

Матричные преобразования трехмерного пространства

Проекции

преобразуют точки из координатной системы размерности n в точки координатной системы размерности меньше n .

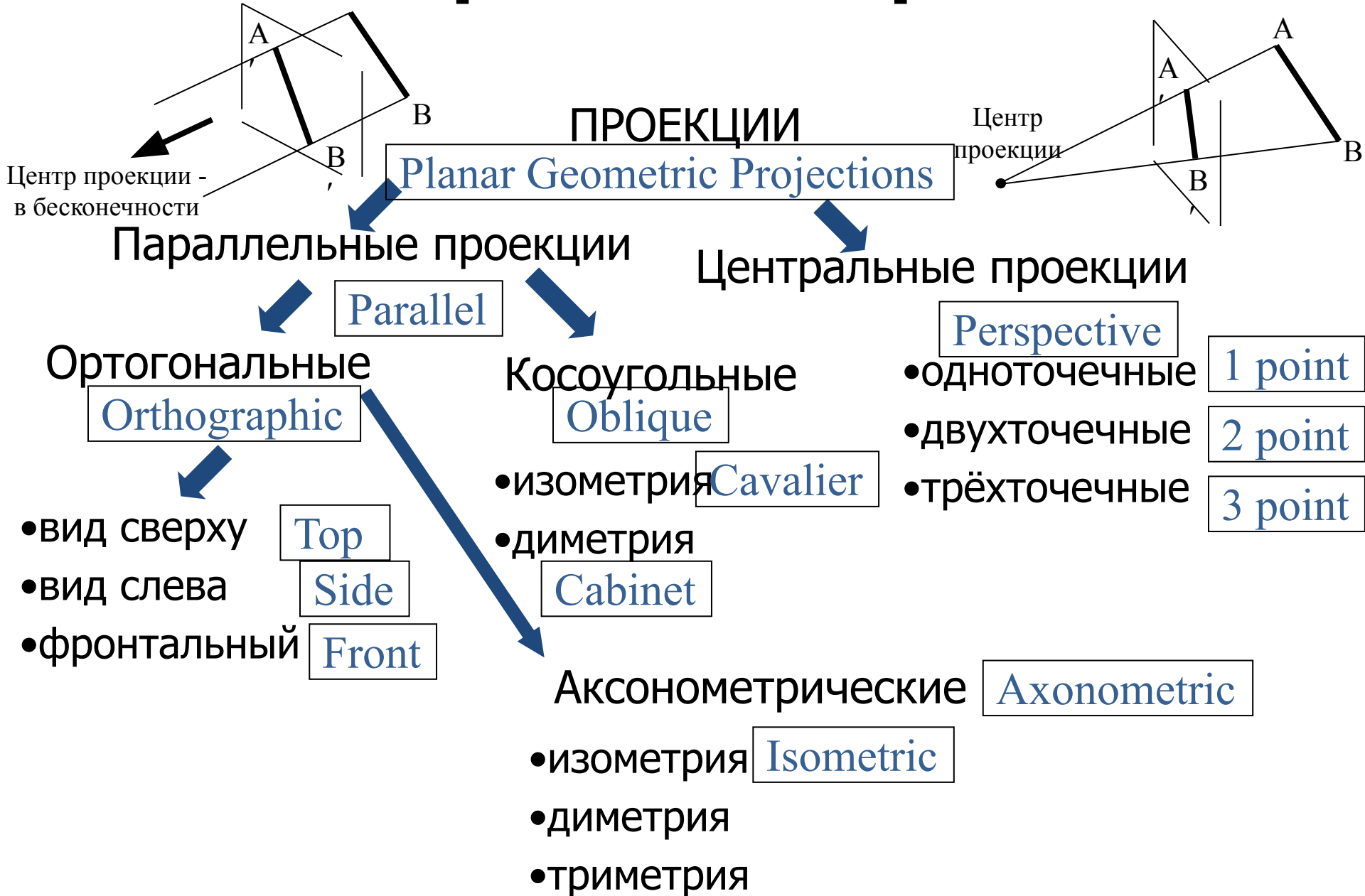
Проекции

1. строятся с помощью прямых линий – *проекторов (лучи проекции)*, пересекающих поверхность проекции;
2. оперируют с **плоскими проекциями**, т.е. поверхность проекции – плоскость (2D-проекция);
3. используют **геометрические проекции**, т.е. проекторы - прямые лучи.

Исключение – Image-based rendering.

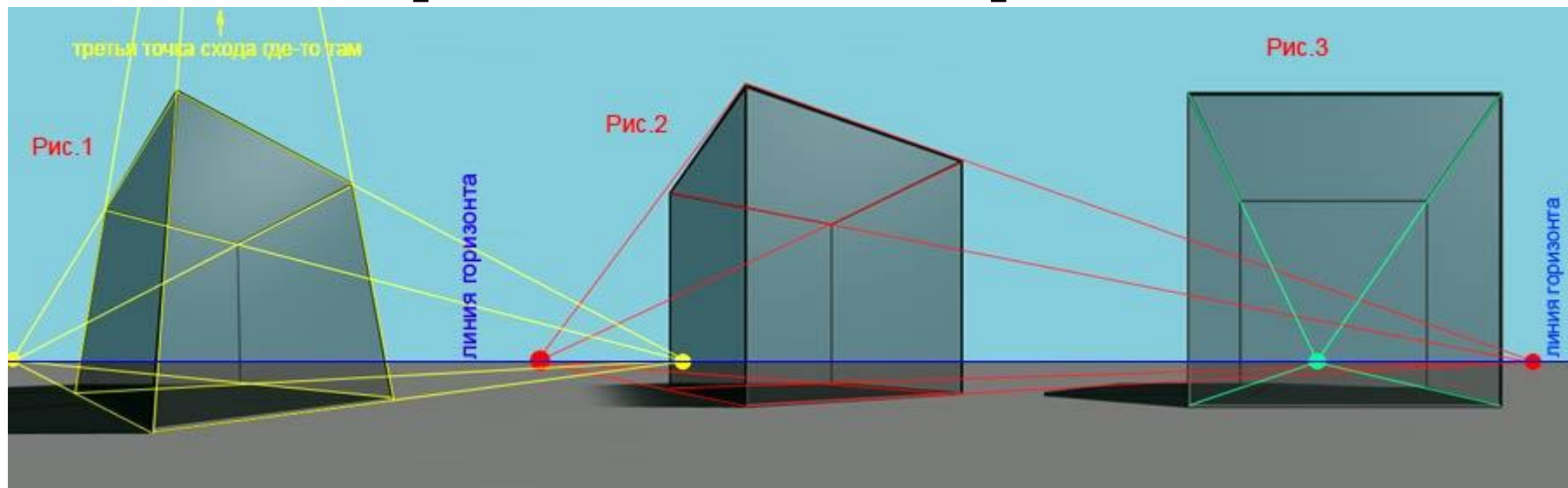
Под проекциями будем подразумевать **геометрические плоские проекции.**

Классификация проекций



Центральные проекции

Центральные проекции



Определяются плоскостью проекции и центром проекции.

Визуальный эффект – **перспективное искажение (перспектива)**.

Размер проекций объектов сцены обратно пропорционален расстоянию между объектом и центром проекции.

Изображение реалистично.

Центральная проекция **не используется** для измерений:

– параллельные линии не параллельны в проекции;

– углы сохраняются на плоскостях, параллельных плоскости проекции;

Перспектива (Perspective)

Первое изображение
с перспективой –
"Троица" Мазаччо, 1427г.



Центральные проекции

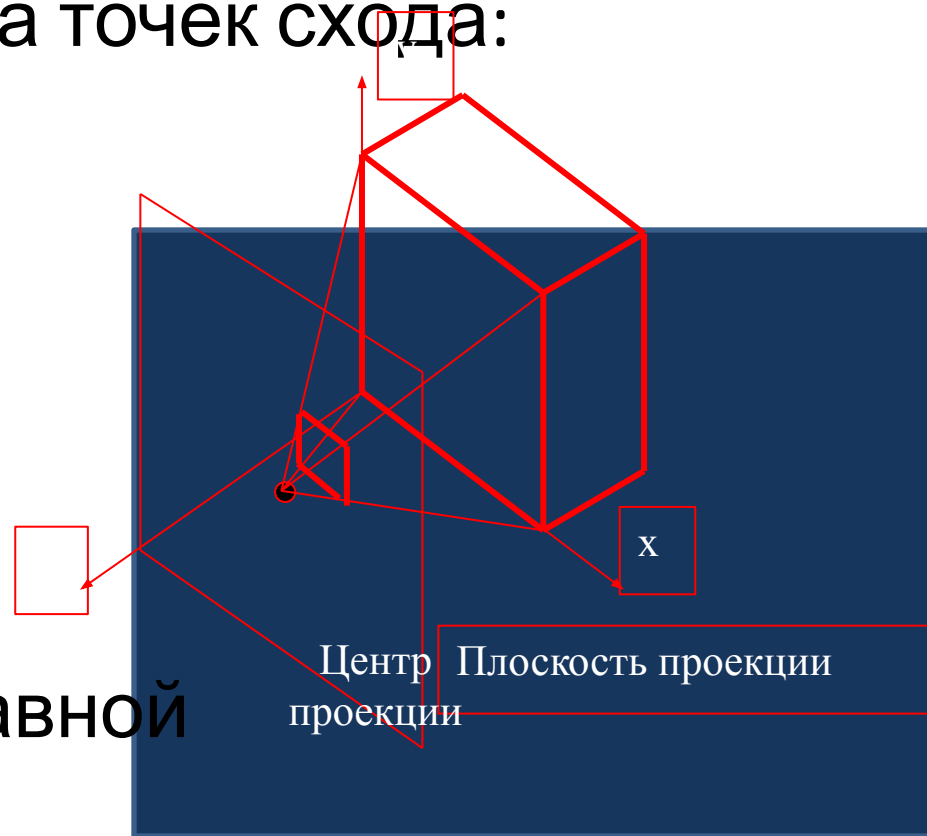
Центральные проекции любой совокупности параллельных прямых, не параллельные проекционной плоскости, будут сходиться в **центре проекции (точке схода, vanishing point)**.

