



Математический анализ
2 семестр
Занятие №6

Вычисление определенных
интегралов

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

Формула Ньютона-Лейбница

Если существует непрерывная функция $F(x)$ такая, что

$\forall x \in [a, b] \quad F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Обобщенная формула Ньютона-Лейбница

Пусть $F'(x) = f(x)$ всюду, за исключение конечного числа точек x_1, x_2, \dots, x_k . Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) - \sum_{i=1}^k (F(x_i + 0) - F(x_i - 0))$$

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_1^4 \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx = \int_1^4 \frac{1-2x+x^2}{x^{3/2}} dx = \int_1^4 \frac{dx}{x^{3/2}} - 2 \int_1^4 \frac{dx}{x^{1/2}} + \int_1^4 x^{1/2} dx =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{x}} \Big|_1^4 - 4\sqrt{x} \Big|_1^4 + \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_1^4 = -1 + 2 - 8 + 4 + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

$$1. \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$$

$$3. \int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$$

$$4. \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$5. \int_1^2 \frac{(1-x)^2}{x^2} dx$$

$$6. \int_{-1}^8 \sqrt[3]{x} \, dx$$

$$7. \int_1^4 (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1) dx$$

$$8. \int_0^1 (1-x)(1-2x) dx$$

$$9. \int_1^9 \frac{(1+\sqrt{x})^3}{\sqrt[3]{x}} dx$$

$$10. \int_1^4 \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}} dx$$

Занятие 6. Вычисление определенных интегралов

$$11. \int_0^1 \sqrt{x} (1 + \sqrt[3]{x})^2 dx$$

$$12. \int_0^1 \frac{(\sqrt{x} - 1)(x + \sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} dx$$

$$13. \int_1^2 \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$$

$$14. \int_1^2 \frac{(1 + \sqrt[3]{x})^2}{\sqrt{x}} dx$$

Занятие 6. Разложение на простейшие дроби

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x+1} + 2 \int_0^1 \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|x+1|\Big|_0^1 + 2 \ln|x+2|\Big|_0^1 - \frac{3}{2} \ln|x+3|\Big|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln 1 + 2 \ln 3 - 2 \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 4 + \frac{3}{2} \ln 3$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-3/2}{x+3}$$

Занятие 6. Разложение на простейшие дроби

$$1. \int_1^2 \frac{x dx}{(x+1)(x+2)}$$

$$2. \int_0^5 \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$3. \int_2^3 \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} dx$$

$$4. \int_4^7 \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} dx$$

$$5. \int_2^4 \frac{dx}{(x-1)(x+2)}$$

$$6. \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$7. \int_3^5 \frac{x dx}{(x-1)(x-2)}$$

$$8. \int_0^1 \frac{x^3 dx}{x+3}$$

$$9. \int_0^{a/2} \frac{adx}{(x-a)(x-2a)}$$

$$10. \int_2^5 \frac{dx}{x(x+1)}$$

Занятие 6. Разложение на простейшие дроби

$$11. \int_1^2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x(x+1)^2} dx$$

$$16. \int_5^{10} \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx$$

$$12. \int_2^5 \frac{dx}{(x-1)(x+3)}$$

$$13. \int_2^3 \frac{x^2 + 5x + 7}{(x-1)(x+1)(x+2)} dx$$

$$14. \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$$

$$15. \int_2^5 \frac{2x^2 + 2}{(x+1)^2(x-1)} dx$$

Занятие 6. Замена переменных в определенных интегралах

Теорема: Пусть

- 1) $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$;
- 2) функция $\phi(t)$ монотонно возрастает и $\phi(\alpha) = a$, $\phi(\beta) = b$;
- 3) $\forall t \in [\alpha, \beta] \exists \phi'(t)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Учебный пример:

$$\begin{aligned} \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} &= \int_0^3 \frac{e^t dt}{e^t \sqrt{1+t}} = \int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \\ &= \int_0^3 \frac{d(t+1)}{\sqrt{t+1}} = 2\sqrt{t+1} \Big|_0^3 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t = \ln x \quad x = \phi(t) = e^t \\ x = 1 \quad t = 0 \end{aligned}$$

$$x = e^3 \quad t = 3$$

Занятие 6. Замена переменных в определенных интегралах

$$1. \int_0^1 \sqrt{1+x} dx$$

$$2. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$$

$$3. \int_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$$

$$4. \int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$$

$$5. \int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$$

$$6. \int_0^1 \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx$$

$$7. \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$$

$$8. \int_1^2 \frac{e^{1/x} dx}{x^2}$$

$$9. \int_1^e \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$$

$$10. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{x^3 dx}{(5/8 - x^4) \sqrt{5/8 - x^4}}$$

Занятие 6. Замена переменных в определенных интегралах

$$11. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$$

$$12. \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$$

$$13. \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$$

$$14. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$$

$$15. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}$$

$$16. \int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin(1/x) dx}{x^2}$$

$$17. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg} x}}$$

$$18. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x dx$$

$$19. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}$$

$$20. \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt[3]{\sin x}}$$



Спасибо за
внимание

Занятие окончено