой строки *матрицы A* на соответствующие

элементы ***j***-го столбца *матрицы B*.

В общем случае:

Матрицы называются ***коммутативными****, если* **AB≠BA**

Свойства произведения матриц

$$(AB)C=A(BC)$$

$$(A+B)C=AC+BC$$

$$\alpha\, AB = (\alpha\, A)B = A(\alpha\, B),$$

$AE = EA = A$, где E - единичная матрица

$A\,0 = 0$, где 0 - нулевая матрица.

Если у матрицы А строки заменить соответствующими столбцами, то получим так называемую ***транспонированную матрицу,*** которую обозначают $\boldsymbol{A^T}$.

Свойства:

$$\mathbf{(A^T)^T=A}$$

$$\mathbf{(A+B)^T= A^T+B^T}$$

$$\mathbf{(\alpha\, A)^T= \alpha\, A^T}$$

$$\mathbf{(AB)^T=B^T A^T}$$

- Пример 1. Найти: С = 2А - 3(В - А),

где $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$; $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$

Решение.

С= 2А - 3(В – А)= 2А – 3В + 3А= 5А - 3В.

$$\boldsymbol{C} = 5\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 20 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -18 & -3 \\ 6 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33 & -3 \\ 26 & 50 \end{pmatrix}$$

- **Пример 2.** Найти AB,

Где $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 7 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{6} \\ \mathbf{7} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{3 \times 2 + 6 \times 8} & \mathbf{3 \times 4 + 6 \times 9} \\ \mathbf{7 \times 2 + 1 \times 8} & \mathbf{7 \times 4 + 1 \times 9} \\ \mathbf{5 \times 2 + 2 \times 8} & \mathbf{5 \times 4 + 2 \times 9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{54} & \mathbf{66} \\ \mathbf{22} & \mathbf{37} \\ \mathbf{26} & \mathbf{38} \end{pmatrix}.$$

- **Пример 3.** Найти А (В + 2А), если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \\ -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$