Матричные преобразования трехмерного пространства

Проекции

преобразуют точки из координатной системы размерности n в точки координатной системы размерности меньше n.

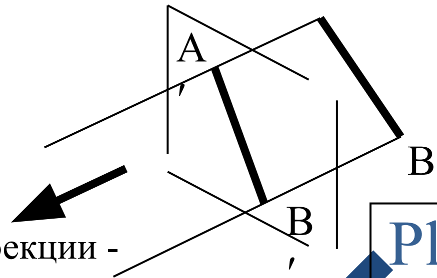
Проекции

1. строятся с помощью прямых линий – *проекторов* (*лучи проекции*), пересекающих поверхность проекции;
2. оперируют **с плоскими проекциями**, т.е. поверхность проекции – плоскость (2D-проекции);
3. используют **геометрические проекции**, т.е. проекторы - прямые лучи.

Исключение – Image-based rendering.

Под проекциями будем подразумевать **геометрические плоские проекции.**

Классификация проекций

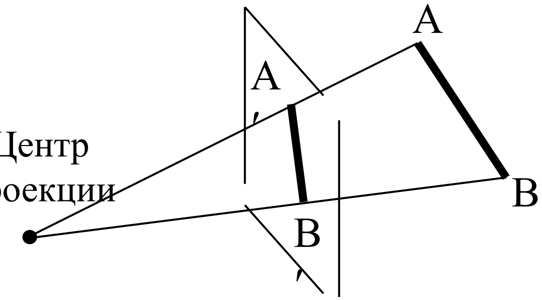


Центр проекции - в бесконечности

ПРОЕКЦИИ

Planar Geometric Projections

Центр проекции



Параллельные проекции

Parallel

Ортогональные

Orthographic

- вид сверху — Top
- вид слева — Side
- фронтальный — Front

Косоугольные

Oblique

- изометрия — Cavalier
- диметрия — Cabinet

Аксонометрические

Axonometric

- изометрия — Isometric
- диметрия
- триметрия

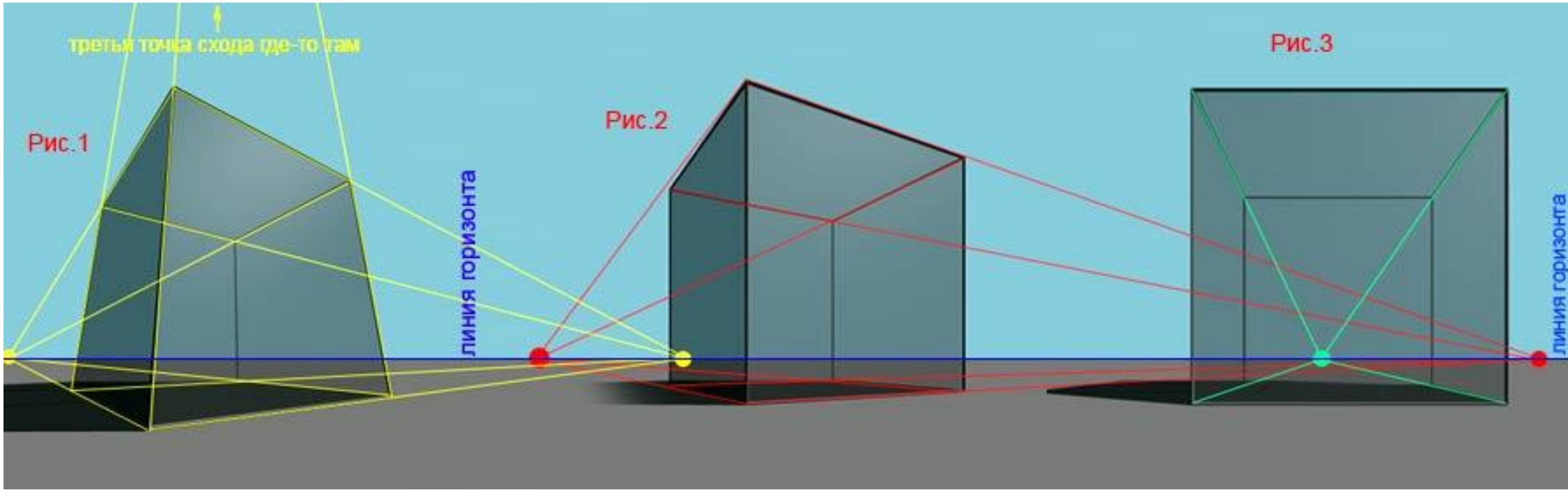
Центральные проекции

Perspective

- одноточечные — 1 point
- двухточечные — 2 point
- трёхточечные — 3 point

Центральные проекции

Центральные проекции



Определяются плоскостью проекции и центром проекции.

Визуальный эффект – **перспективное искажение** (**перспектива**).

Размер проекций объектов сцены обратно пропорционален расстоянию между объектом и центром проекции.

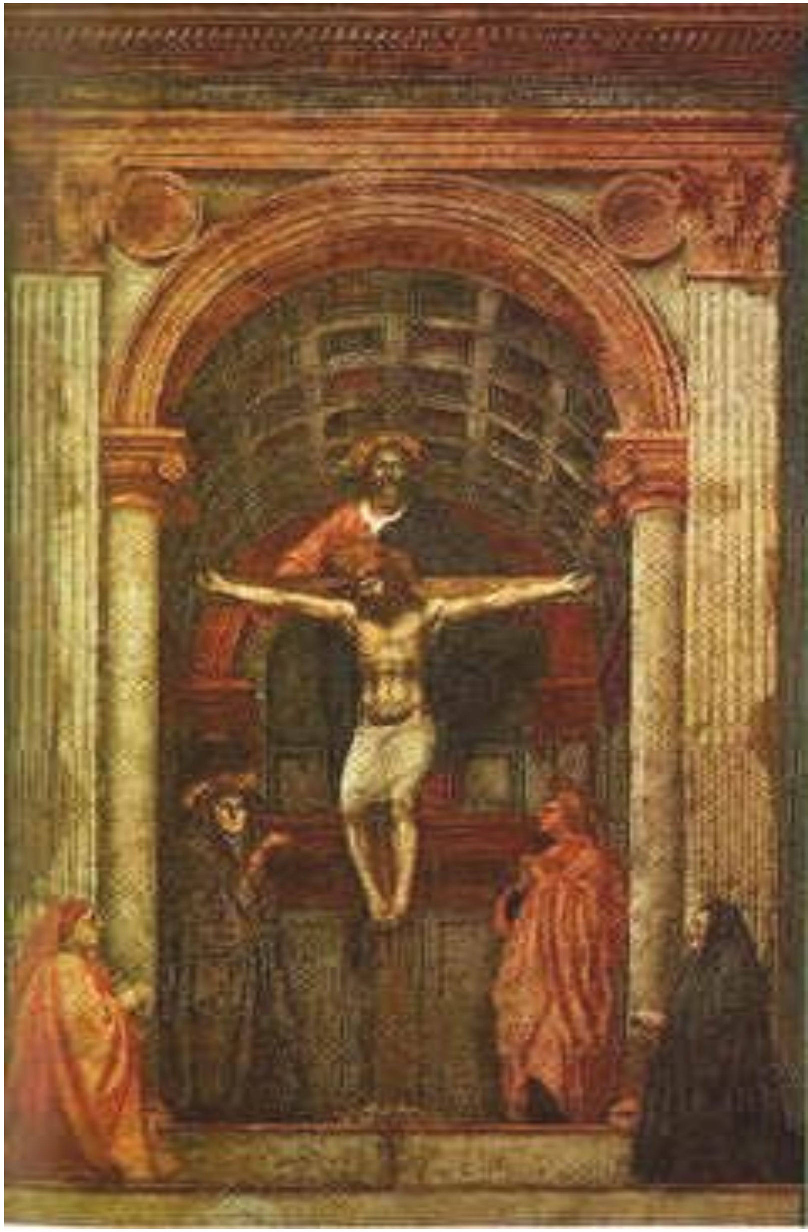
Изображение реалистично.

Центральная проекция **не используется** для измерений:

– параллельные линии не параллельны в проекции;

–углы сохраняются на плоскостях, параллельных плоскости проекции;

Перспектива (Perspective)



Первое изображение
с перспективой –
"Троица" Мазаччо, 1427г.

Центральные проекции

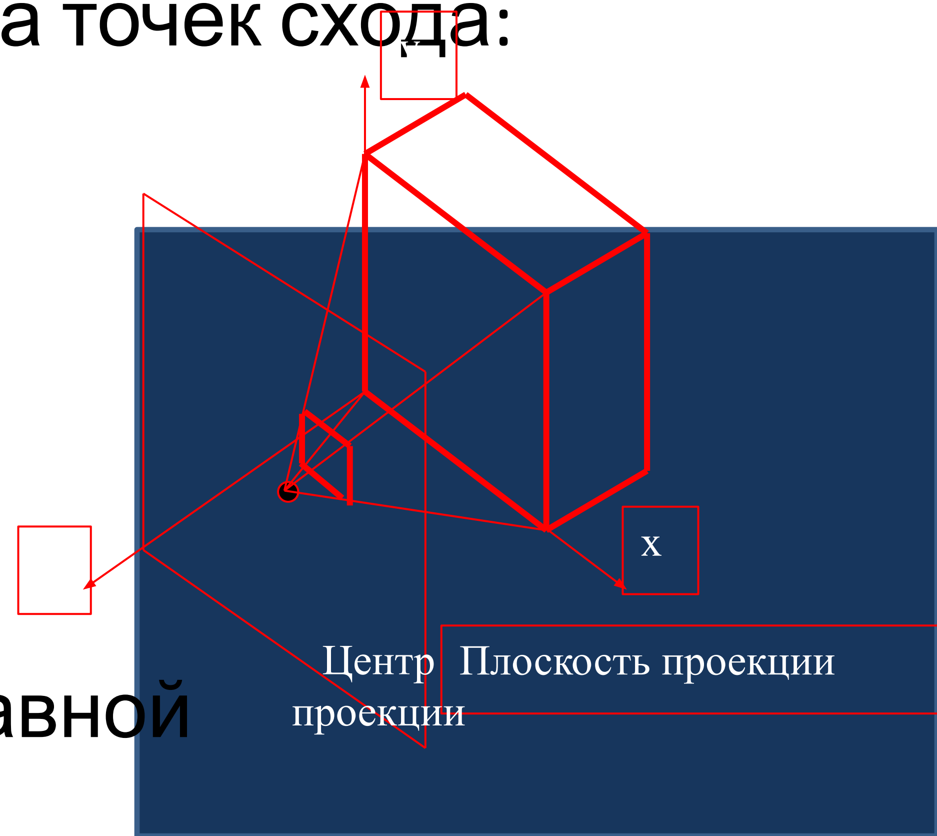
Центральные проекции любой совокупности параллельных прямых, не параллельные проекционной плоскости, будут сходиться в **центре проекции** (**точке схода**, vanishing point).

Центральные проекции классифицируют в зависимости от количества точек схода:

- 1-точечная проекции,
- 2-точечная проекции,
- 3-точечная проекции.

Количество осей, пересекающих проекцию, соответствует количеству центров проекции.

Линии параллельны главной оси.

