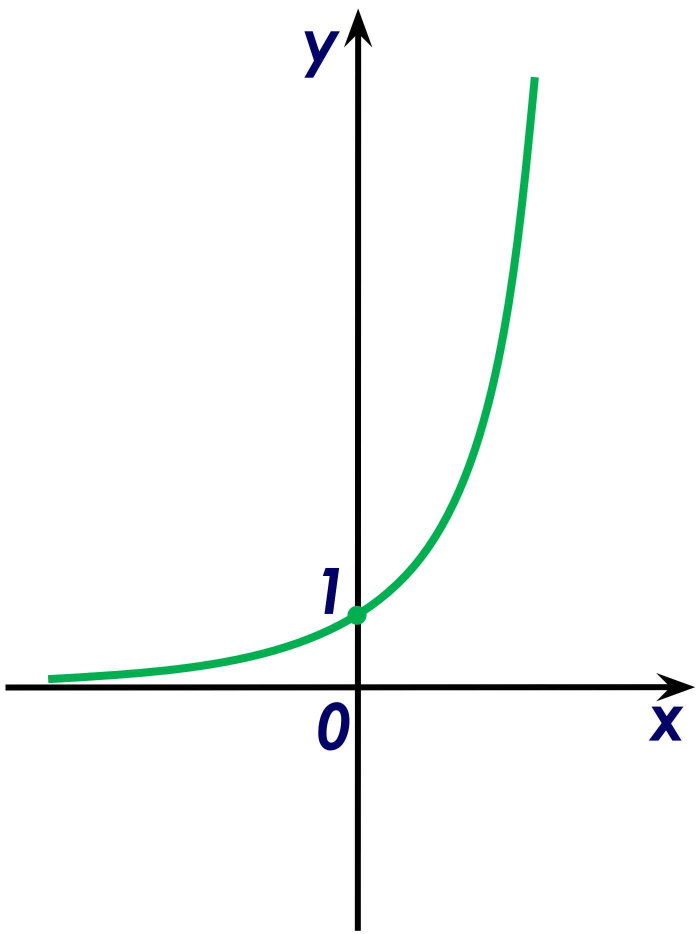
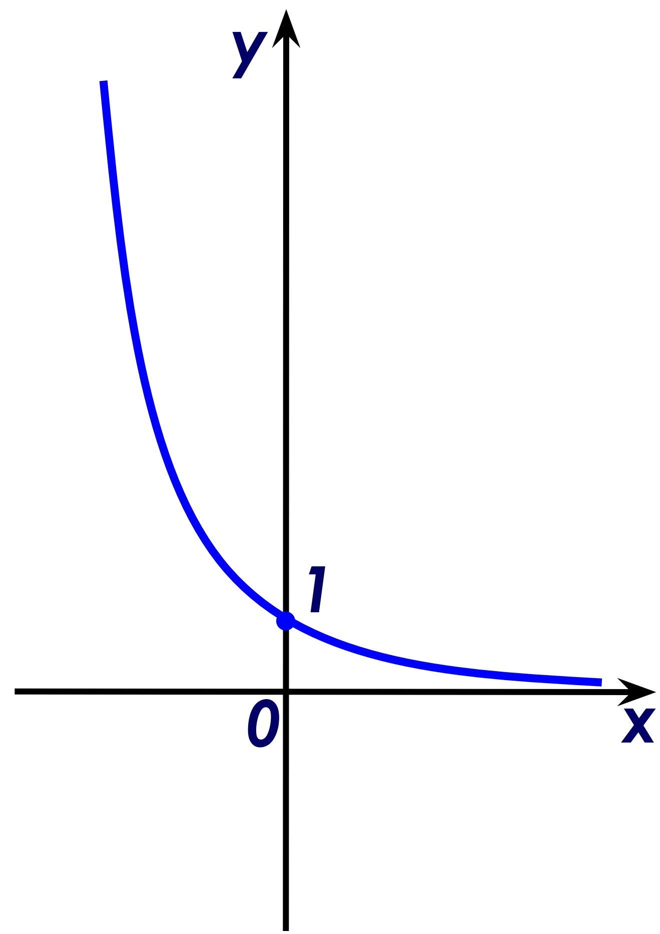
График показательной функции

$y = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

$y = a^x$, $a > 1$



$y = a^x$, $0 < a < 1$



Показательные уравнения

Уравнения вида $a^{f(x)} = a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют показательными уравнениями

$$\boxed{a^{f(x)} = a^{h(x)}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{f(x) = h(x)}$$

Методы решения показательных уравнений:

1. Функционально-графический метод.
2. Метод уравнивания показателей.
3. Метод введения новой переменной.