Центральные проекции классифицируют в зависимости от количества точек схода:

- 1-точечная проекции,
- 2-точечная проекции,
- 3-точечная проекции.

Количество осей, пересекающих проекцию, соответствует количеству центров проекции.

Линии параллельны главной оси.



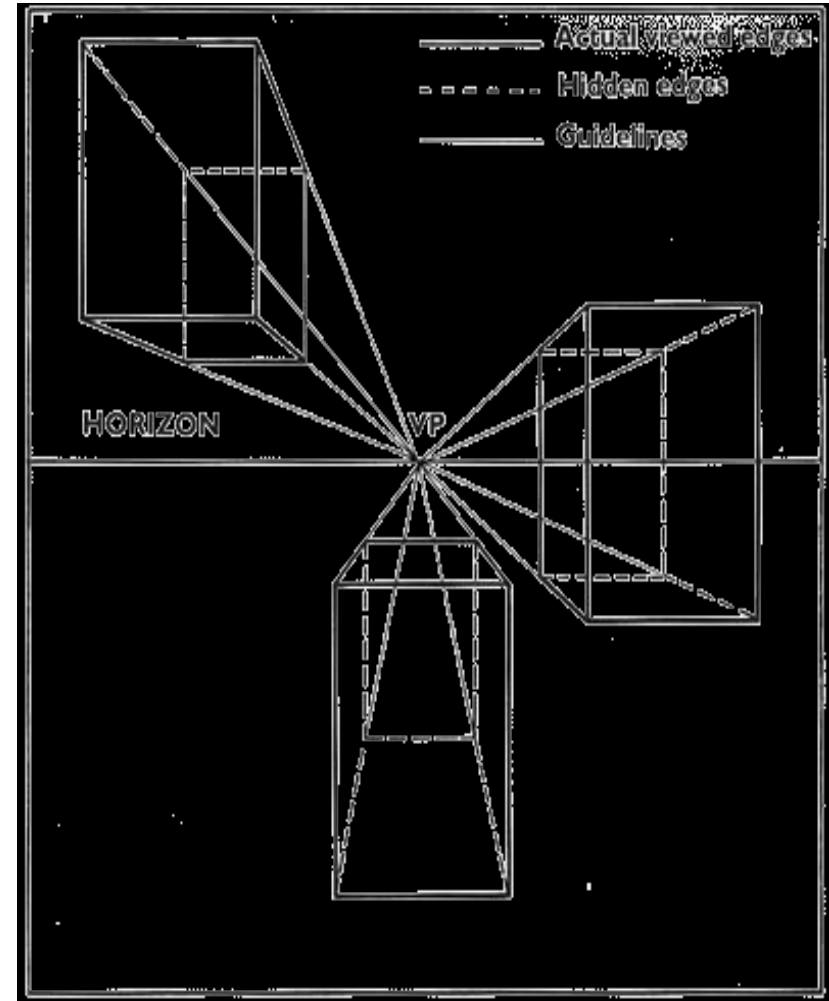
1-точечная проекция

Плоскость проекции пересекается только с одной осью.

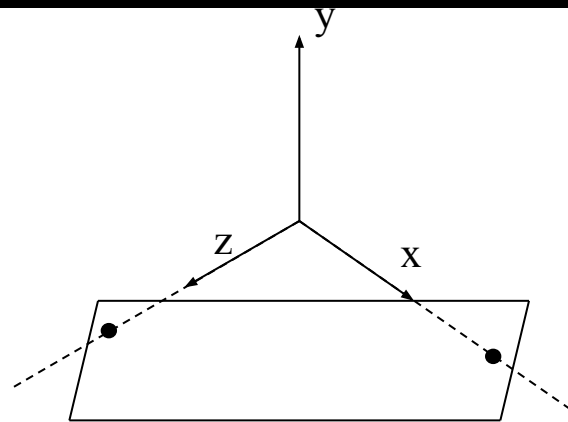
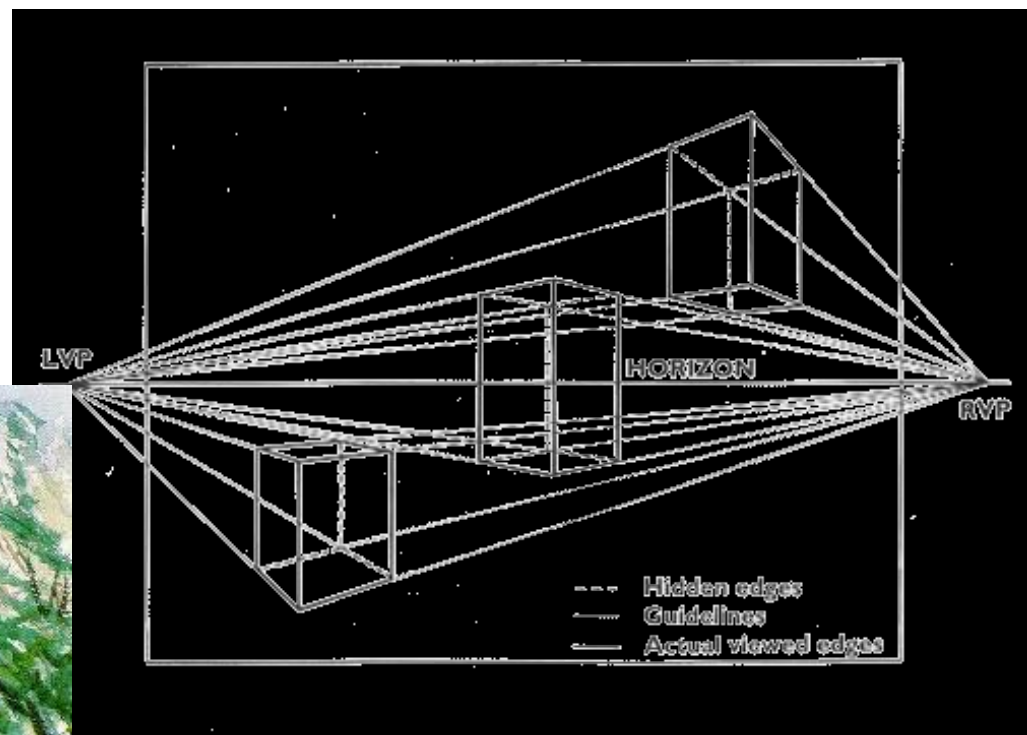
Точка схода в однородных координатах имеет $w = 0$ ($x, y, 0$).



Площадь святого Марка (Венеция). Canaletto 1735



2-х точечная проекция



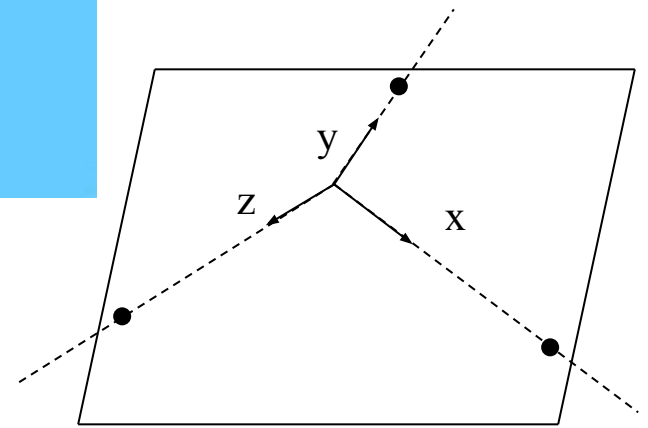
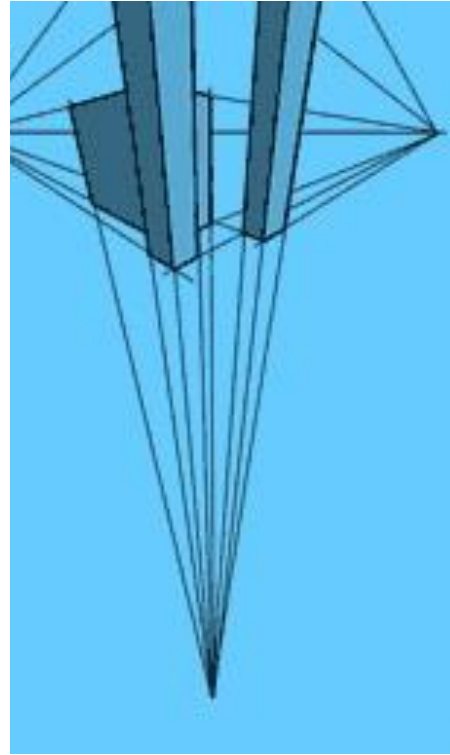
Edward Hopper *The Mansard Roof*
1923 г.