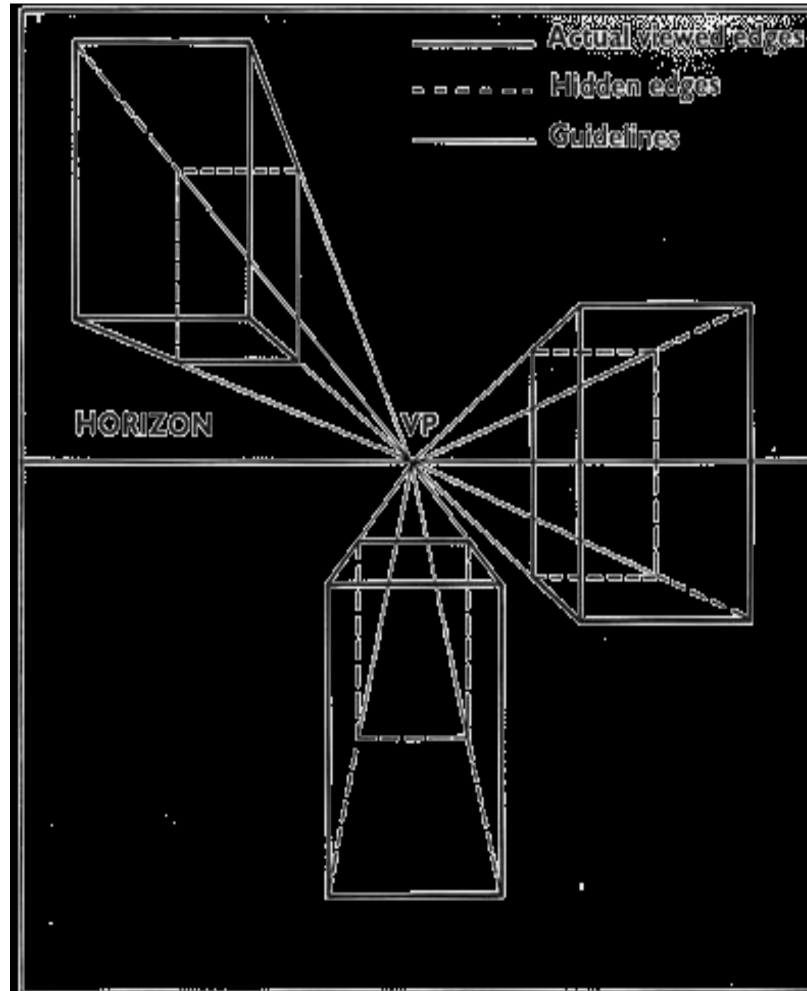


1-точечная проекция

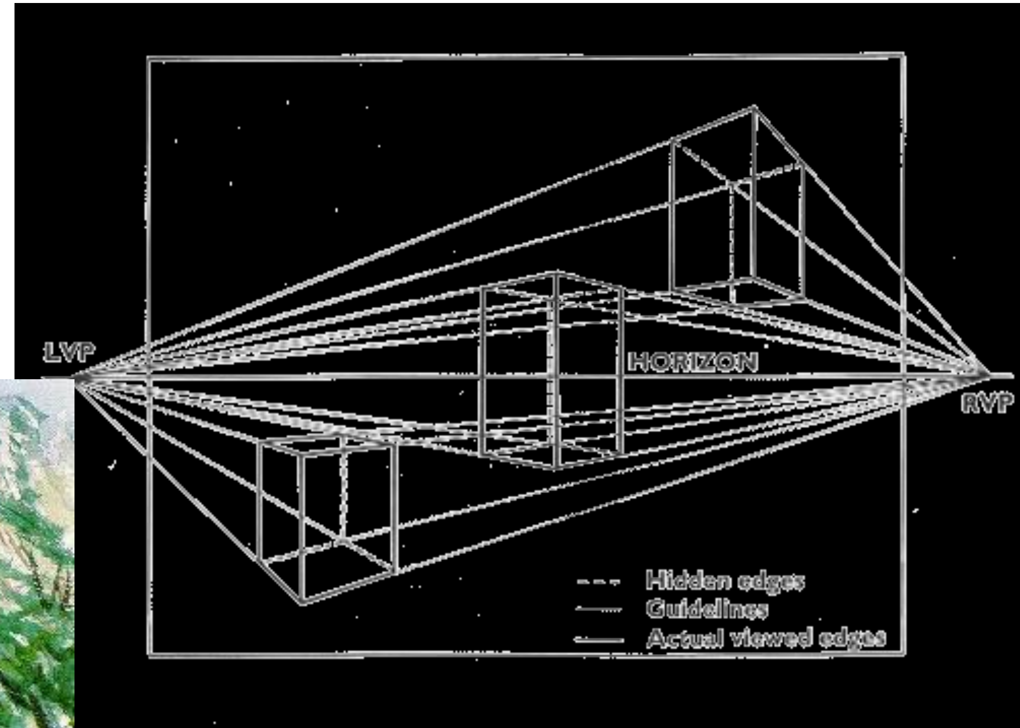
Плоскость проекции пересекается только с одной осью.

Точка схода в однородных координатах имеет w = 0 (x,y,0).

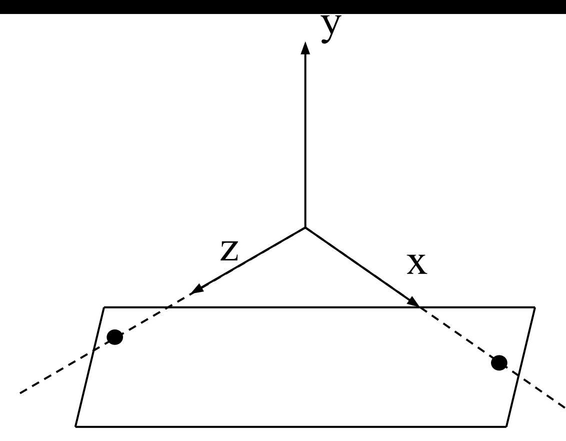
Площадь святого Марка (Венеция), Canaletto 1735



2-х точечная проекция



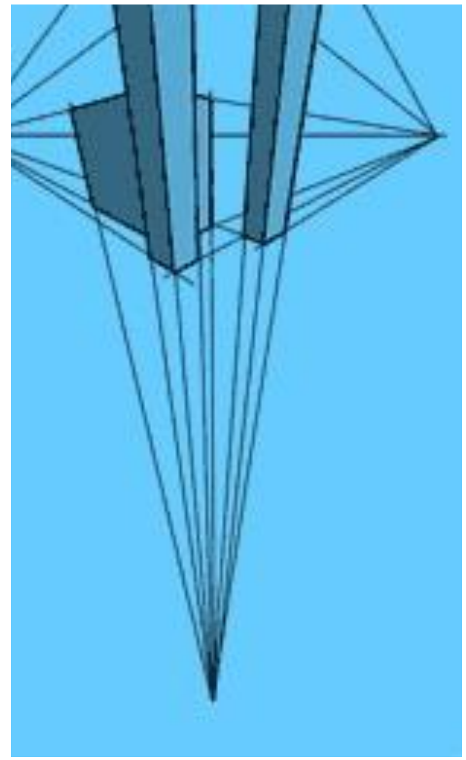
Edward Hopper *The Mansard Roof*
1923 г.

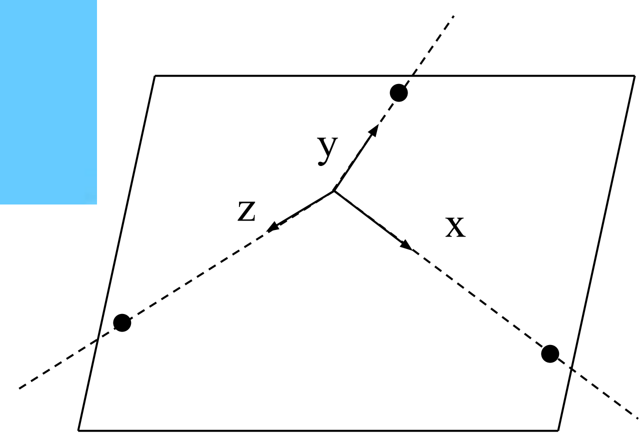


Плоскость проекции

3-х точечная проекция

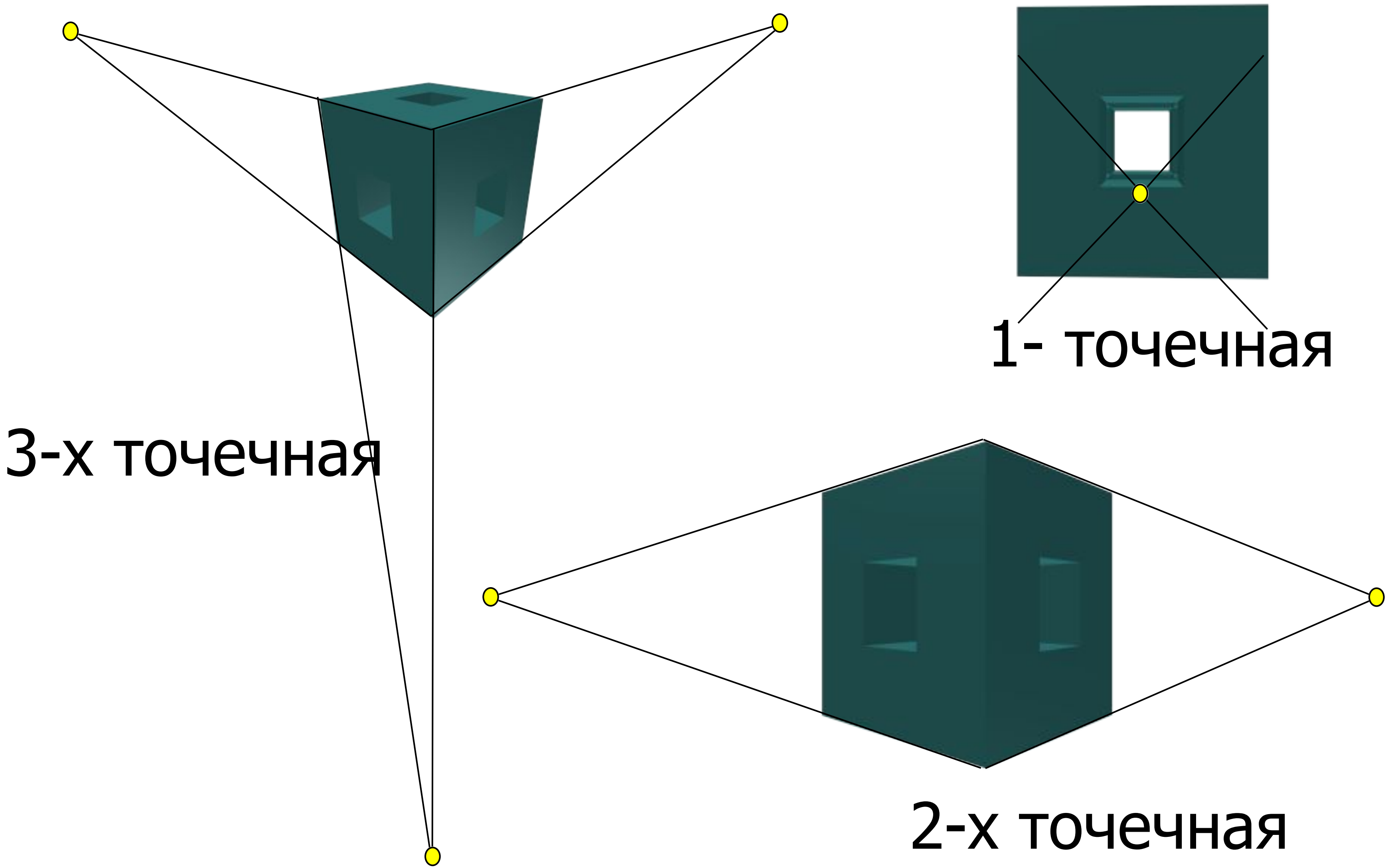
Georgia O'Keefe «*City Night*»,1926 г.





Плоскость проекции

Центральные проекции



Параллельные проекции

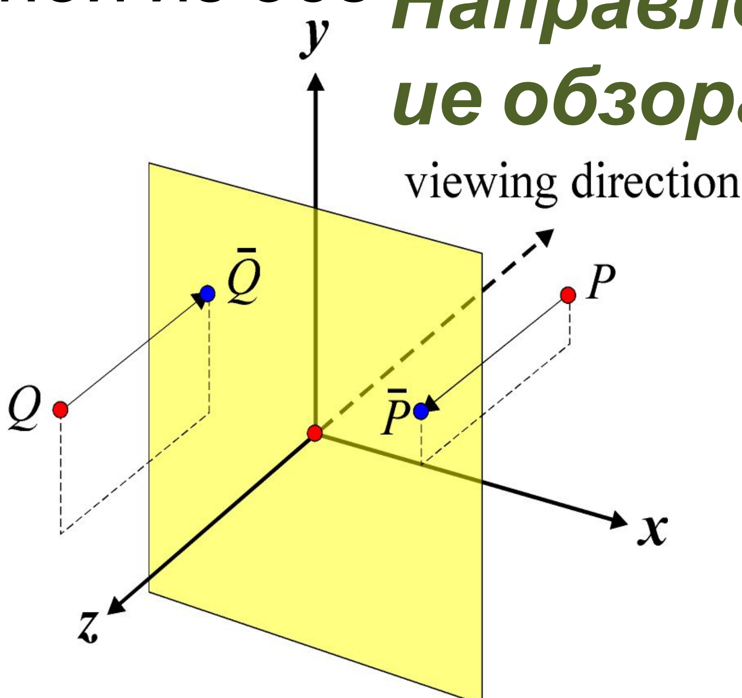
Ортогональные проекции

Строится параллельным проецированием на плоскость отображения.

Проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций.

