Математический анализ
2 семестр
Занятие №6

Вычисление определенных интегралов

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

Формула Ньютона-Лейбница

Если существует непрерывная функция $F(x)$ такая, что $\forall x \in [a,b]\ \ F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Пусть $F'(x) = f(x)$ всюду, за исключение конечного числа точек $x_1, x_2, ..., x_k$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^{k}\left(F(x_i + 0) - F(x_i - 0)\right)$$

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^4 \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx = \int_1^4 \frac{1-2x+x^2}{x^{3/2}}dx = \int_1^4 \frac{dx}{x^{3/2}} - 2\int_1^4 \frac{dx}{x^{1/2}} + \int_1^4 x^{1/2}dx =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}}\Bigg|_1^4 - 4\sqrt{x}\Big|_1^4 + \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Bigg|_1^4 = -1+2-8+4+\frac{16}{3}-\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

1. $\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$

2. $\int_{0}^{\pi/2} \cos x \, dx$

3. $\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$

4. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

5. $\int_{1}^{2} \frac{(1-x)^2}{x^2} dx$

6. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x} \, dx$

7. $\int_{1}^{4} \left(\sqrt{x}+1\right)\left(x-\sqrt{x}+1\right) dx$

8. $\int_{0}^{1} (1-x)(1-2x) dx$

9. $\int_{1}^{9} \frac{\left(1+\sqrt{x}\right)^3}{\sqrt[3]{x}} dx$

10. $\int_{1}^{4} \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

11. $\int_0^1 \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2 dx$

12. $\int_0^1 \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}-1\right)}{\sqrt{x}} dx$

13. $\int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$

14. $\int_1^2 \frac{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}{\sqrt{x}} dx$

Занятие 6. Разложение на простейшие дроби

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 2\int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1|\Big|_0^1 + 2\ln|x+2|\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\ln|x+3|\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{1}{2}\ln 1 + 2\ln 3 - 2\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 4 + \frac{3}{2}\ln 3$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-3/2}{x+3}$$

Занятие 6. Разложение на простейшие дроби

1. $\int_1^2 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)}$

2. $\int_0^5 \frac{x^2}{x+1}dx$

3. $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^3-x}dx$

4. $\int_4^7 \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$

5. $\int_2^4 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$

6. $\int_0^1 \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$

7. $\int_3^5 \frac{xdx}{(x-1)(x-2)}$

8. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x+3}$

9. $\int_0^{a/2} \frac{adx}{(x-a)(x-2a)}$

10. $\int_2^5 \frac{dx}{x(x+1)}$

Занятие 6. Разложение на простейшие дроби

11. $\int_1^2 \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2}dx$

12. $\int_2^5 \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$

13. $\int_2^3 \frac{x^2+5x+7}{(x-1)(x+1)(x+2)}dx$

14. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$

15. $\int_2^5 \frac{2x^2+2}{(x+1)^2(x-1)}dx$

16. $\int_5^{10} \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}dx$

Занятие 6. Замена переменных в определенных интегралах

Теорема: Пусть

1) $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$;

2) функция $\phi(t)$ монотонно возрастает и $\phi(\alpha)=a$, $\phi(\beta)=b$;

3) $\forall t \in [\alpha,\beta]\ \exists \phi'(t)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\phi'(t)dt.$$

Учебный пример:

$$\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} = \int_0^3 \frac{e^t dt}{e^t\sqrt{1+t}} = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} =$$

$$= \int_0^3 \frac{d(t+1)}{\sqrt{t+1}} = 2\sqrt{t+1}\Big|_0^3 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2$$

$t = \ln x \quad x = \phi(t) = e^t$

$x = 1 \quad t = 0$

$x = e^3 \quad t = 3$

Занятие 6. Замена переменных в определенных интегралах

1. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$

2. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$

3. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx$

4. $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^4 e^x dx$

5. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$

6. $\int_0^1 \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}dx$

7. $\int_0^1 \frac{xdx}{\left(x^2+1\right)^2}$

8. $\int_1^2 \frac{e^{1/x}dx}{x^2}$

9. $\int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

10. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3dx}{\left(5/8-x^4\right)\sqrt{5/8-x^4}}$

Занятие 6. Замена переменных в определенных интегралах

11. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3+1}$

12. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$

13. $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$

14. $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$

15. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+13}$

16. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x)dx}{x^2}$

17. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$

18. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x\, dx$

19. $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}$

20. $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$

Спасибо за внимание

Занятие окончено