Плоскость проекции

3-х точечная проекция

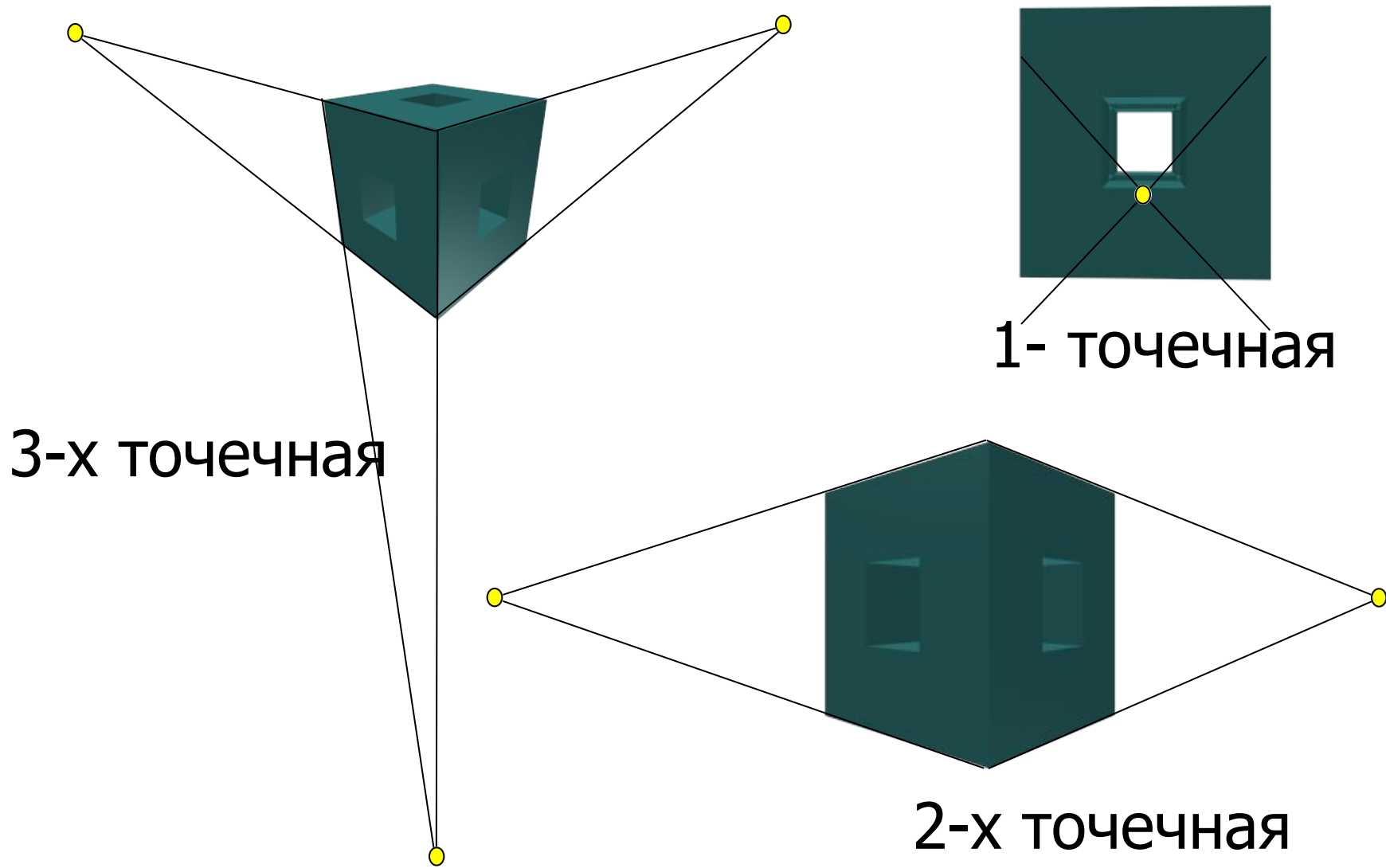


Georgia O'Keefe «*City Night*», 1926 г.



Плоскость проекции

Центральные проекции



Параллельные проекции

Ортогональные проекции

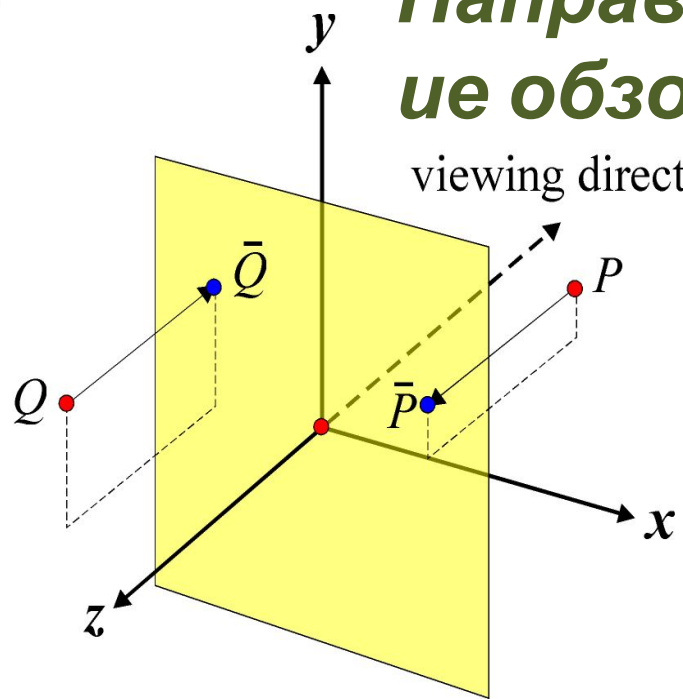
Строится параллельным проецированием на плоскость отображения.

Проецирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций.

Обычно плоскость отображения двигается по одной из осе

**Направлен
ие обзора**

viewing direction



Приме

р

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow

$$\bar{P} = MP$$

äãä

$$M =$$

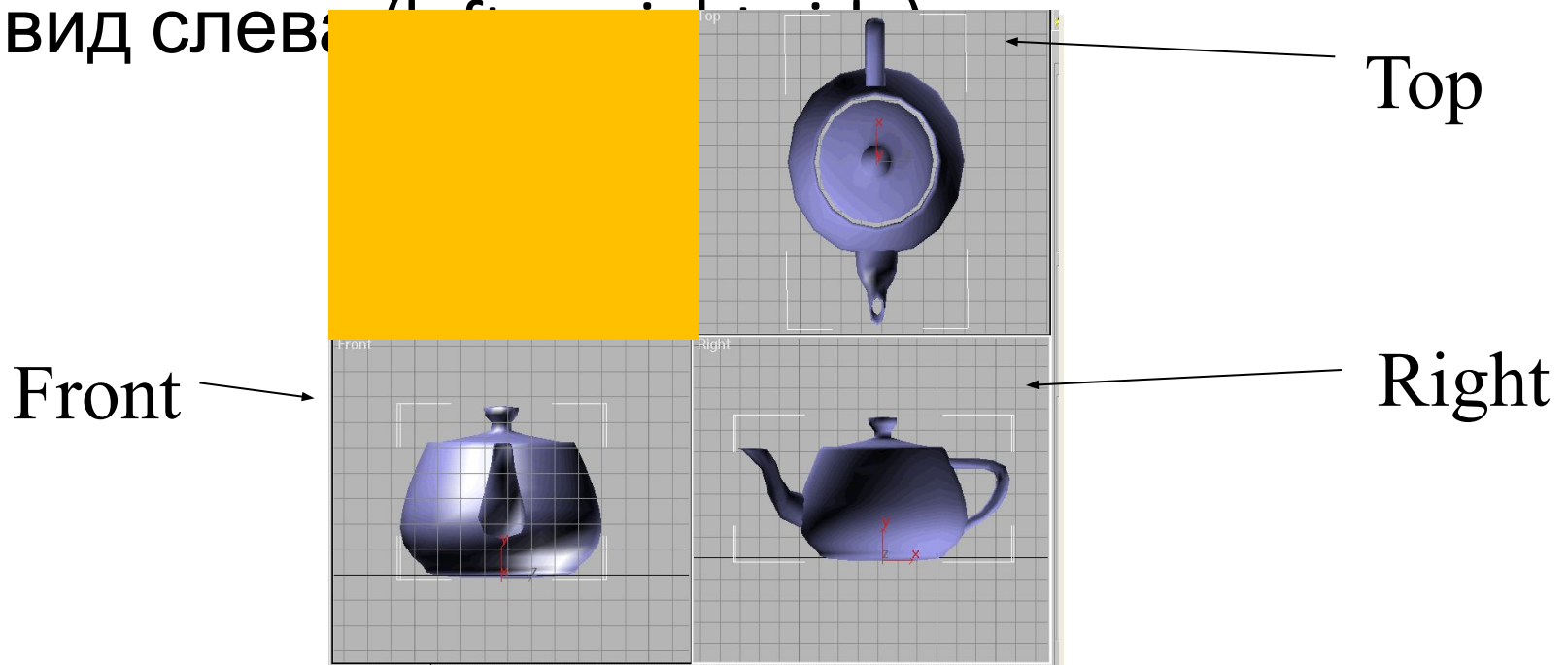
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ортогональные проекции

Множественные проекции (Multiple Projections)

Ортогональные проекции часто используются для построения множественных проекций объекта:

- вид сверху или план (plan (top) view),
- фронтальный вид (front view),
- вид слева (left side view)



АксонOMETрические проекции

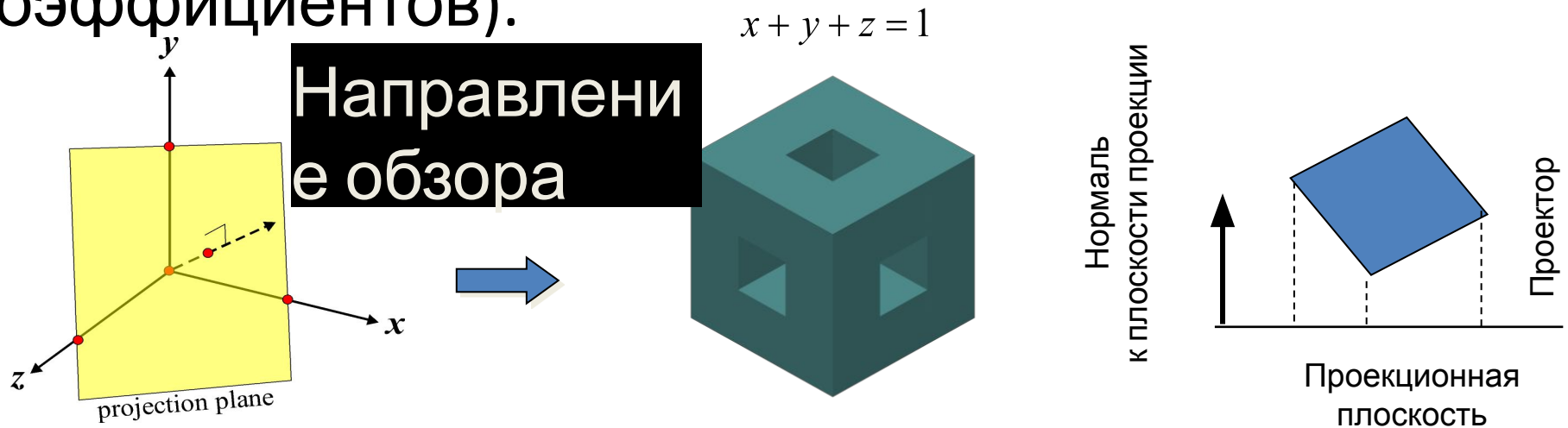
Проекционные плоскости не перпендикулярны осям координат.