Обычно плоскость отображения двигается по одной из осе

Направлен ие обзора



Приме
р

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \bar{P} = \mathbf{M}P \ \text{ãäå} \ \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ортогональные проекции

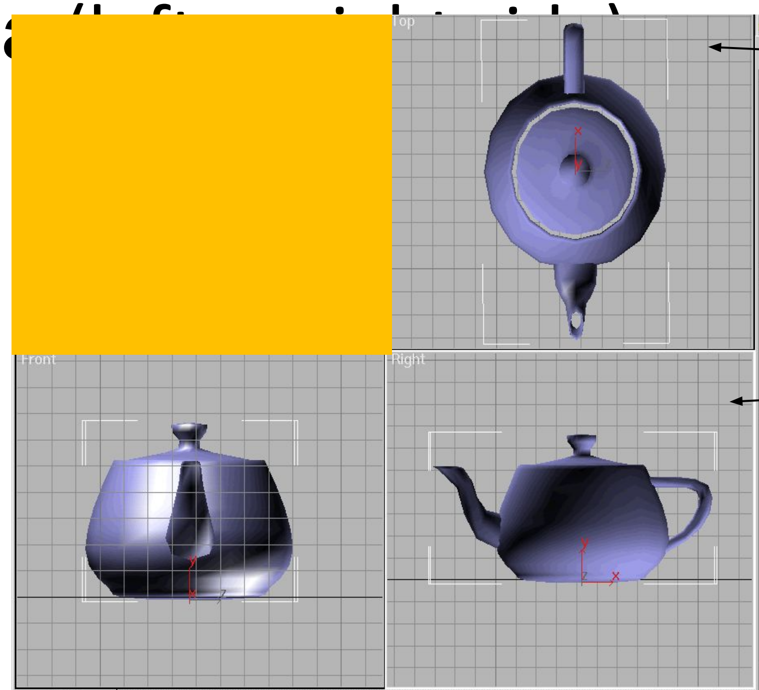
Множественные проекции (Multiple Projections)

Ортогональные проекции часто используются для построения множественных проекций объекта:

– вид сверху или план (plan (top) view),

– фронтальный вид (front view),

– вид слева



Аксонометрические проекции

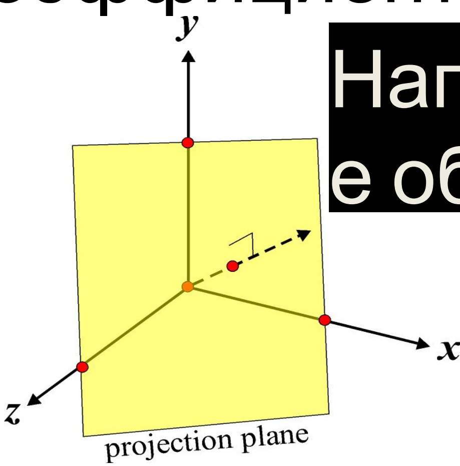
Проекционные плоскости не перпендикулярны осям координат.

Одновременно видны несколько поверхностей объекта.

Используется для измерений:

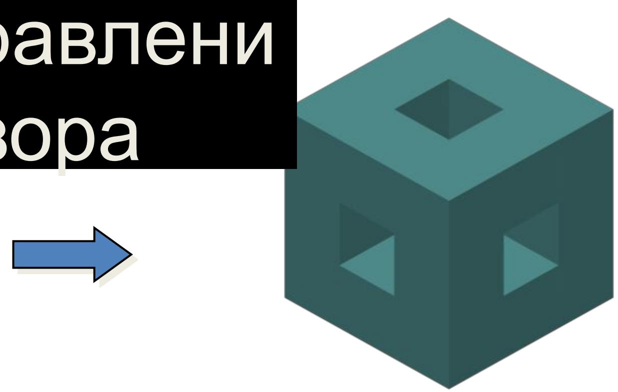
- углы изменяются;
- сохраняется параллельность прямых.

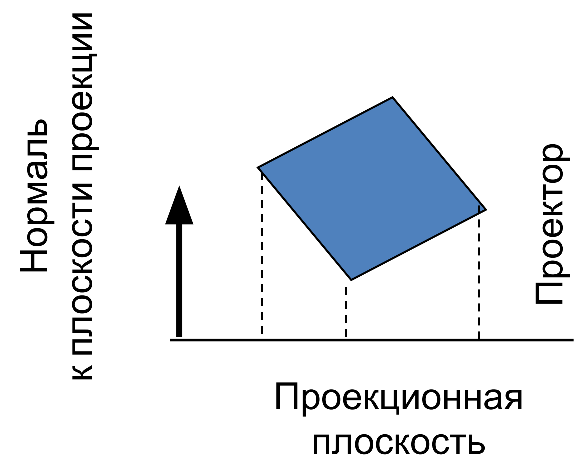
Расстояния можно измерить вдоль каждой из координатных осей (с учётом масштабирующих коэффициентов).



Направление обзора

$$x + y + z = 1$$



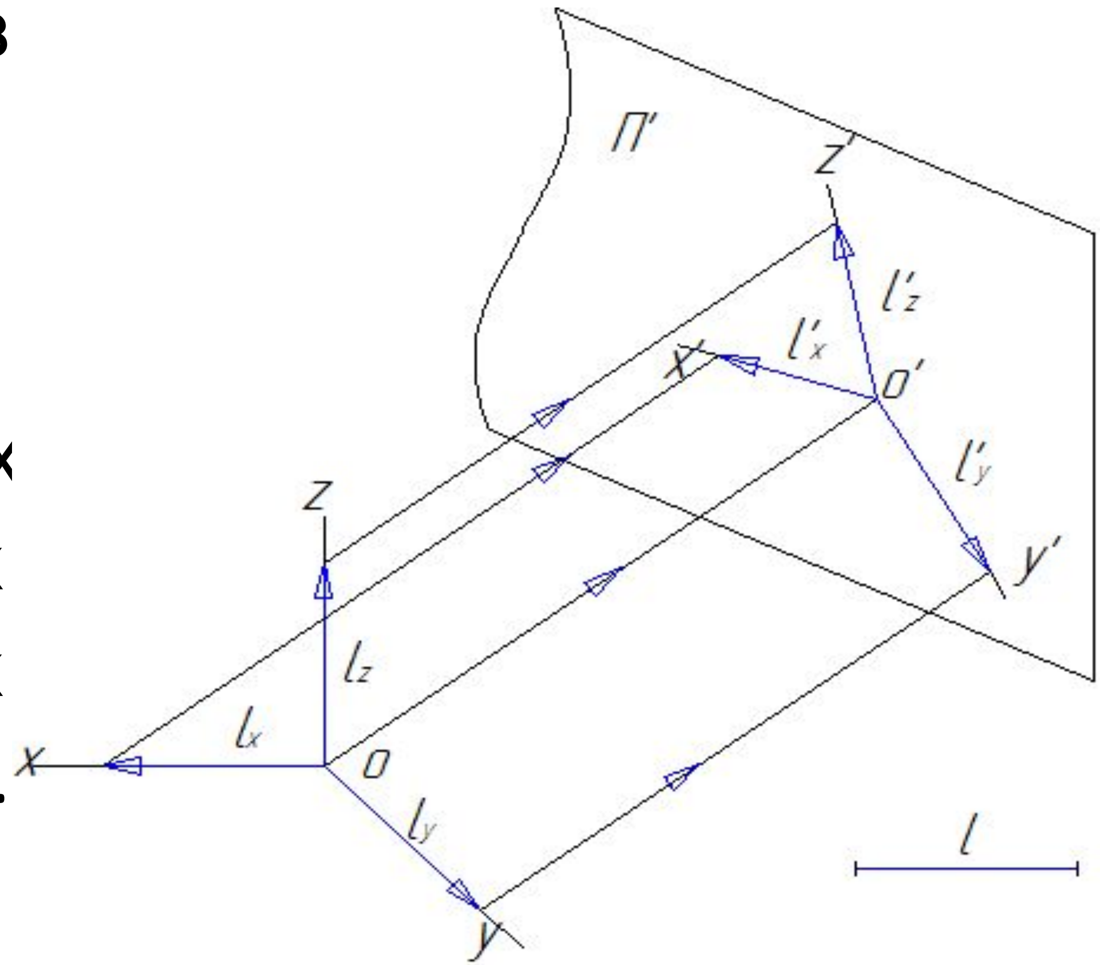


Ортогональные проекции

Аксонометрические проекции

Основная теорема аксонометрии:

теорема Польке: «три отрезка произвольной длины, лежащие в 1-й плоскости и выходящие из одной точки под произ углами друг к другу, представляют собой параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на координатных осях от начала координат».



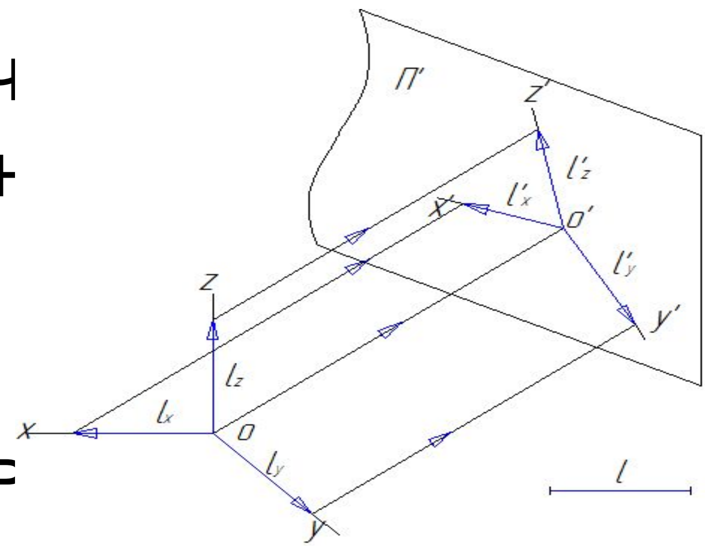
Ортогональные проекции

Аксонометрические проекции

Согласно этой теореме:

- любые три прямые в плоскости, исходящие из одной точки и не совпадающие между собой, можно принять за аксонометрические оси;
- любые отрезки произвольной длины на этих прямых, отложенные от точки их пересечения, можно принять за аксонометрические масштабы.

Эта система аксонометрич
масштабов является параллельн
проекцией некоторой
прямоугольной системы
координатных осей и натуральнь
масштабов

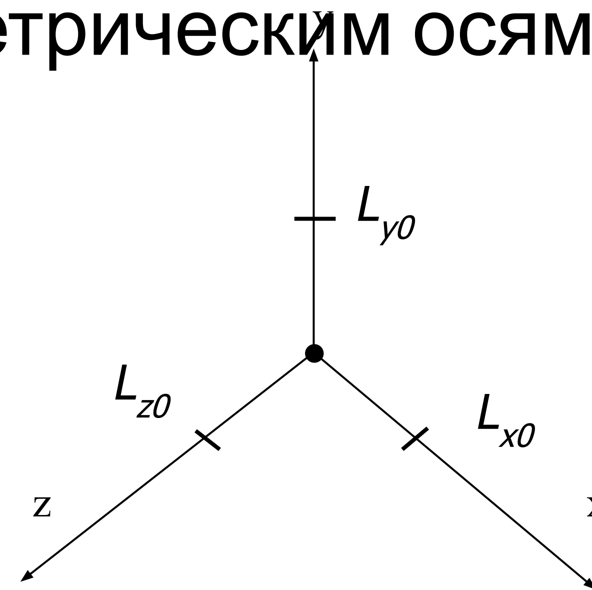


Аксонометрические проекции

Отношение единичных отрезков на аксонометрических осях к единичным отрезкам на координатных осях называется **коэффициентом искажения** (**коэффициентом масштабирования**) по аксонометрическим осям.

Коэффициенты искажения:

$$K_x = L_{x0} / L_x = p,$$
$$K_y = L_{y0} / L_y = q,$$
$$K_z = L_{z0} / L_z = r.$$



Существует много вариантов аксонометрических проекций, отличающихся направлениями аксонометрических осей и величин искажения по данным осям.

Аксонометрические проекции

Если коэф. искажения по всем трём осям не равны
$p \neq q \neq r$, то проекция называется **триметрической**.

