

Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

- Метод Гаусса или метод исключения неизвестных состоит в последовательном исключении во втором уравнении первой неизвестной, в третьем уравнении первой и второй неизвестных и т. д. Пока не получится система треугольного или трапецеидального вида.
- Метод удобнее применять на расширенной матрице

Решить методом Гаусса систему уравнений:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \\ 3x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

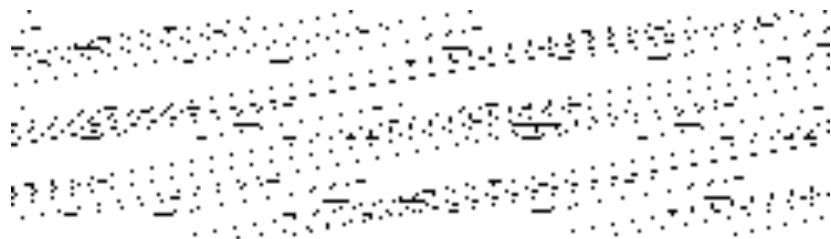
Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array} \right]$$

- Сначала смотрим на левое верхнее число:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 13 \\ 1 & 2 & -1 & 9 \end{array} \right)$$

- Почти всегда здесь должна находиться **единица**.
Как организовать единицу? Смотрим на первый столбец – готовая единица у нас есть!
Преобразование первое: меняем местами первую и третью строки:

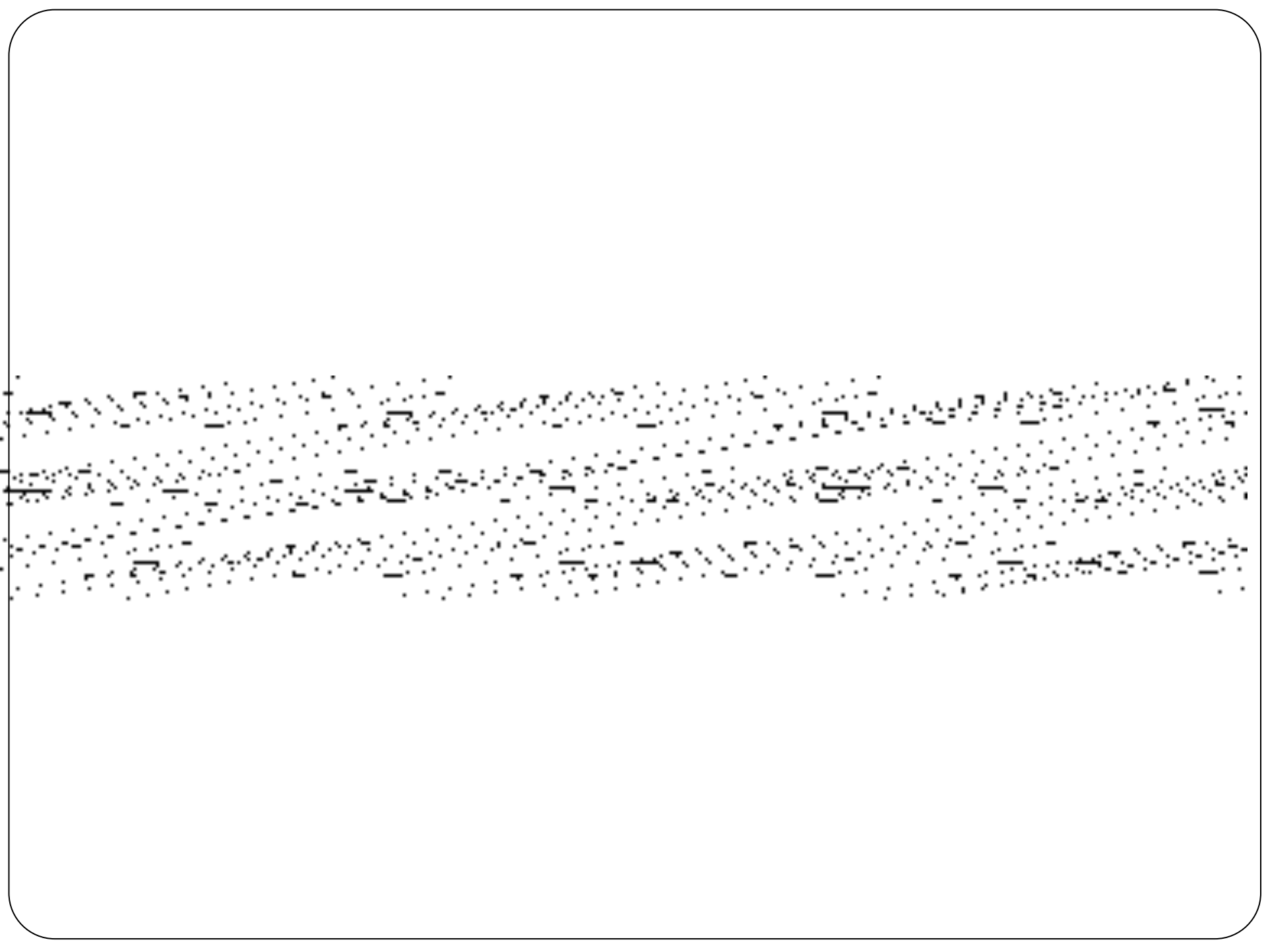


- Теперь нужно получить нули вот на этих местах:

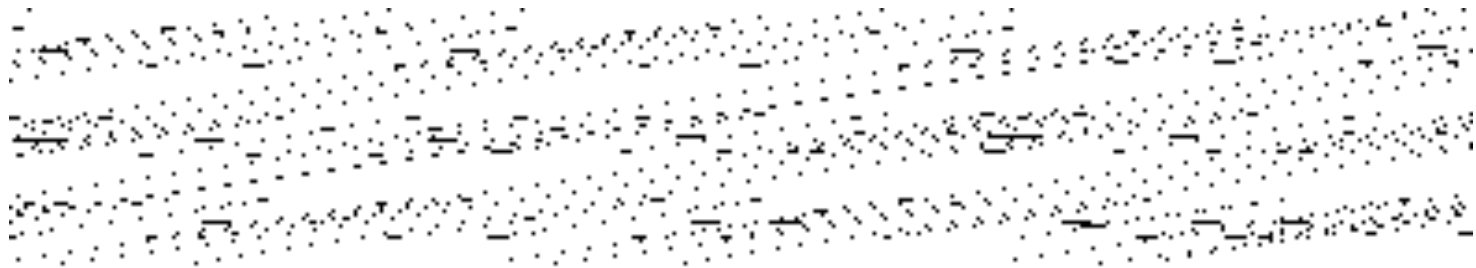
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ \textcircled{2} & -1 & 3 & 13 \\ \textcircled{3} & 2 & -5 & -1 \end{array} \right)$$

- Нужно **ко второй строке прибавить первую строку, умноженную на -2** . Мысленно или на черновике умножаем первую строку на -2 : $(-2, -4, 2, -18)$. И последовательно проводим (опять же мысленно или на черновике) сложение, **ко второй строке прибавляем первую строку, уже умноженную на -2** :

$$\begin{array}{cccc} -2 & 4 & 2 & 18 \\ 2 & 1 & 3 & 13 \\ \hline 0 & -5 & 5 & -5 \end{array}$$



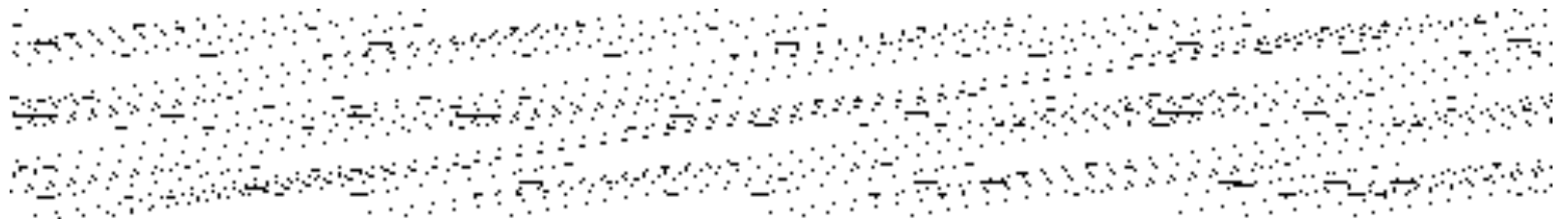
- Аналогично разбираемся с третьей строкой (3, 2, -5, -1). Чтобы получить на первой позиции ноль, нужно к третьей строке прибавить первую строку, умноженную на -3.



- Далее нужно получить единицу на следующей «ступеньке»:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 9 \\ 0 & -5 & 5 & -5 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right)$$

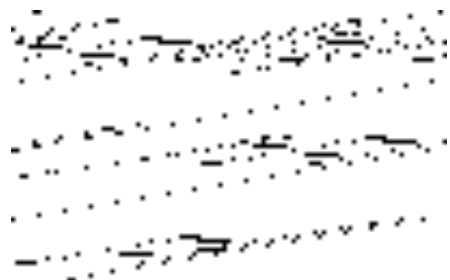
- В данном примере это сделать легко, вторую строку делим на -5 (поскольку там все числа делятся на 5 без остатка). Заодно делим третью строку на -2 , ведь чем меньше числа, тем проще решение:



- Для этого к третьей строке прибавляем вторую строку, умноженную на -2 :



- В результате элементарных преобразований получена эквивалентная исходной система линейных уравнений:



- Теперь в действие вступает обратный ход метода Гаусса. Уравнения «раскручиваются» снизу вверх.
- В третьем уравнении у нас уже готовый результат: $z=4$
- Смотрим на второе уравнение: $y-z=1$.

$$y-4=1$$

$$y=5$$

- Значение «зет» уже известно, таким образом:

$$x+2*5-4=9$$

$$x=3$$

Ответ: (3;5;4)