Одновременно видны несколько поверхностей объекта.

Используется для измерений:

- углы изменяются;
- сохраняется параллельность прямых.

Расстояния можно измерить вдоль каждой из координатных осей (с учётом масштабирующих коэффициентов).

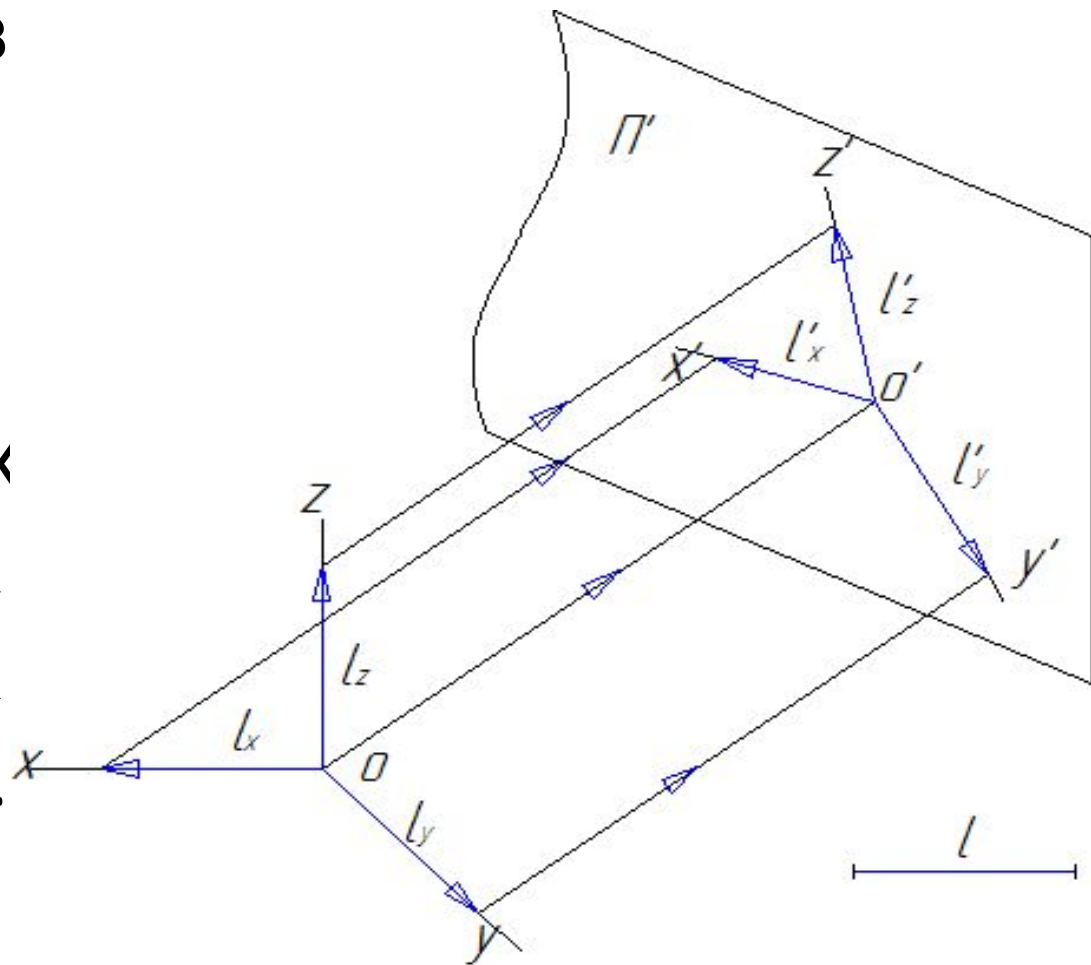


Ортогональные проекции

АксонOMETрические проекции

Основная теорема аксонометрии:

теорема Польке: «три отрезка произвольной длины, лежащие в 1-й плоскости и выходящие из одной точки под произвольными углами друг к другу, представляют собой параллельную проекцию трех равных отрезков, отложенных на координатных осях от начала координат».



Ортогональные проекции

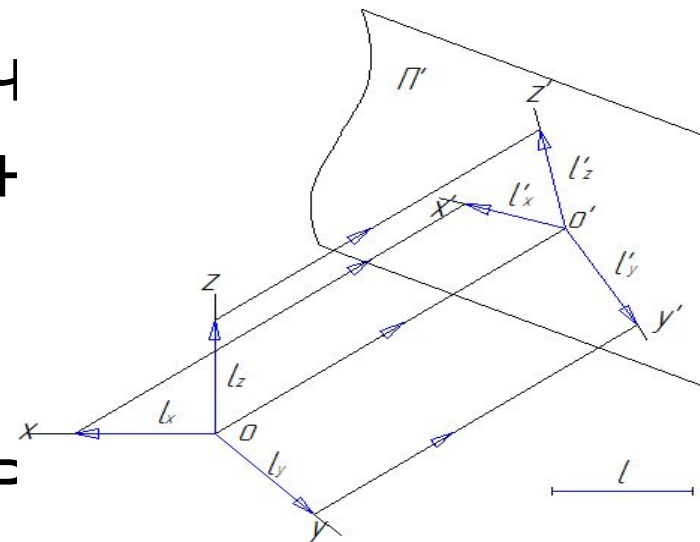
АксонOMETрические проекции

Согласно этой теореме:

- любые три прямые в плоскости, исходящие из одной точки и не совпадающие между собой, можно принять за аксонометрические оси;
- любые отрезки произвольной длины на этих прямых, отложенные от точки их пересечения, можно принять за аксонометрические масштабы.

Эта система аксонометрических масштабов является параллельной проекцией некоторой прямоугольной системы координатных осей и натуральных масштабов

Ортогональные проекции



АксонOMETРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Отношение единичных отрезков на аксонометрических осях к единичным отрезкам на координатных осях называется **коэффициентом искажения** (**коэффициентом масштабирования**) по аксонометрическим осям.

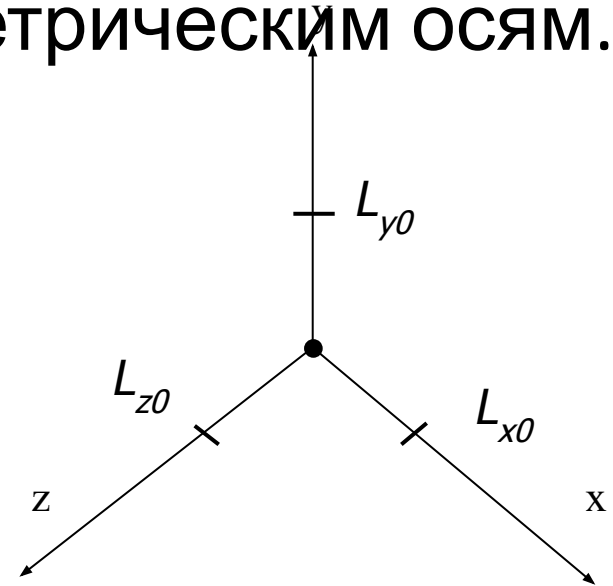
Коэффициенты искажения:

$$K_x = L_{x0} / L_x = p,$$

$$K_y = L_{y0} / L_y = q,$$

$$K_z = L_{z0} / L_z = r.$$

Существует много вариантов аксонометрических проекций, отличающихся направлениями аксонометрических осей и величин искажения по данным осям.



АксонOMETрические проекции

Если коэф. искажения по всем трём осям не равны

$p \neq q \neq r$, то проекция называется **триметрической**.

Если коэф. искажения по двум осям равны

$p=r$, $q=1/2p$, то проекция называется **диметрической**.

Если коэф. искажения по всем 3 осям равны $p=q=r$, то проекция является **изометрической**.
Плоскость проекции пересекает оси на одинаковом расстоянии от центра координат.

В практике построения аксонометрических изображений применяют определенные комбинации направлений аксонометрических осей и масштабов

АксонOMETрические проекции

$$p \neq q \neq r,$$

триметрическая проекция

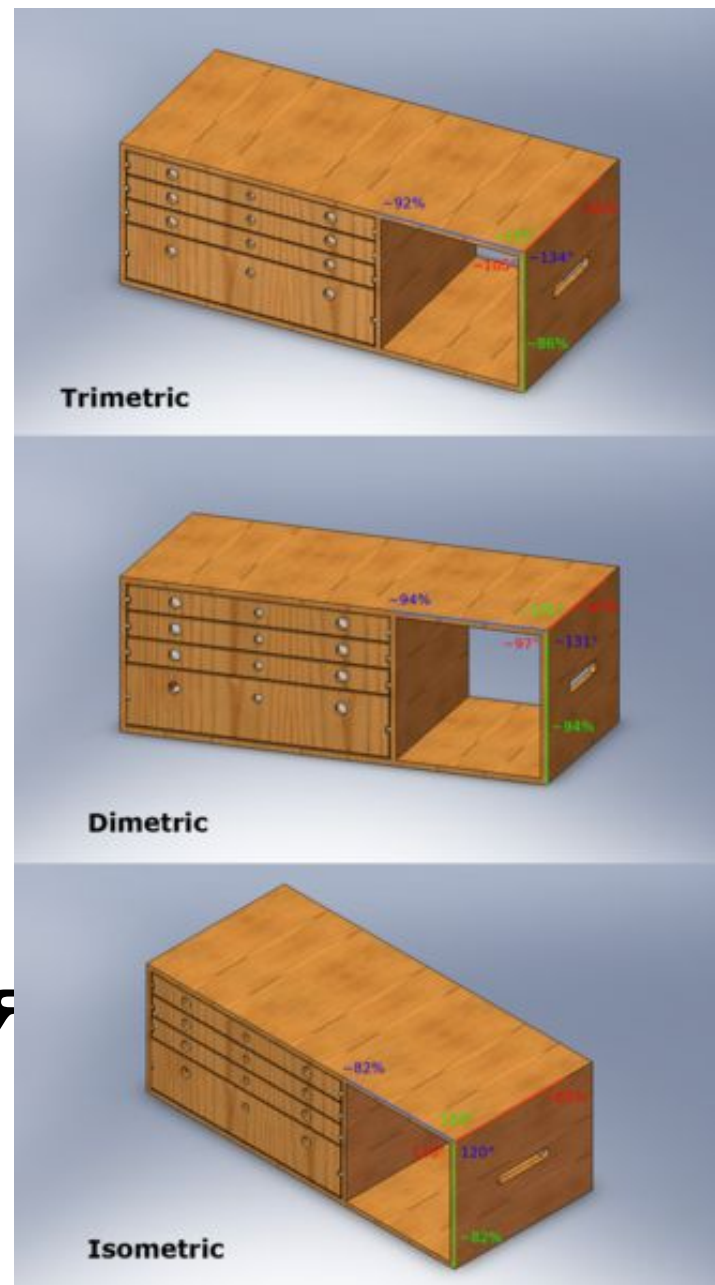
$$p = r, q = 1/2p,$$

диметрическая проекция

$p = q = r$
проекция

изометрическая

Ортогональные проекции



АксонOMETрические проекции

Изометрическая прямоугольная

Наиболее ^{проекция} распространенный случай аксонOMETрических проекций.