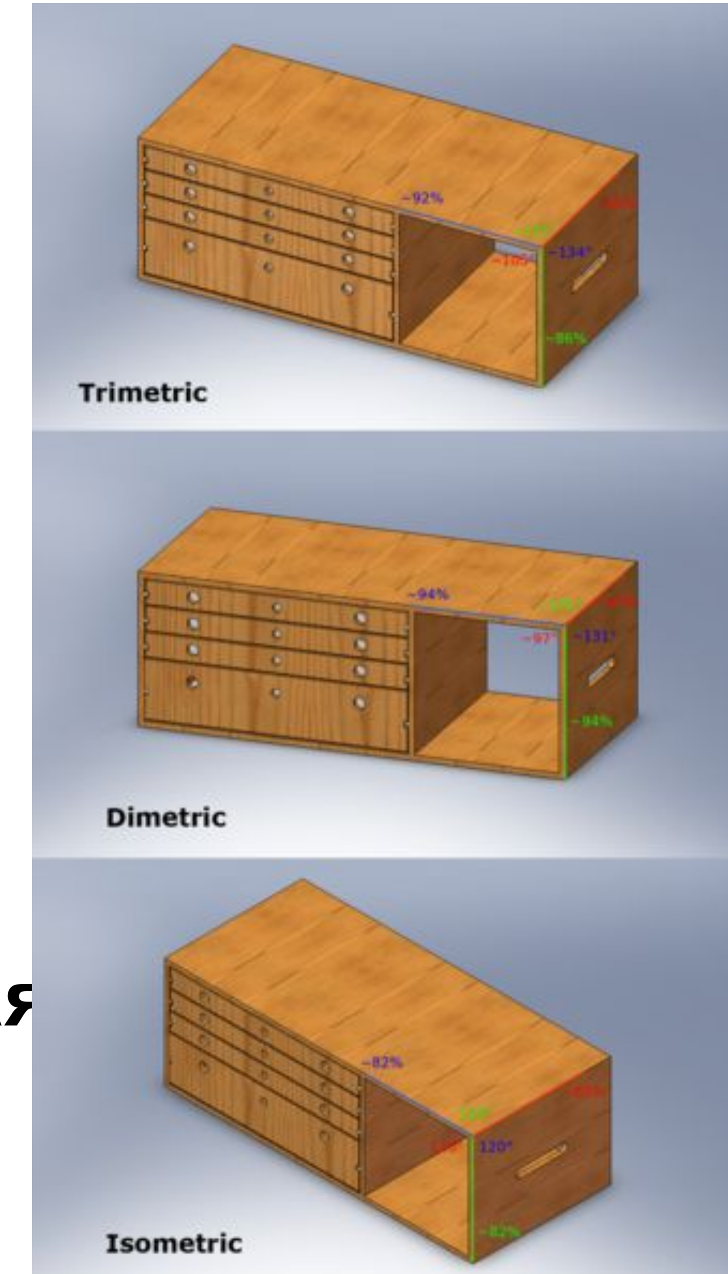
Если коэф. искажения по двум осям равны
$p = r$, $q = 1/2p$, то проекция называется **диметрической**.

Если коэф. искажения по всем 3 осям равны
$p = q = r$, то проекция является **изометрической**.

Проекция является **изометрической**, если плоскость проекции пересекает оси на одинаковом расстоянии от центра координат.

В практике построения аксонометрических изображений применяют определенные комбинации направлений аксонометрических осей и аксонометрических масштабов

Аксонометрические проекции



$p \neq q \neq r$, **триметрическая** проекция

$p = r$, $q = 1/2p$, **диметрическая** проекция

$p = q = r$, **изометрическая** проекция

Ортогональные проекции

Аксонометрические проекции

Изометрическая прямоугольная проекция

Наиболее распространенный случай аксонометрических проекций.

Нормаль плоскости проекции образует равные углы с каждой из координатных осей – описывается вектором (d_x, d_y, d_z), где $|d_x| = |d_y| = |d_z|$ Коэффициенты масштабирования по осям одинаковы: $\boldsymbol{p=q=r}$.

Измерения можно проводить по всем осям с одинаковым коэффициентом (изометрия).

Существует 8 направлений, удовлетворяющих данным условиям.

Аксонометрические проекции

Изометрическая прямоугольная проекция

Коэффициенты искажения:

$$\frac{|0_0 x|}{|0x|} = \cos\alpha = p \quad \frac{|0_0 y|}{|0y|} = \cos\beta = q \quad \frac{|0_0 z|}{|0z|} = \cos\gamma = r \quad (1)$$

По теореме синусов:

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1$

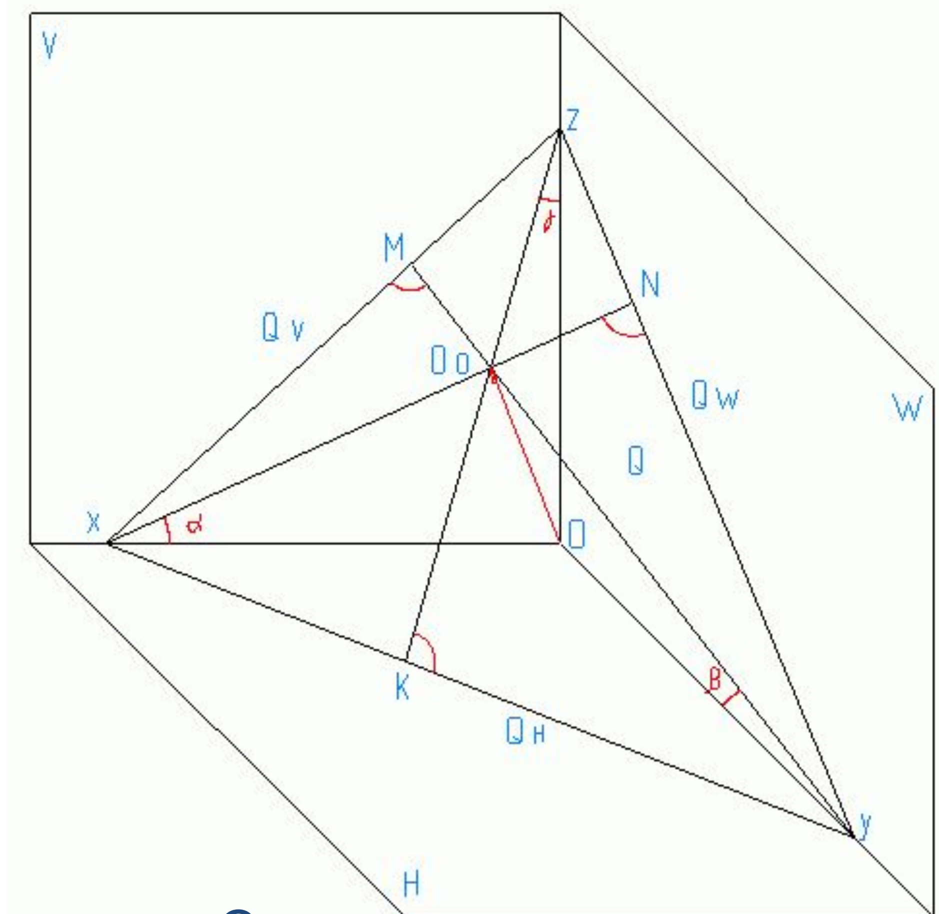
$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$1 - \cos^2\alpha + 1 - \cos^2\beta + 1 - \cos^2\gamma = 1$,

откуда

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$

$\mathbf{p^2 + q^2 + r^2 = 2}$



Ортогональные проекции

Аксонометрические проекции

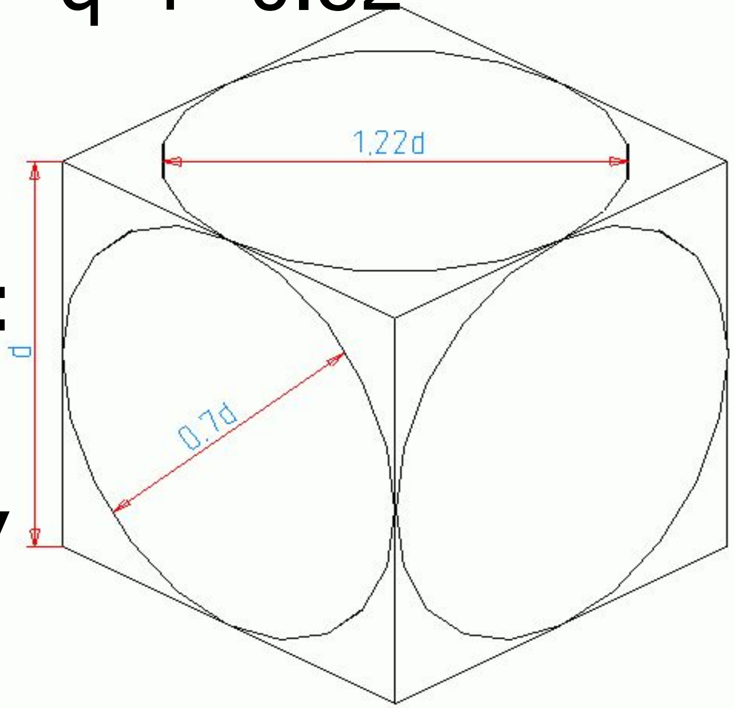
Изометрическая прямоугольная проекция

$p^2+q^2+r^2=2$ – для прямоугольной аксонометрии сумма квадратов коэффициентов искажения = 2.

Установим численные значения коэффициентов искажения для прямоугольной изометрии: $p=q=r$; $3p^2=2$; $p=q=r=0.82$

Для простоты **ГОСТ 2317-69** предлагает использовать коэффициенты искажения: $p=r=q=1$.

Получается проекция, увеличенная в **1.22** раза.



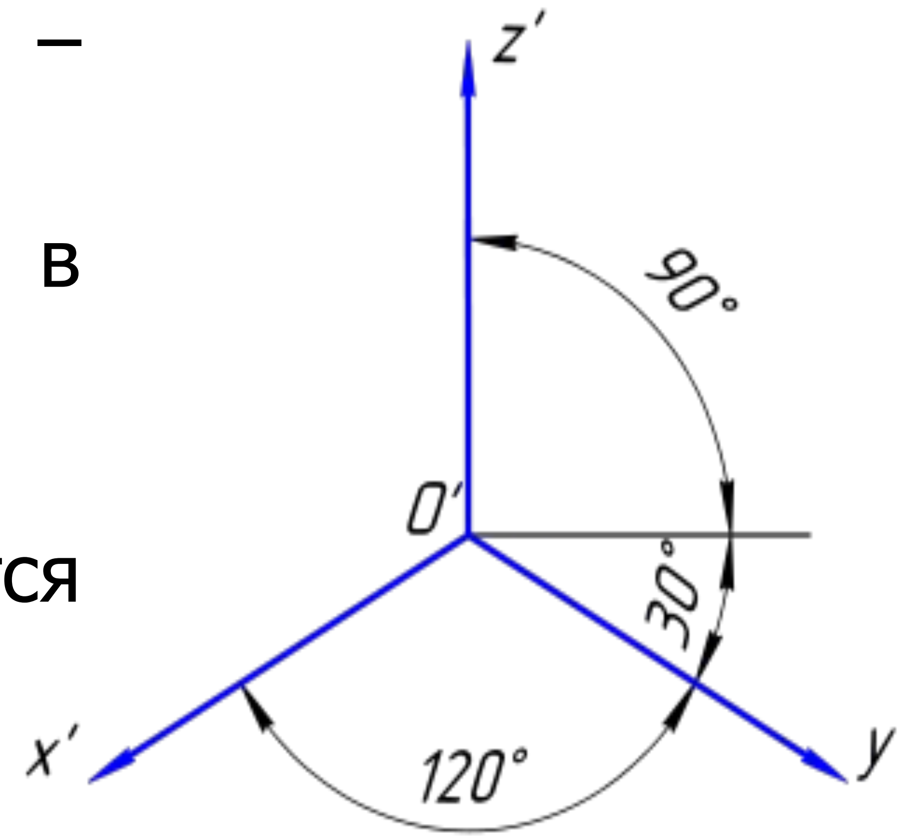
Аксонометрические проекции

Изометрическая прямоугольная проекция

Треугольник следов – равносторонний.

Угол между высотами в равностороннем треугольнике = 120°.

Ось z располагается вертикально.



Аксонометрические проекции

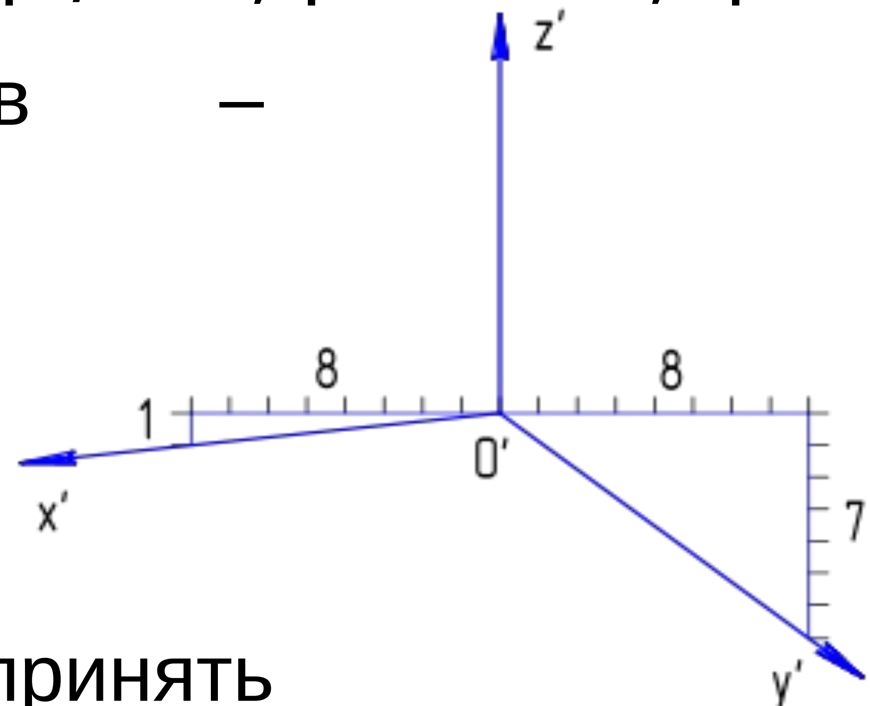
Диметрическая прямоугольная проекция

Для изометрии $p^2 + q^2 + r^2 = 2$.