Показательные уравнения. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4}=64$$

$$2^{2x-4}=2^6$$

$$2x-4=6$$

$$x=5$$

$Ответ: 5$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5}=\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

$$2x-3,5=0,5$$

$$x=2$$

$Ответ: 2$

Пример 3

$$5^{x^2-3x}=5^{3x-8}$$

$$x^2-3x=3x-8$$

$$x^2-6x+8=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=2, \\ x_2=4 \end{array}\right.$$

$Ответ: 2;\ 4$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 4

$$4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$$

$$\left(2^2\right)^x + 2\cdot 2^x - 24 = 0$$

$$\left(2^x\right)^2 + 2\cdot 2^x - 24 = 0$$

$Пусть \quad 2^x = t, \ где \ t > 0 \ тогда$

$$t^2 + 2t - 24 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = -6, \\ t_2 = 4 \end{array}\right.$$

$t_1 = -6 \ не\ уд-ет \ условию \ t > 0$

$Вернемся \ к \ исходной \ переменной$

$$2^x = 4$$

$$x = 2$$

$Ответ : 2$

Показательные уравнения. Примеры

Пример 5 (однородное уравнение)

$$5^{2x+1} - 13\cdot 15^{x} + 54\cdot 9^{x-1} = 0$$

$$5\cdot 5^{2x} - 13\cdot 15^{x} + 54\cdot \frac{9^{x}}{9} = 0$$

$$5\cdot 5^{2x} - 13\cdot 15^{x} + 6\cdot 9^{x} = 0$$

Разделим на 9^{x}, *тогда*

$$\frac{5\cdot 5^{2x}}{9^{x}} - \frac{13\cdot 15^{x}}{9^{x}} + \frac{6\cdot 9^{x}}{9^{x}} = 0$$

$$5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{2x} - 13\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^{x} + 6 = 0$$

Пусть $\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = t$, *где* $t > 0$, *тогда*

$$5t^{2} - 13t + 6 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} t_1 = \frac{3}{5}, \\ t_2 = 2 \end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{x} = \frac{3}{5} \quad \text{или} \quad \left(\frac{5}{3}\right)^{x} = 2$$

$$x = -1 \qquad\qquad x = \log_{\frac{5}{3}} 2$$

Ответ: $-1;\ \log_{\frac{5}{3}} 2.$

Показательные неравенства

Неравенства вида $a^{f(x)} > a^{h(x)}$, где $a \neq 1$, $a > 0$ называют **показательными неравенствами**

$$a^{f(x)} > a^{g(x)}$$

$a > 1$ | $0 < a < 1$

$f(x) > g(x)$ | $f(x) < g(x)$

или

$$a^{f(x)} > a^{g(x)} \Leftrightarrow (a - 1)(f(x) - g(x)) > 0$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 1

$$2^{2x-4} > 64$$

$$2^{2x-4} > 2^6$$

т.к. функция $y = 2^t$ *монотонно возрастает на* R*, то*

$$2x - 4 > 6$$

$$x > 5$$

Ответ: $(5; +\infty)$

Пример 2

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}$$

т.к. функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ *монотонно убывает на* R*, то*

$$2x - 3,5 > 0,5$$

$$x > 2$$

Ответ: $(2; +\infty)$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x$$

$$2^{3x} + 2^x \cdot 3^{2x} > 2 \cdot 3^{3x} \quad \Big| : \left(3^{3x}\right), \ т.к. \ 3^{3x} > 0$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{3x}} + \frac{2^x \cdot 3^{2x}}{3^{3x}} > \frac{2 \cdot 3^{3x}}{3^{3x}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + \left(\frac{2}{3}\right)^x > 2$$

$$Пусть \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x = t, \ где \ t > 0$$

$$t^3 + t - 2 > 0$$

$$t^3 + t - 2 = t^3 + t - 1 - 1 = t^3 - 1 + t - 1 = (t-1)\left(t^2 + t + 2\right)$$

$$т.к. \ t^2 + t + 2 > 0 \ для \ любых \ t, \ то \ t - 1 > 0$$

$$t > 1$$

Показательные неравенства. Примеры

Пример 4

Вернемся к исходной переменной :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > 1$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x > \left(\frac{2}{3}\right)^0,$$

т.к. $a = \frac{2}{3} < 1$, то ф-ция $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ убывает на R

$$x < 0$$

Ответ : $(-\infty;\ 0)$.

§ 13. Показательные неравенства

Решите неравенство:

13.1. а) $2^x \geqslant 4$; б) $2^x < \frac{1}{2}$; в) $2^x \leqslant 8$; г) $2^x > \frac{1}{16}$.

13.2. а) $3^x \leqslant 81$; в) $5^x > 125$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^x > \frac{1}{27}$; г) $(0{,}2)^x \leqslant 0{,}04$.

13.3. а) $3^{2x-4} \leqslant 27$; в) $5^{4x+2} \geqslant 125$;

б) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x+6} > \frac{4}{9}$; г) $(0{,}1)^{5x-9} < 0{,}001$.

13.4. а) $7^{2x-9} > 7^{3x-6}$; в) $9^{x-1} \geqslant 9^{-2x+8}$;

б) $0{,}5^{4x+3} \geqslant 0{,}5^{6x-1}$; г) $\left(\frac{7}{11}\right)^{-3x-0{,}5} < \left(\frac{7}{11}\right)^{x+1{,}5}$.

○**13.5.** а) $4^{5x-1} > 16^{3x+2}$; в) $11^{-7x+1} \leqslant 121^{-2x-10}$;

б) $\left(\frac{1}{7}\right)^{-3x+1} \geqslant \left(\frac{1}{49}\right)^{x+3}$; г) $0{,}09^{5x-1} < 0{,}3^{x+7}$.

○**13.6.** а) $2^{3x+6} \leqslant \left(\frac{1}{4}\right)^{x-1}$; в) $25^{-x+3} \geqslant \left(\frac{1}{5}\right)^{3x-1}$;

б) $\left(\frac{7}{12}\right)^{-2x+3} > \left(\frac{12}{7}\right)^{3+2x}$; г) $\left(\frac{5}{3}\right)^{2x-8} < \left(\frac{9}{25}\right)^{-x+3}$.