Нормаль плоскости проекции образует равные углы с каждой из координатных осей – описывается вектором (d_x, d_y, d_z) , где $|d_x| = |d_y| = |d_z|$. Коэффициенты масштабирования по осям одинаковы: $p=q=r$.

Измерения можно проводить по всем осям с одинаковым коэффициентом (изометрия).

Существует 8 направлений, удовлетворяющих данным условиям.

АксонOMETрические проекции

Изометрическая прямоугольная

проекция

Коэффициенты искажения:

$$\frac{|0_0x|}{|0x|} = \cos \alpha = p \quad \frac{|0_0y|}{|0y|} = \cos \beta = q \quad \frac{|0_0z|}{|0z|} = \cos \gamma = r \quad (1)$$

По теореме синусов:

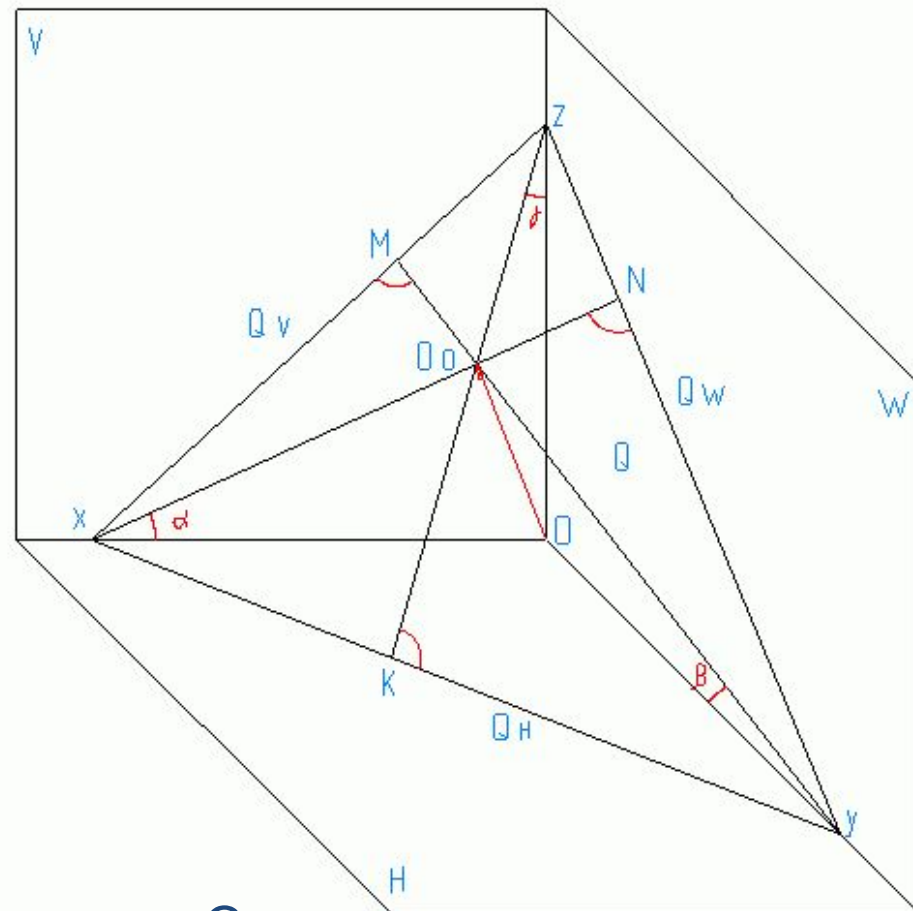
$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 1$$

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$$

$$1 - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \beta + 1 - \cos^2 \gamma = 1,$$

откуда

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 2$$
$$p^2 + q^2 + r^2 = 2$$



Ортогональные проекции

АксонOMETрические проекции

Изометрическая прямоугольная

проекция,

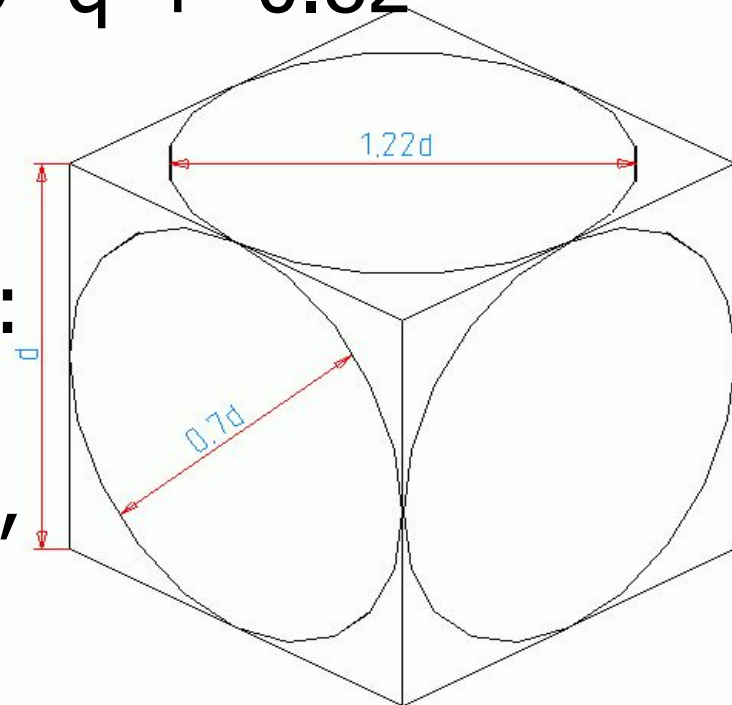
$p^2 + q^2 + r^2 = 2$ – для прямоугольной аксонометрии
сумма квадратов коэффициентов искажения = 2.

Установим численные значения
коэффициентов искажения для прямоугольной
изометрии: $p = q = r$; $3p^2 = 2$; $p = q = r = 0.82$

Для простоты **ГОСТ 2317-69**
предлагает использовать
коэффициенты искажения:
 $p = r = q = 1$.

Получается проекция,
увеличенная в **1.22** раза.

Ортогональные проекции



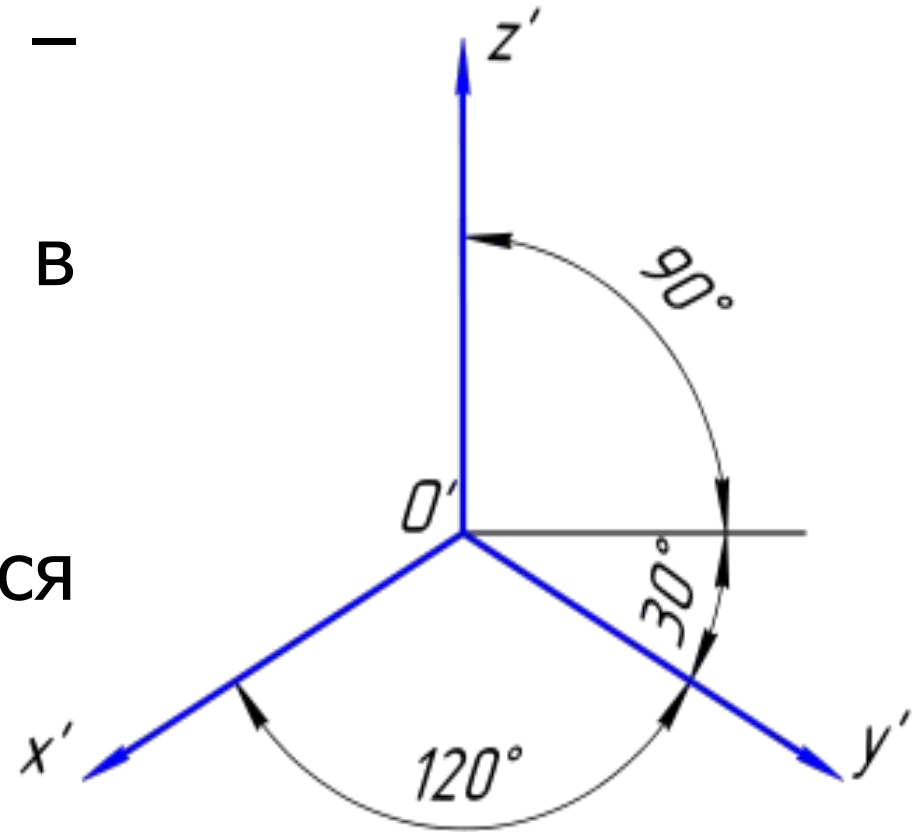
АксонOMETрические проекции

Изометрическая прямоугольная проекция

Треугольник следов –
равносторонний.

Угол между высотами в
равностороннем
треугольнике = 120° .