Значения коэффициентов искажения для диметрии: $p=r=2q$; $2p^2+p^2/4=2$; $p=r=0.94$; $q=0.47$

Треугольник следов – равнобедренный.

Приближённо аксонометрические оси диметрической проекции можно построить, если принять tg 7°10'=1/8, а tg 41°25'=7/8.



Оси координат прямоугольной диметрической проекции.

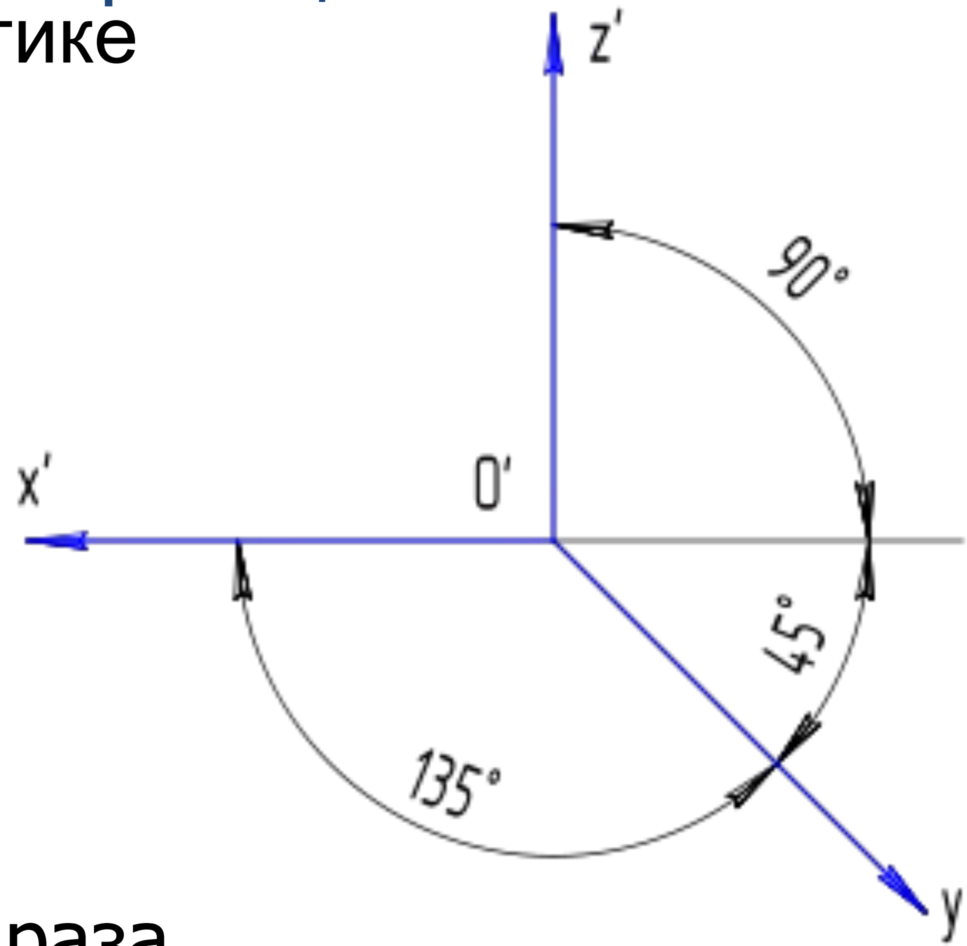
Аксонометрические проекции

Диметрическая прямоугольная проекция

На практике используют приведённые коэффициенты искажения

p=r=1; q=0,5.

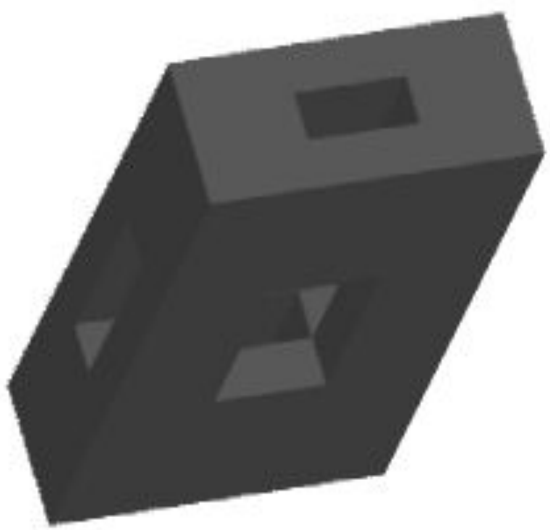
Тогда получается проекция, увеличенная в **1,06** раза.

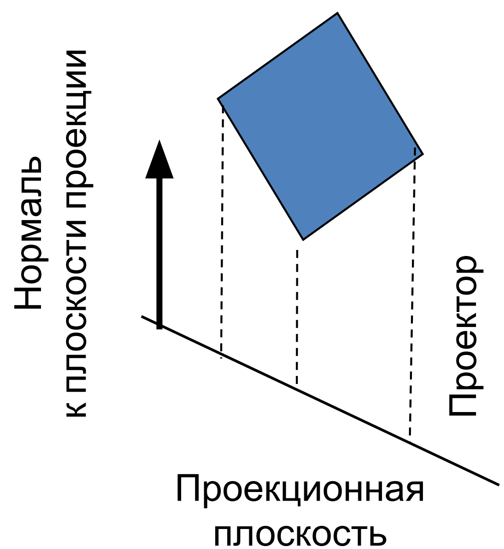


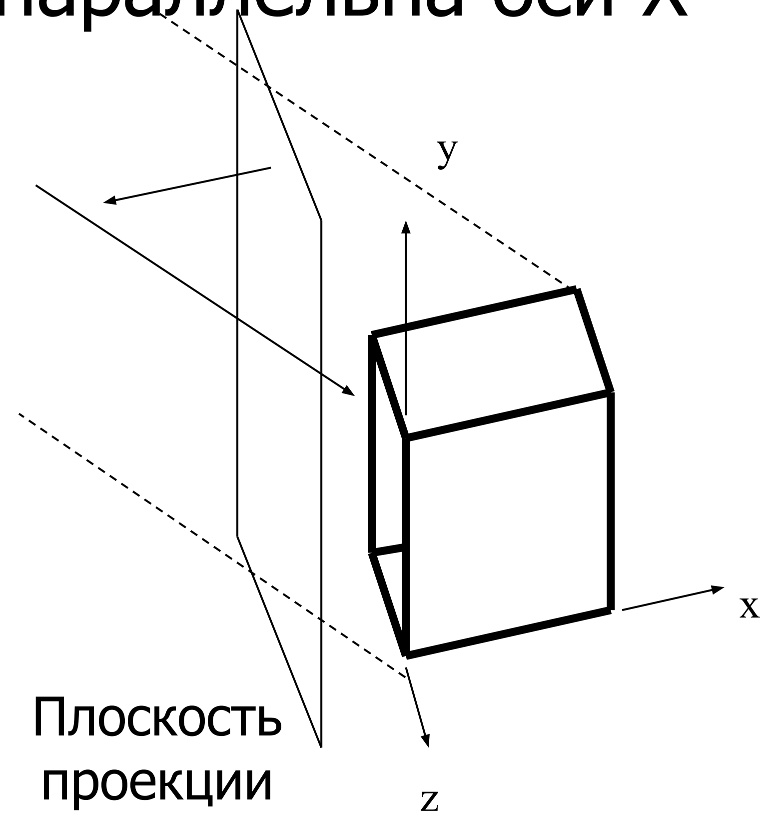
Косоугольные проекции

Лучи составляют с плоскостью проекции угол до 90°.

Нормаль плоскости параллельна оси X







Косоугольные проекции

Нормаль плоскости проекции не совпадает с направлением проецирующих лучей.

Плоскость проекции перпендикулярна одной из осей координат.

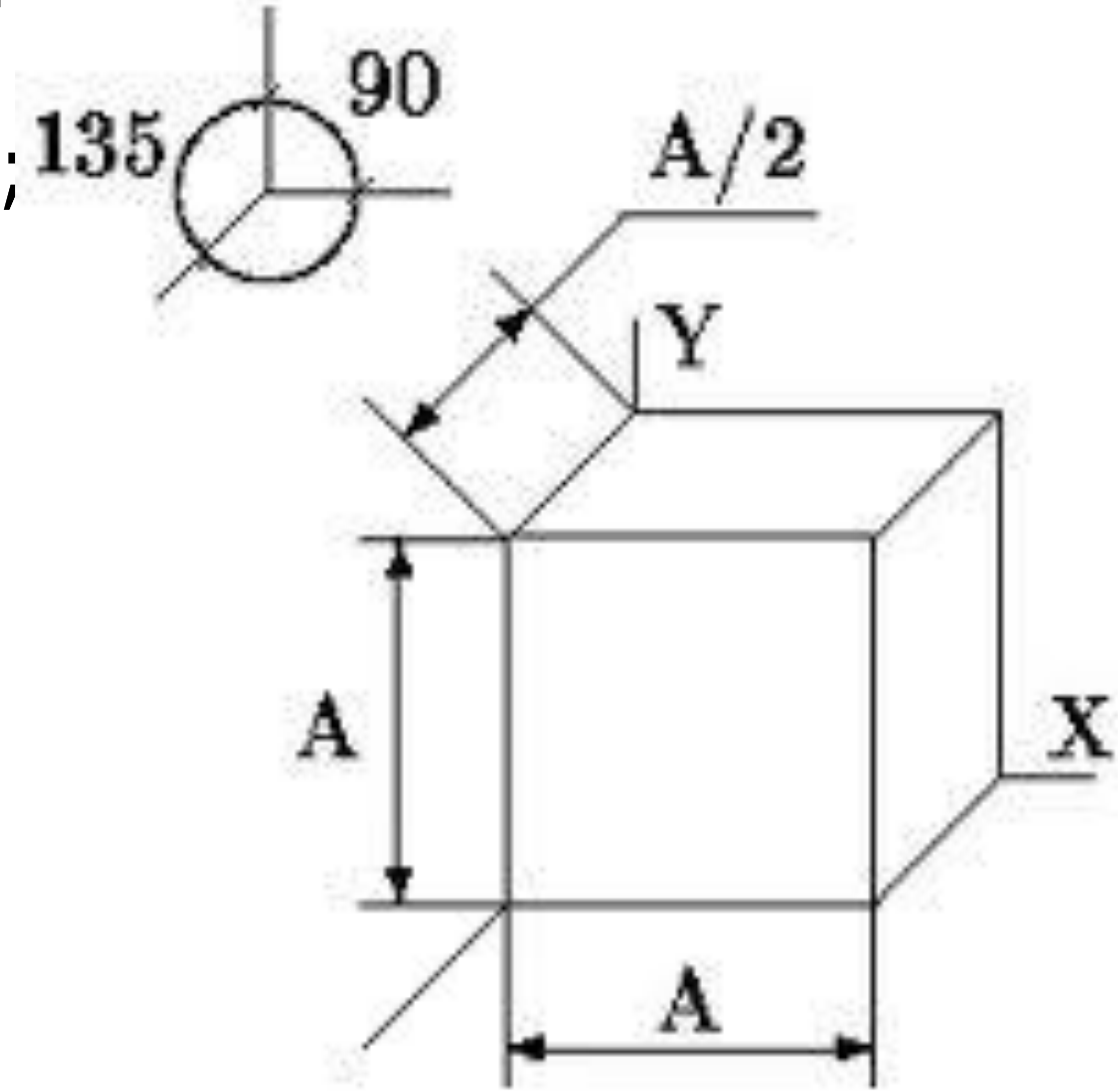
Результат проецирования фронтальной плоскости объекта позволяет проводить измерения углов и расстояний без искажений.

По проекциям других плоскостей можно измерять расстояния (с учётом коэффициента искажения, если он есть), но не углов!

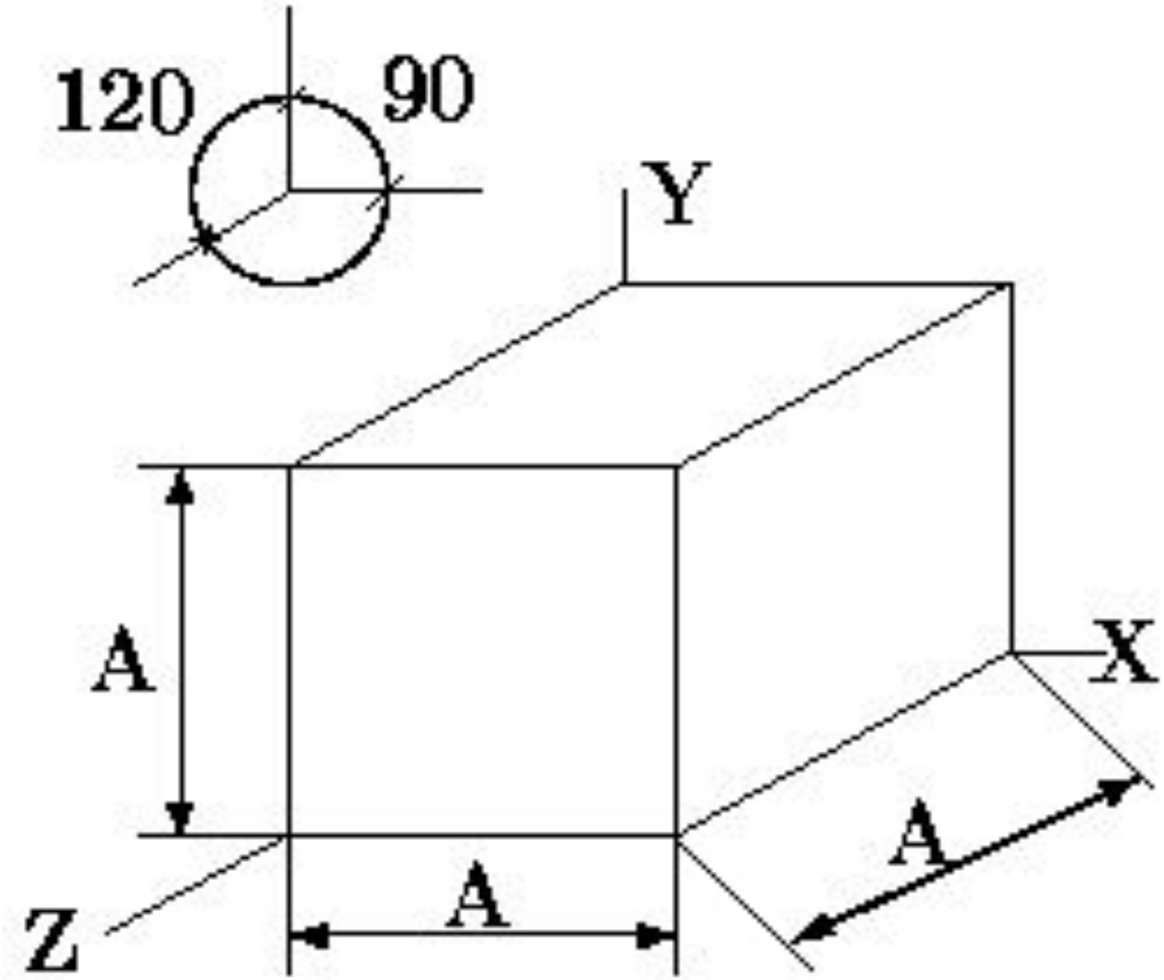
Косоугольная фронтальная диметрия (Cabinet)

$p = r = 1.0; q = 0.5;$

$\beta = \gamma = 135 ; \alpha = 90$



Косоугольная горизонтальная изометрия (Cavalier)



$p = r = q = 1.0;$

$\beta = \gamma = 120$; $\alpha = 90$

Проекции в однородных координатах

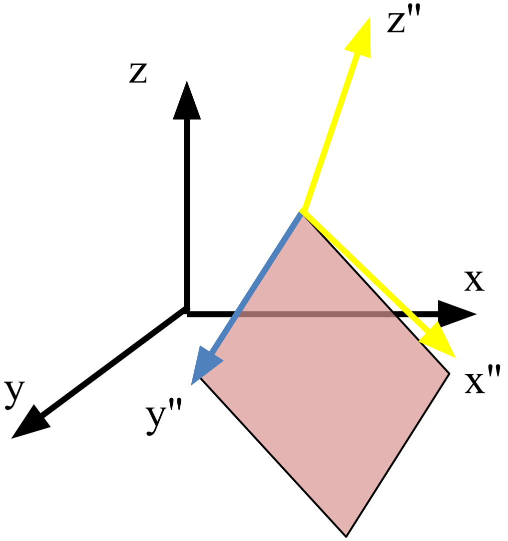
Аксонометрические проекции

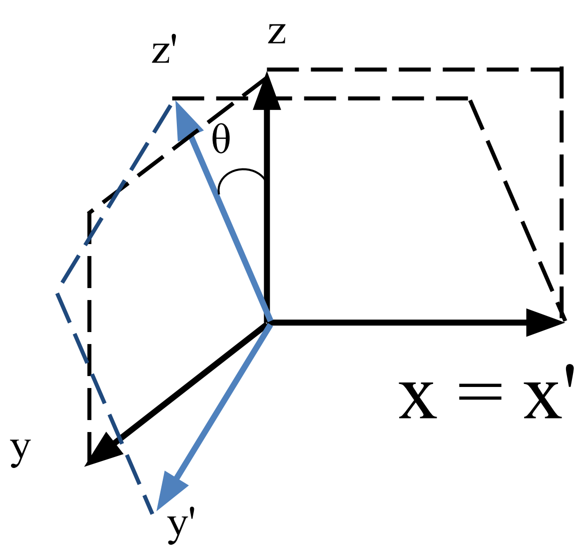
Аксонометрические проекции могут реализовываться с помощью 2-х поворотов объекта и ортогонального проецирования (переноса) на плоскость, что аналогично повороту в пространстве относительно произвольной оси:

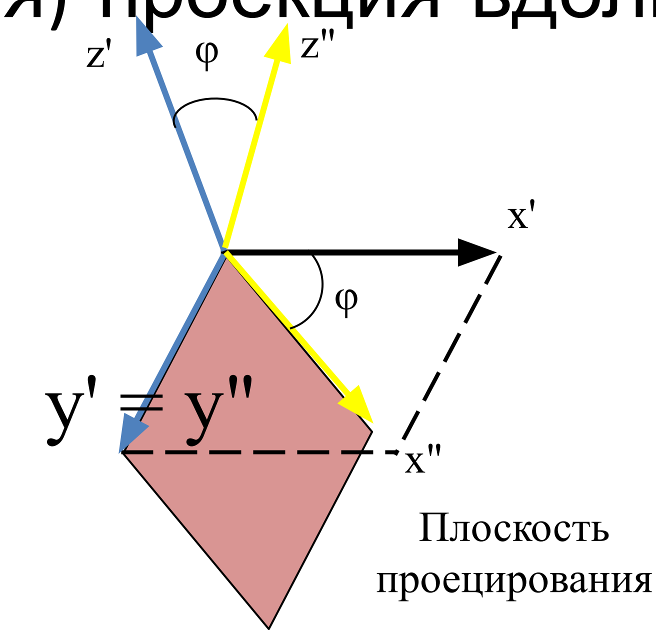
а) поворот относительно одной оси,

б) поворот относительно другой оси

в) параллельная (ортогональная) проекция вдоль третьей оси.







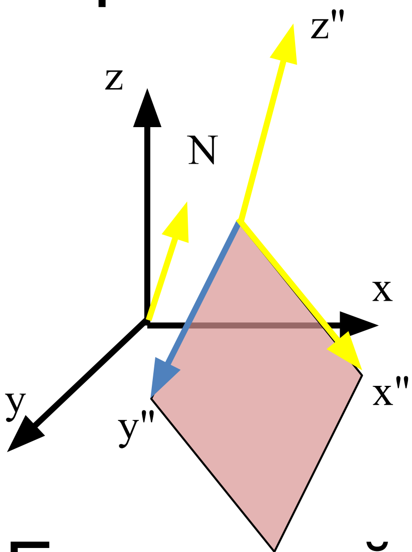
Аксонометрические проекции

$$R_x(\theta)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&-\sin\theta&0\\0&\sin\theta&\cos\theta&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad R_y(\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\phi&0&\sin\phi&0\\0&1&0&0\\-\sin\phi&0&\cos\phi&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad R_z(\gamma)=\begin{bmatrix}\cos\gamma&-\sin\gamma&0&0\\\sin\gamma&\cos\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$M_{orthXY}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M_{orthYZ}=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\quad M_{orthXZ}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Аксонометрические проекции

Плоскость задается единичным вектором нормали N.



Проецируем на плоскость XY.

Для совмещения произвольной оси вращения с осью z выполним поворот вокруг оси x и вокруг оси y – перемножение матриц:

$$R_y(\phi)R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Единичный вектор OX: [1001], если его повернуть:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

Единичный вектор OY: [0101], если его повернуть:

Координаты вектора единичной нормали являются ее направляющими косинусами.

Длины проекции вектора на плоскость:

$$X = \sqrt{X'^2_{xy} + Y'^2_{xy}} = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi\sin^2\theta} \quad Y = \sqrt{X''^2_{xy} + Y''^2_{xy}} = \sqrt{0^2 + \cos^2\theta}$$

Аксонометрические проекции

Для **изометрии** справедливо p=r=q, $3p^2=2$.

Тогда:

$$3\cos^2\theta = 2,$$

$$\theta \approx 35^\circ$$

$$\cos^2\theta = \cos^2\phi + \sin^2\phi\sin^2\theta,$$

$$\sin\phi = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} = 1/2$$

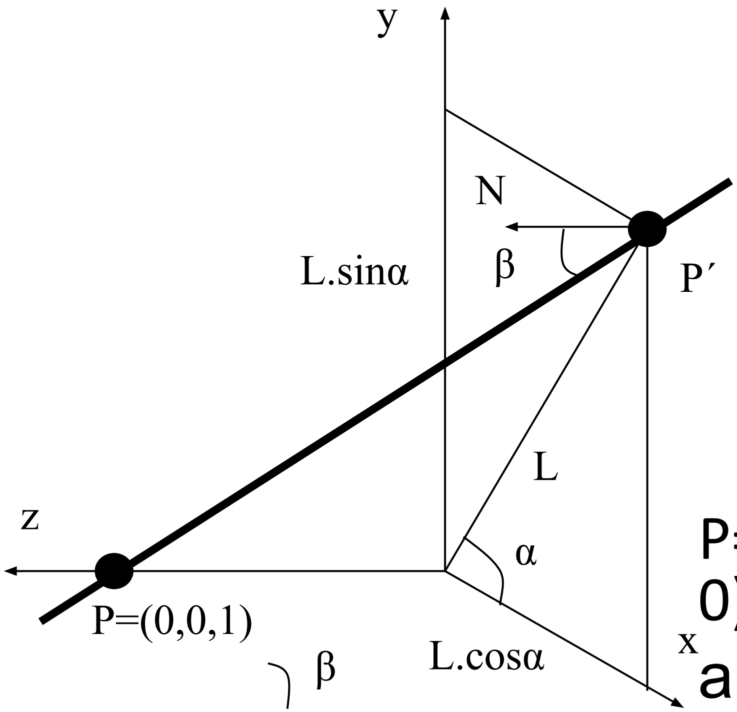
$$\phi \approx 45^\circ$$

Для **диметрии** справедливо: p=r=2q; $2p^2 + p^2/4 = 2$.

$$\theta \approx 20^\circ \quad \phi \approx 22^\circ$$

Тогда

Косоугольные проекции



Точка P=(0,0,1) проецируется в точку P′.

Плоскость проекции совпадает с XOY.

Направление проецирования задаётся: (Lcosα, Lsinα,-1),L=1/tan(β);

β – угол между нормалью плоскости проекции и направлением лучей;

α - определяет горизонтальный угол.

P=(0,0,1) проецируется в P′=(lcosα, lsinα, 0),

а произвольная точка P(x,y,z) – в P′(x_p,y_p,0), где

$$x_p = x + z(l\cos\alpha)$$

$$y_p = y + z(l\sin\alpha)$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & l\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица косоугольного проецирования
(в формате вектора-столбца)

Косоугольные проекции

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & l\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица косоугольной проекции для случая проецирования в плоскость Z = 0, выполняет:

1. плоскости с заданной координатой Z_0 переносятся вдоль оси X на $Z_0 \cdot L \cdot \cos\alpha$ и вдоль оси Y на $Z_0 \cdot L \cdot \sin\alpha$;
2. производится проецирование в плоскость Z = 0.