Ось z располагается
вертикально.



АксонOMETрические проекции

Диметрическая прямоугольная проекция

Для изометрии $p^2 + q^2 + r^2 = 2$.

Значения коэффициентов искажения для диметрии: $p=r=2q$; $2p^2 + p^2/4 = 2$; $p=r=0.94$; $q=0.47$

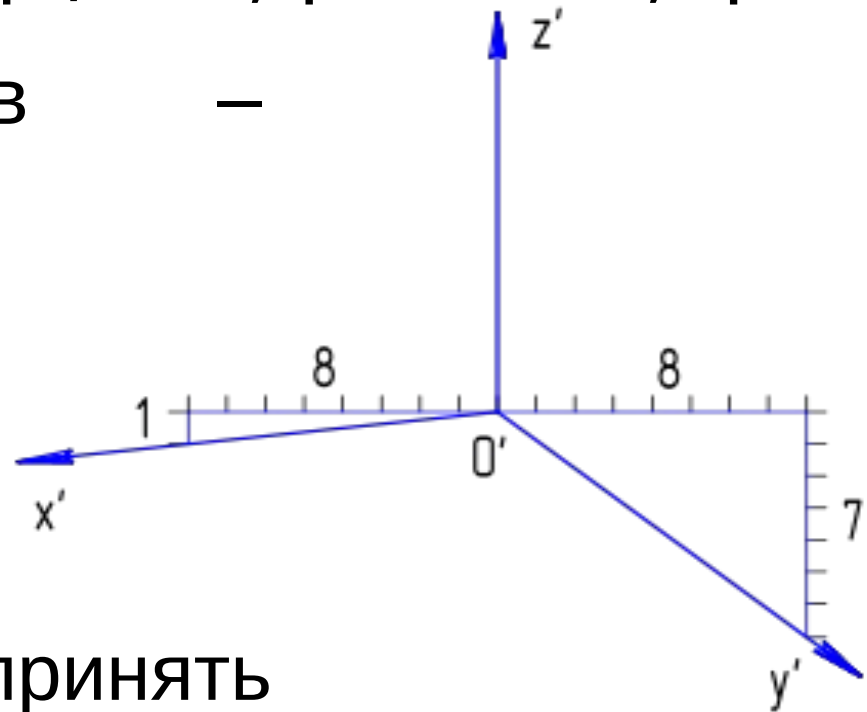
Треугольник следов — равнобедренный.

Приблизённо аксонометрические оси диметрической проекции можно

построить, если принять

$\text{tg } 7^\circ 10' = 1/8$, а $\text{tg } 41^\circ 25' = 7/8$.

Ортогональные проекции



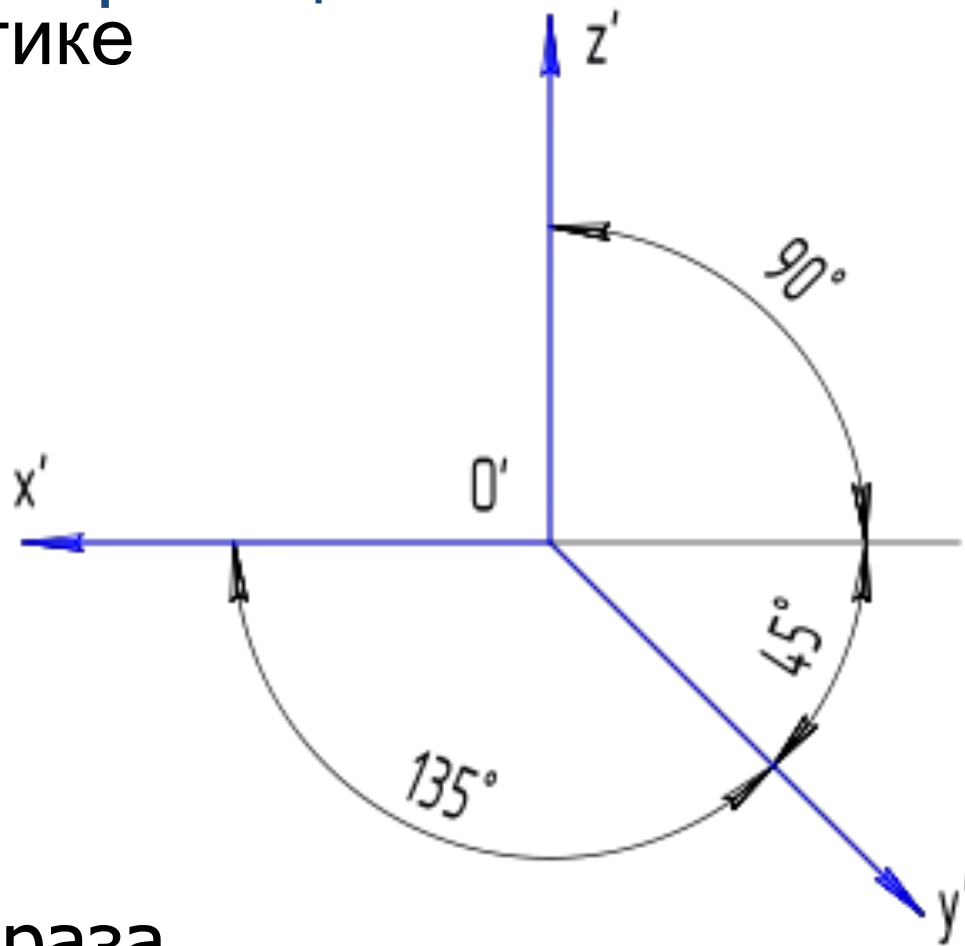
Оси координат прямоугольной диметрической проекции.

АксонOMETрические проекции

Диметрическая прямоугольная проекция

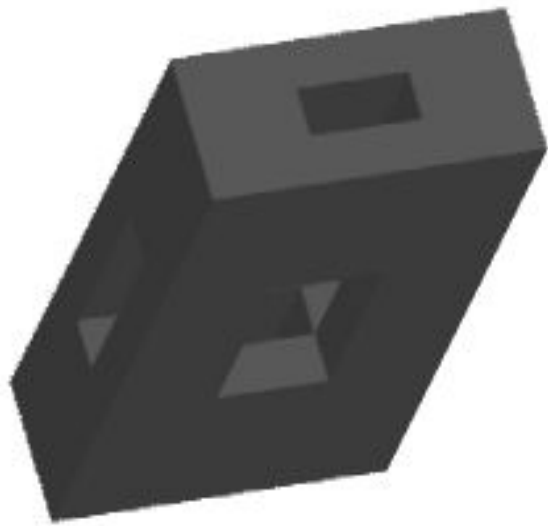
На практике
используют
приведённые
коэффициенты
искажения
 $p=r=1; q=0,5$.

Тогда
получается
проекция,
увеличенная в **1,06** раза.

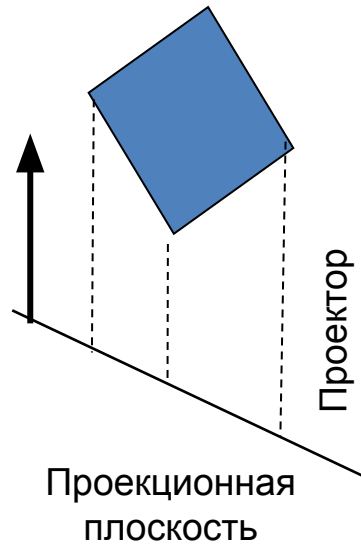


Косоугольные проекции

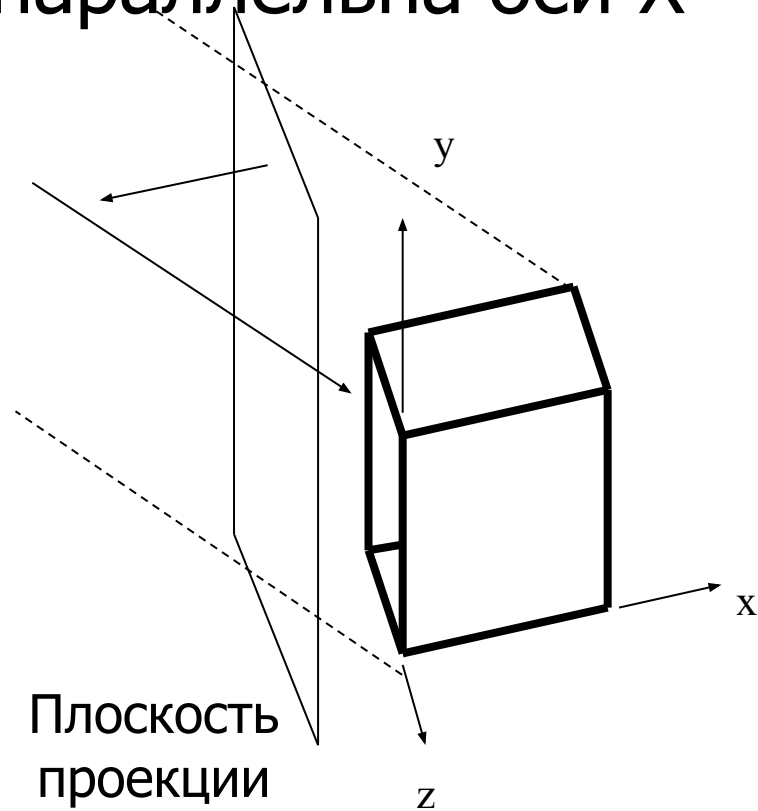
Лучи составляют с плоскостью проекции угол до 90° .



Нормаль
к плоскости проекции



Нормаль плоскости
параллельна оси X



Косоугольные проекции

Нормаль плоскости проекции не совпадает с направлением проецирующих лучей.

Плоскость проекции перпендикулярна одной из осей координат.

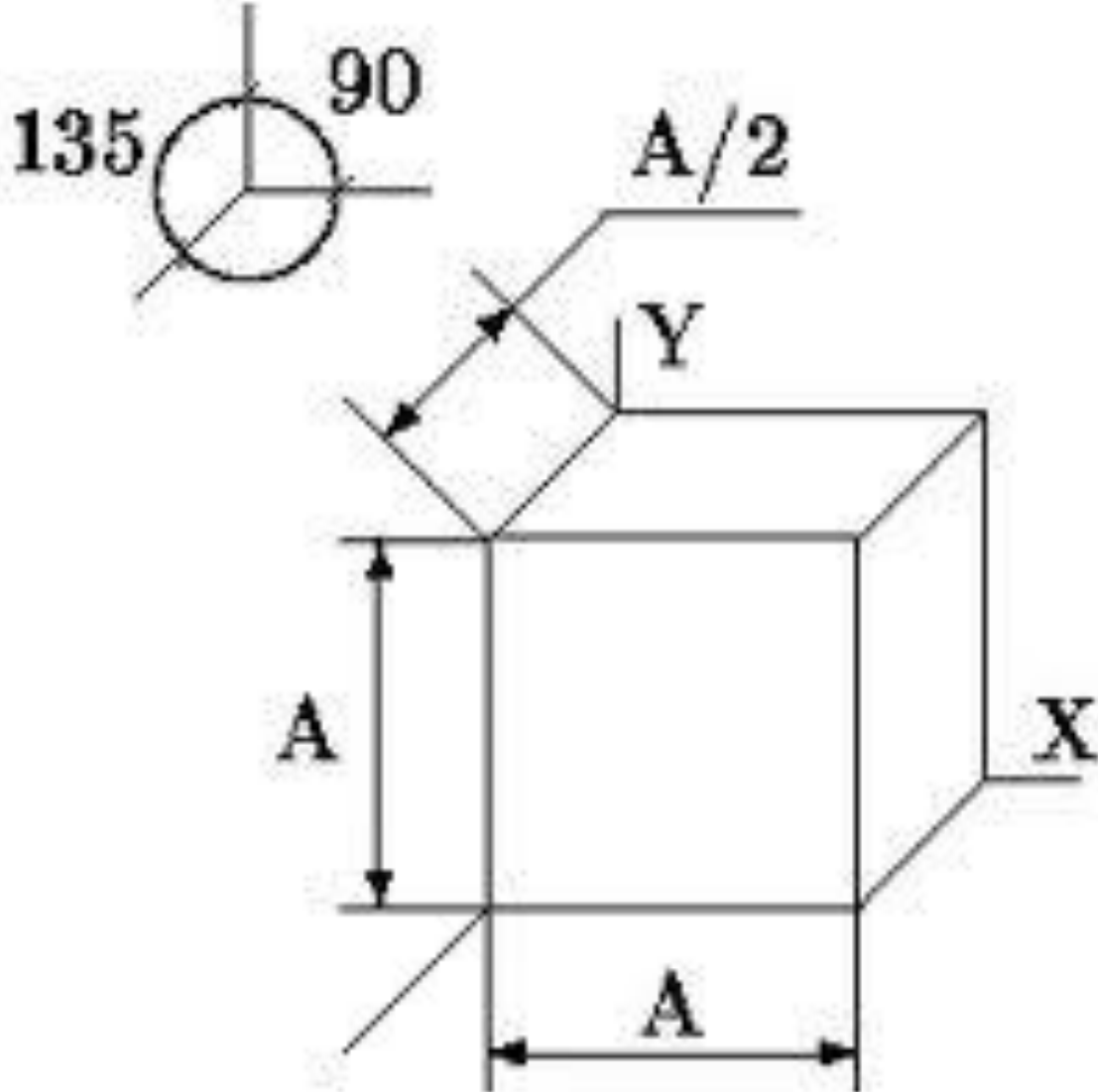
Результат проецирования фронтальной плоскости объекта позволяет проводить измерения углов и расстояний без искажений.

По проекциям других плоскостей можно измерять расстояния (с учётом коэффициента искажения, если он есть), но не углов!

Косоугольная фронтальная диметрия (Cabinet)

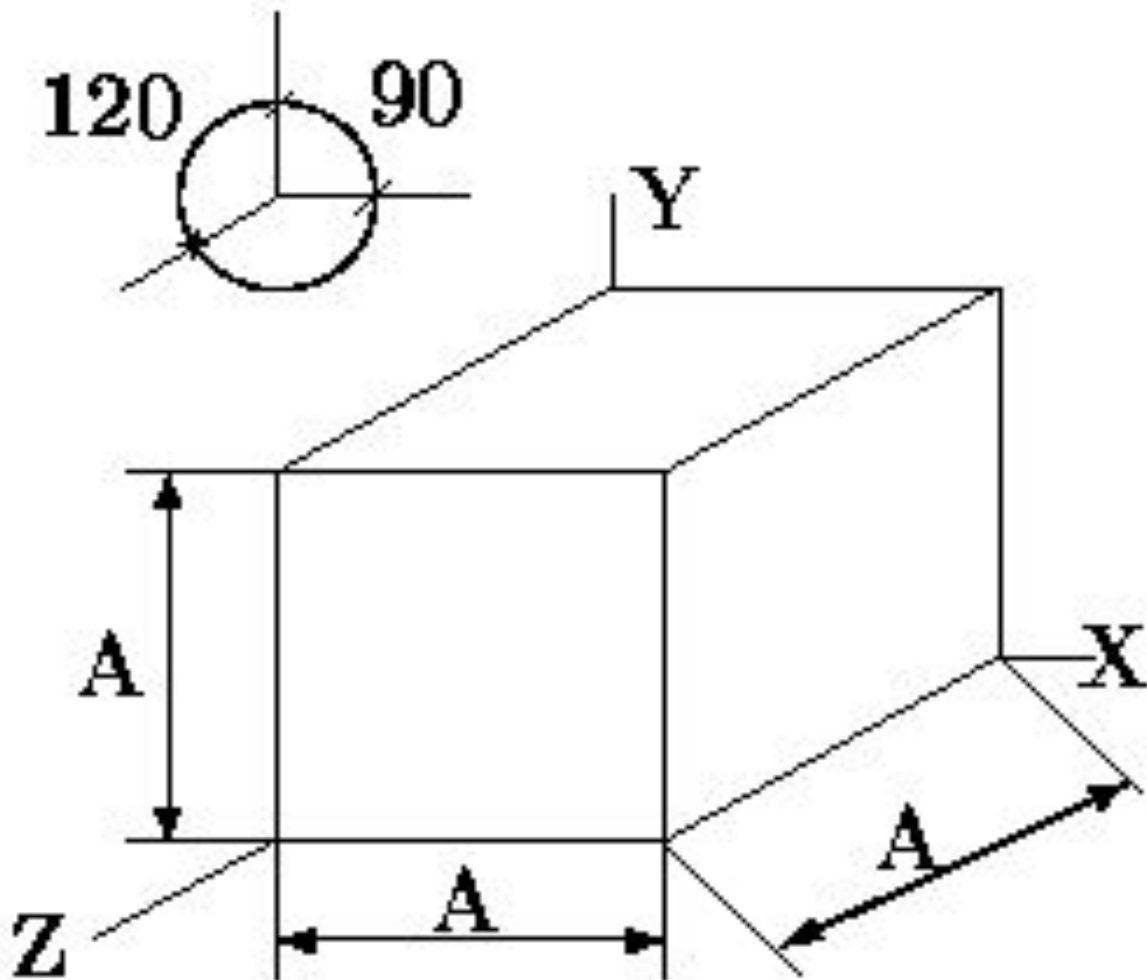
$$p = r = 1.0; q = 0.5;$$

$$\beta = \gamma = 135; \alpha = 90$$



Косоугольная горизонтальная изометрия (Cavalier)

$$\rho = r = q = 1.0;$$
$$\beta = \gamma = 120 ; \alpha = 90$$

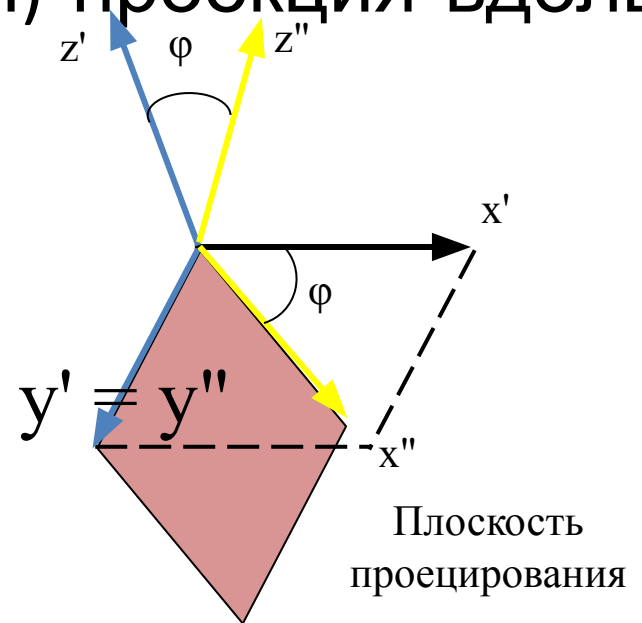
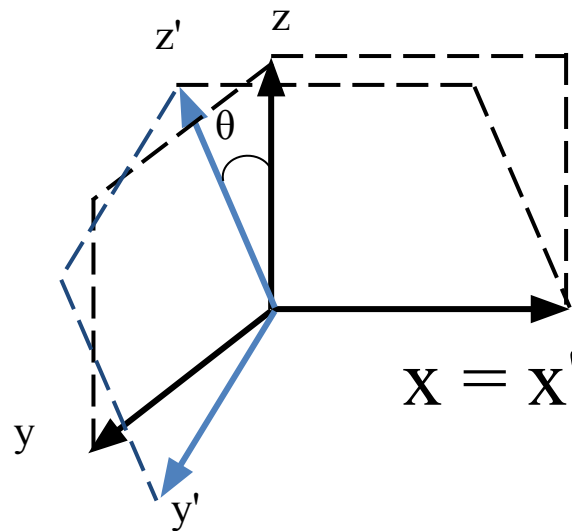
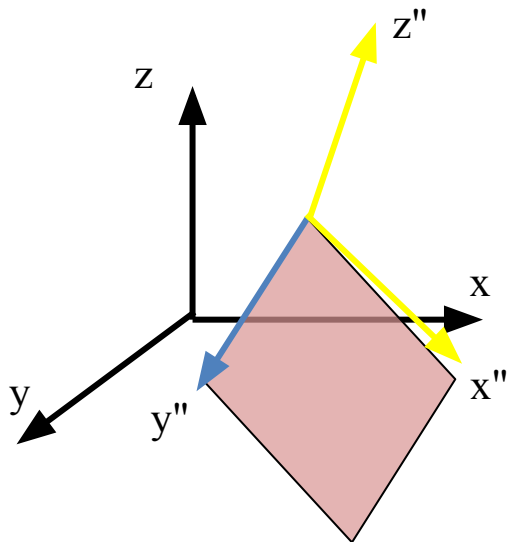


Проекции в однородных координатах

АксонOMETрические проекции

АксонOMETрические проекции могут реализовываться с помощью 2-х поворотов объекта и ортогонального проецирования (переноса) на плоскость, что аналогично повороту в пространстве относительно произвольной оси:

- а) поворот относительно одной оси,
- б) поворот относительно другой оси
- в) параллельная (ортогональная) проекция вдоль третьей оси.