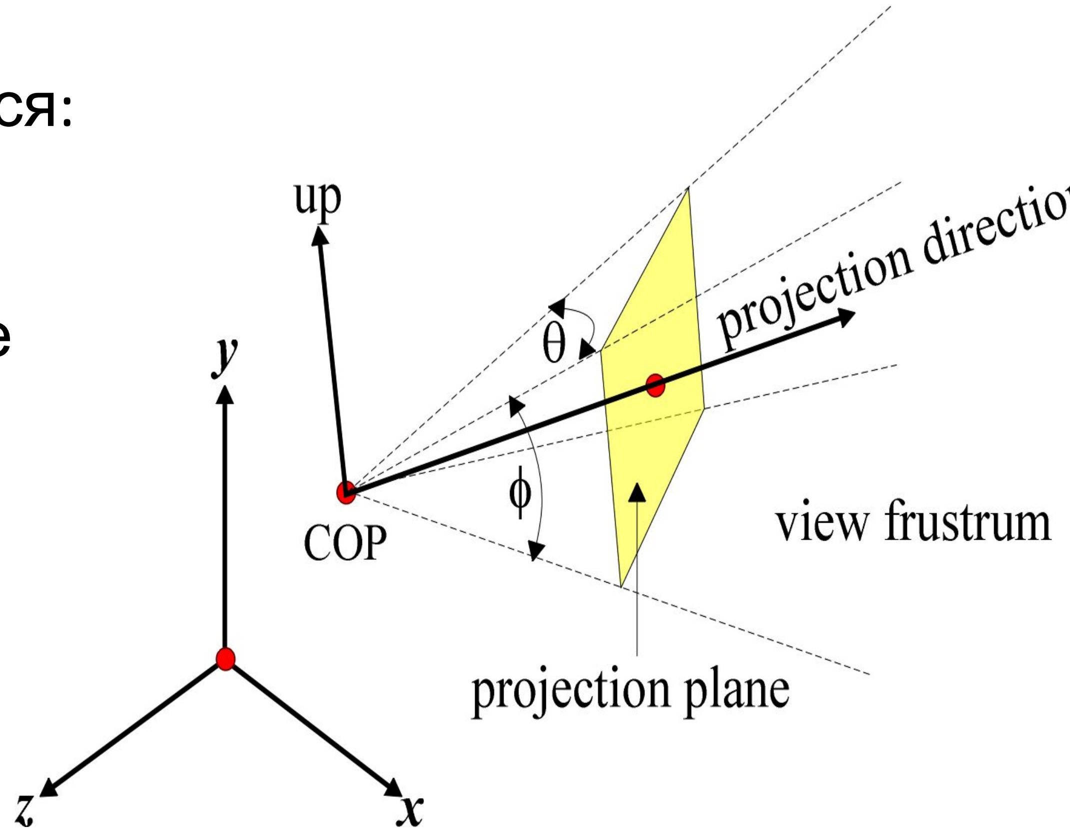
Варианты параллельных проекций формируются из полученной подстановкой значений L и углов α и β. Для фронтальной косоугольной диметрии L = ½, угол β = 63.4°, угол α

Центральные проекции

Более сложные!

Для построения учитываются:

- ракурс;
- перспективы;
- объём видимости (в виде усечённой пирамиды) или угол обзора (по 2 координатам).



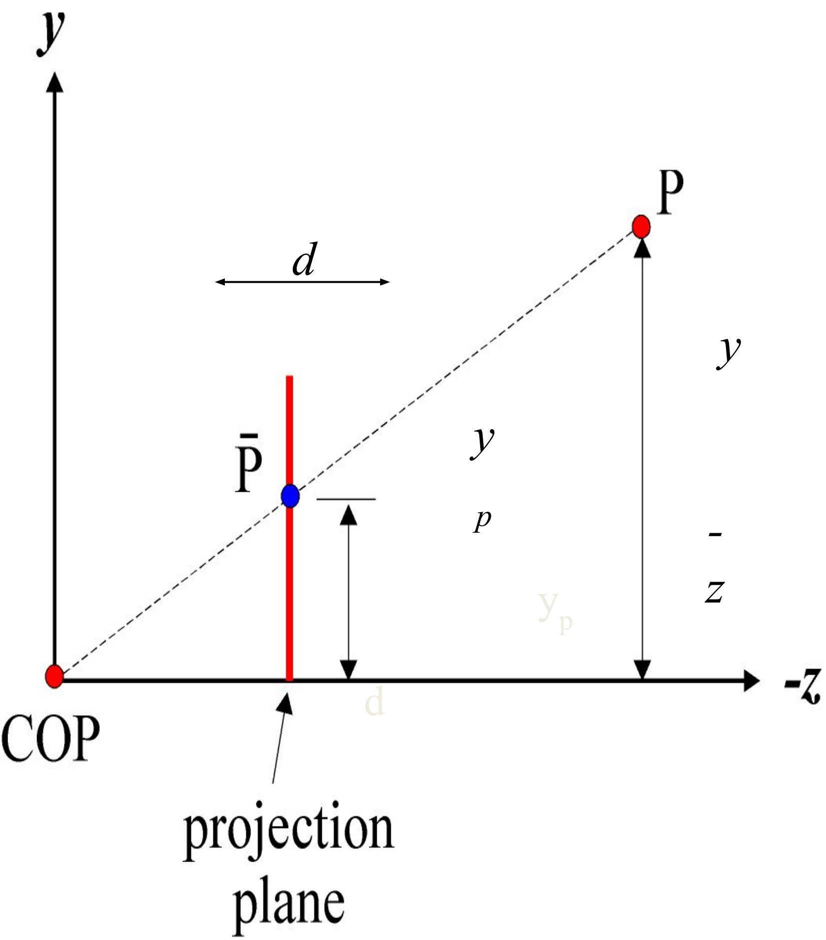
Параметры:

- центр проекции (centre of projection - COP);
- углы обзора (q, f);
- направление проецирования (нормаль к плоскости проекции);

Центральные проекции

Если поместить центр проекции в центр координат и направление взгляда ориентировать по положительному направлению оси –***z,*** плоскость проекции разместить на оси z в точке с координатой *z = -d,* то:

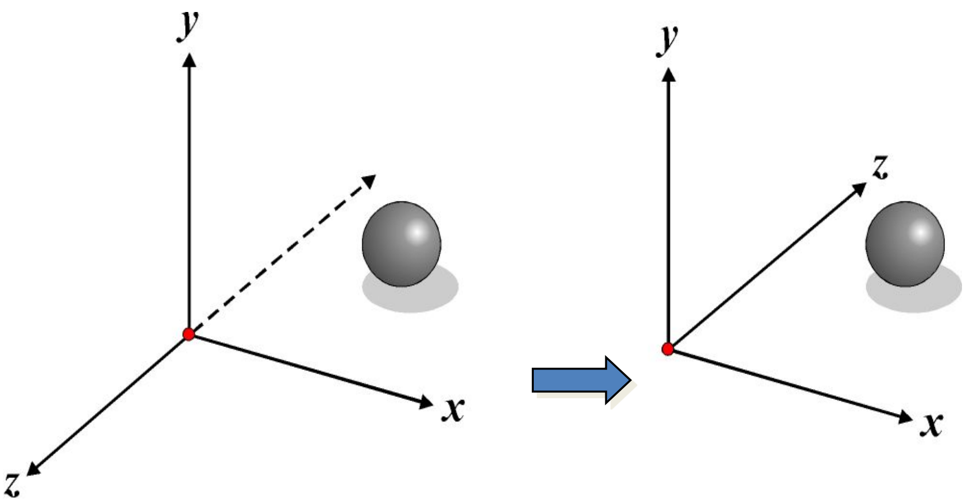
$$\frac{y}{z} = \frac{y_P}{d} \Rightarrow y_P = \frac{y}{z/d}$$



Аналогичное выражение имеет место и для x_p, соответственно

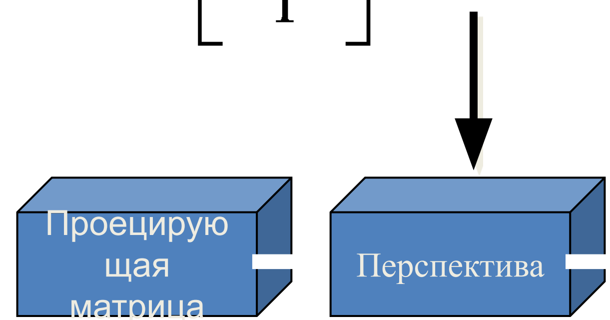
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{z/d} \\ \frac{y}{z/d} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Центральные проекции



$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{z/d} \\ \dfrac{y}{z/d} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ z/d \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$



Отражение оси ***z*** для перехода в левую систему координат $\Rightarrow$ увеличение z подразумевает увеличение расстояния до наблюдателя.

Центральные проекции

В зависимости от приложений могут использоваться различные механизмы для задания перспективных искажений:

- углы обзора (*field of view)* могут быть получены из расстояния до плоскости проекции;
- направление обзора может быть получено, если точка сцены задаётся как точка наблюдения.

OpenGL предлагает несколько различных методов для задания перспективных проекций:

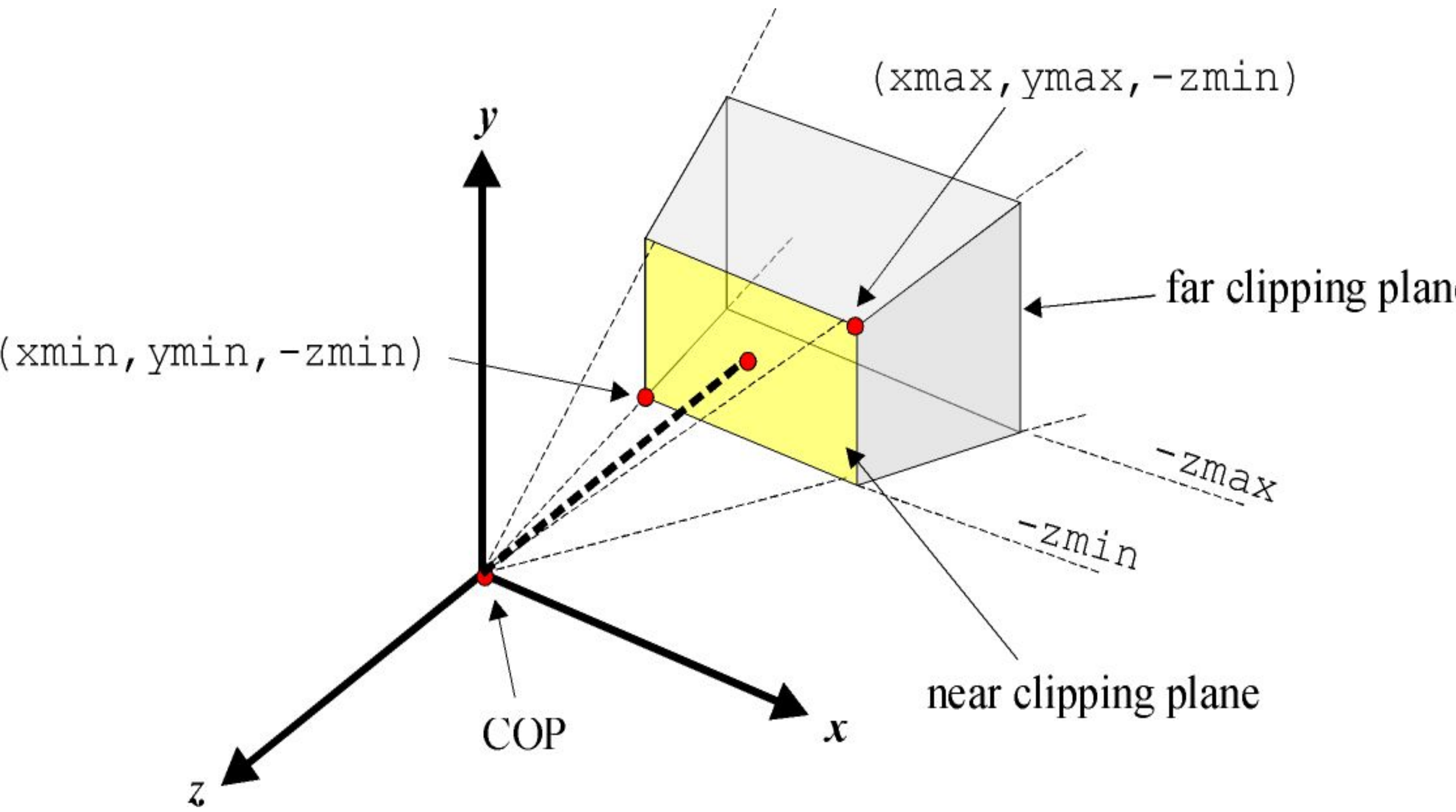
– `gluLookAt`,

– `glFrustrum`,

– `gluPerspective`.

Центральные проекции

`glFrustrum`**`(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax);`**



glFrustrum

Все точки на линии задаваемой `COP` и координатами `(xmin,ymin,-zmin)` будут спроецированы в нижнюю левую точку устройства вывода.

Все точки на линии `COP` (центр проекции) и `(xmax,ymax,-zmin)` будут соответствовать верхнему правому углу устройства вывода.

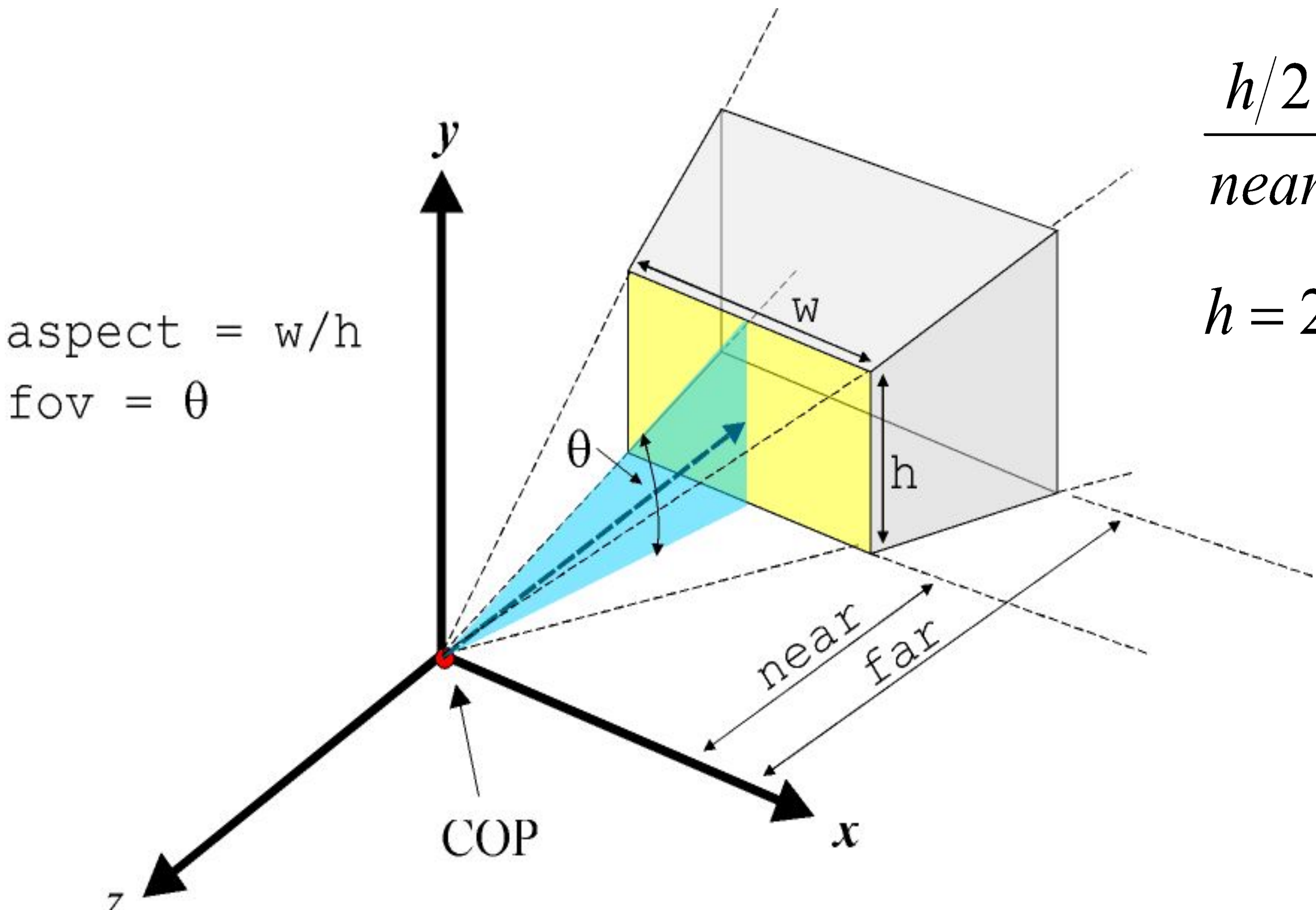
Направление наблюдения (viewing direction) всегда соотвествует полуоси ***-z.***
Отпадает необходимость строить симметричную пирамиду (раструб камеры):

```
glFrustrum(-1.0,1.0,-1.0,1.0,5.0,
50.0);
```

`zmin` и `zmax` определяются как **положительные** расстояния вдоль полуоси ***-z.***

Центральные проекции

`gluPerspective(fov, aspect, near, far);`



$$\frac{h/2}{near} = \tan\frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$h = 2\,near\tan\frac{\theta}{2}$$

gluPerspective

Предназначение функции упростить определение перспективных проекций.

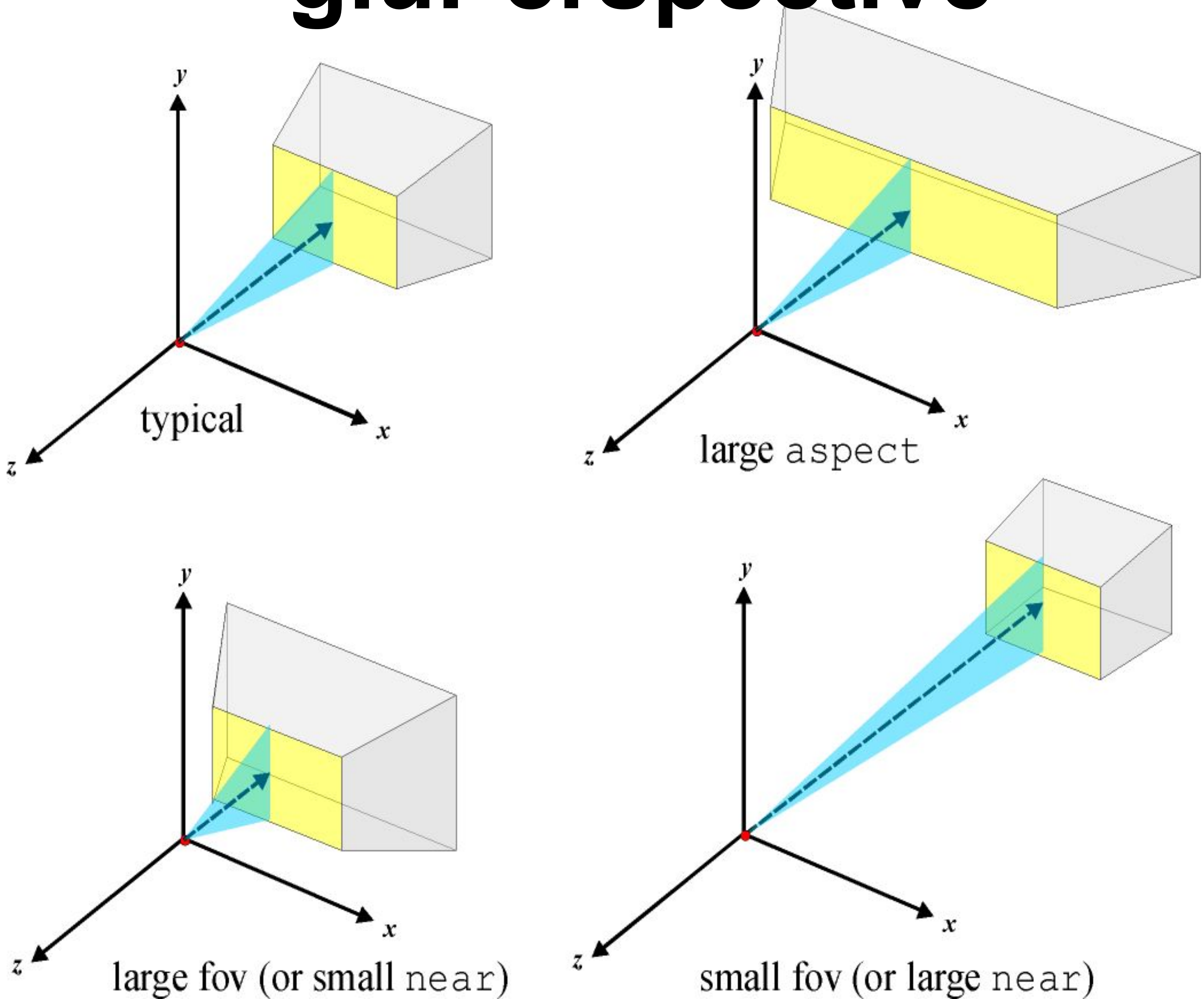
Позволяет создавать симметричные раструбы камеры (*symmetric frustrums)*.

Точка наблюдения – в начале координат направление взгляда – вдоль ***-z*** полуоси.

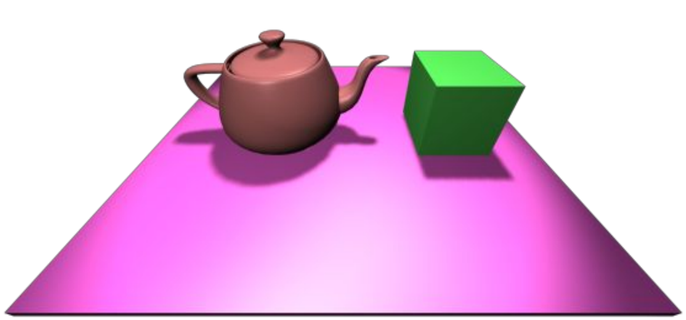
Угол обзора (*field of view*), fov, должен быть в пределах [0..180].

apect позволяет создавать объём видимости (view frustrum), который подгоняется под соотношение сторон (*aspect ratio)* устройства вывода, чтобы ликвидировать искажения.

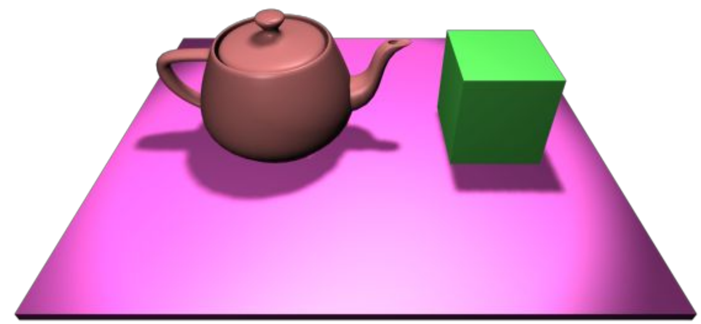
gluPerspective



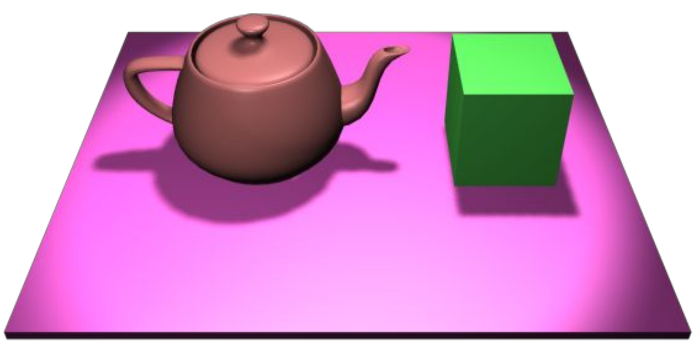
Примеры центральных проекций (Lens Configurations)



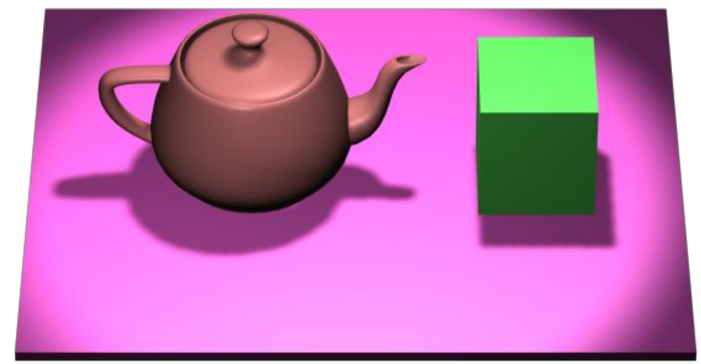
10mm Lens (fov = 122°)



20mm Lens (fov = 84°)



35mm Lens (fov = 54°)



200mm Lens (fov = 10°)