АксонOMETрические проекции

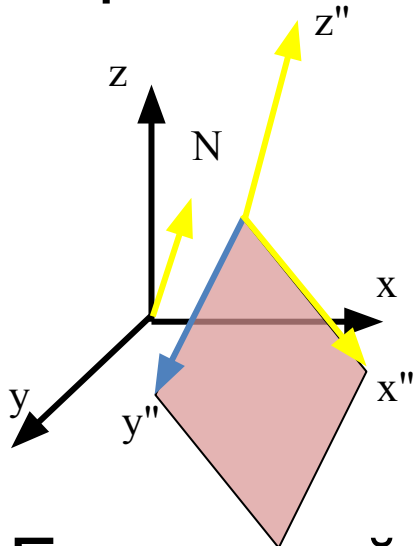
$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R_z(\gamma) = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{\text{orthXY}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\text{orthYZ}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad M_{\text{orthXZ}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

АксонOMETрические проекции

Плоскость задается единичным вектором нормали N . Проецируем на плоскость $X'Y'$.

Для совмещения произвольной оси вращения с осью z выполним поворот вокруг оси x и вокруг оси y —



$$R_y(\phi)R_x(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta & \cos\phi\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Единичный вектор Ox : $[1001]$, если его повернуть:

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta & 1 \end{bmatrix}$$

Единичный вектор Oy : $[0101]$, если его повернуть:

Координаты вектора единичной нормали являются ее направляющими косинусами.

Длины проекции вектора на плоскость:

$$X = \sqrt{X_{xy}'^2 + Y_{xy}'^2} = \sqrt{\cos^2\phi + \sin^2\phi\sin^2\theta} \quad Y = \sqrt{X_{xy}''^2 + Y_{xy}''^2} = \sqrt{0^2 + \cos^2\theta}$$

АксонOMETрические проекции

Для изометрии справедливо $p=r=q$, $3p^2=2$.

Тогда:

$$3 \cos^2 \theta = 2,$$

$$\theta \approx 35^\circ$$

$$\cos^2 \theta = \cos^2 \phi + \sin^2 \phi \sin^2 \theta,$$

$$\sin \phi = \frac{\sin^2 \theta}{1 - \sin^2 \theta} = 1/2$$

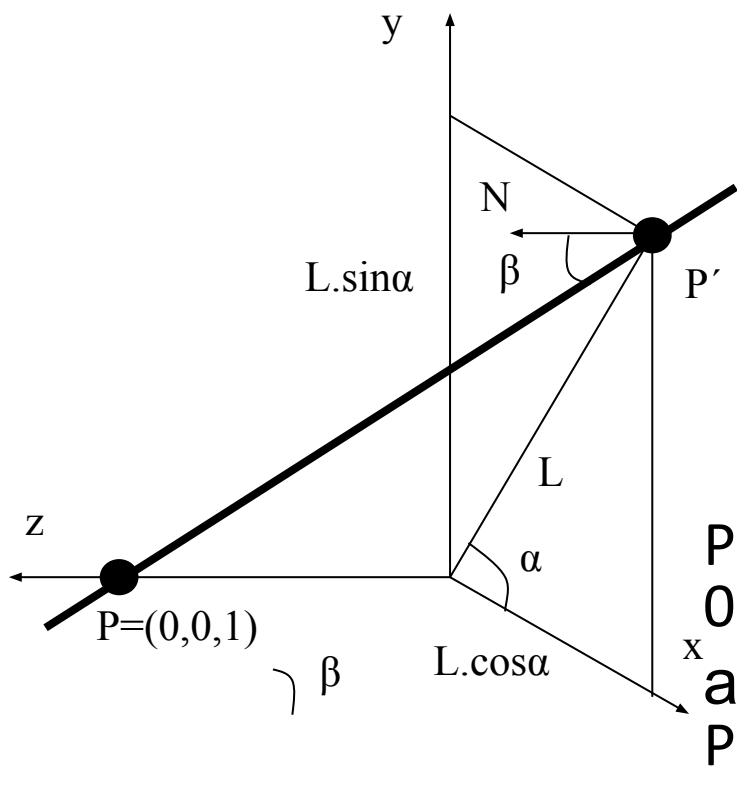
$$\phi \approx 45^\circ$$

Для диметрии справедливо: $p=r=2q$; $2p^2 + p^2/4 = 2$.

$$\theta \approx 20^\circ \quad \phi \approx 22^\circ$$

Тогда

Косоугольные проекции



Точка $P=(0,0,1)$ проецируется в точку P' .

Плоскость проекции совпадает с XOY .

Направление проецирования задаётся: $(L\cos\alpha, L\sin\alpha, -1), L=1/\tan(\beta)$;

β – угол между нормалью плоскости проекции и направлением лучей;

α – определяет горизонтальный угол, $P=(0,0,1)$ проецируется в $P'=(l\cos\alpha, l\sin\alpha, 0)$,

а произвольная точка $P(x,y,z)$ – в $P'(x_p, y_p, 0)$, где

$$y_p = y + z(l\sin\alpha)$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & l\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица косоугольного проецирования (в формате вектора-столбца)

Косоугольные проекции

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & l \cos \alpha & 0 \\ 0 & 1 & l \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Матрица косоугольной проекции для случая проецирования в плоскость $Z = 0$, выполняет:

1. плоскости с заданной координатой Z_0 переносятся вдоль оси X на $Z_0 \cdot L \cdot \cos \alpha$ и вдоль оси Y на $Z_0 \cdot L \cdot \sin \alpha$;
2. производится проецирование в плоскость $Z = 0$.

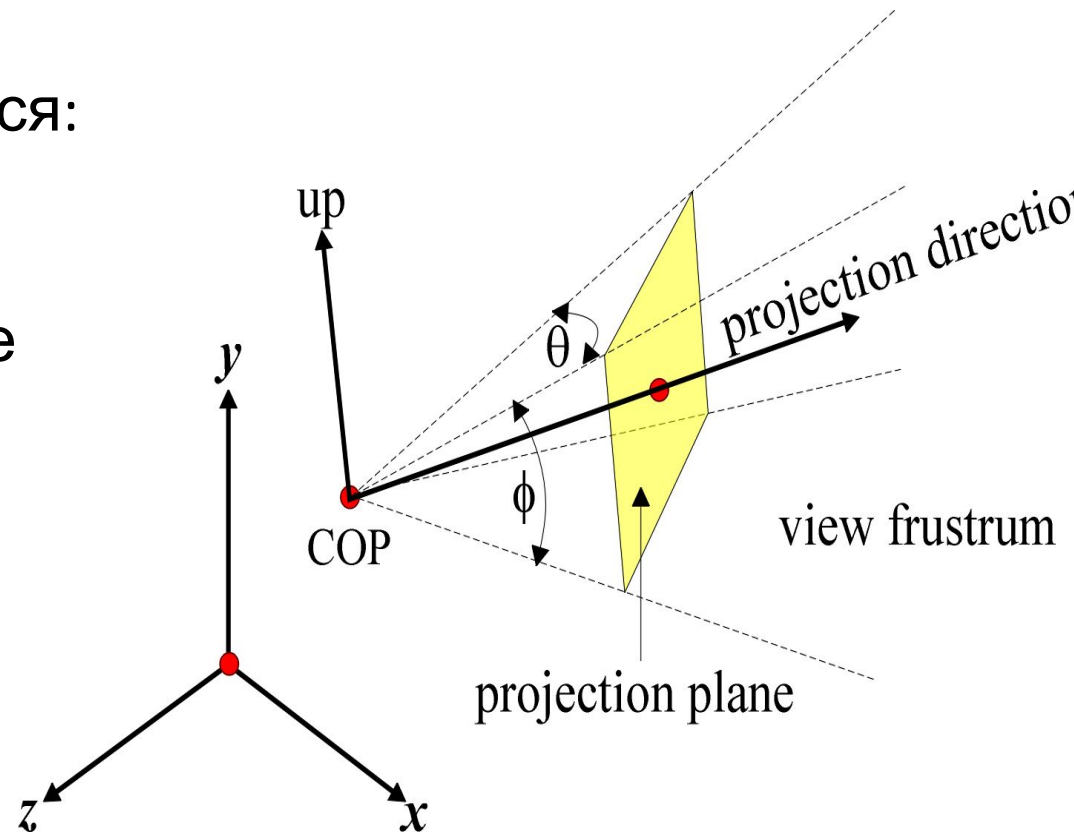
Варианты параллельных проекций формируются из полученной подстановкой значений L и углов α и β . Для фронтальной косоугольной диметрии $L = 1/2$, угол $\beta = 63.4^\circ$, угол $\alpha =$

Центральные проекции

Более сложные!

Для построения учитываются:

- ракурс;
- перспективы;
- объём видимости (в виде усечённой пирамиды) или угол обзора (по 2 координатам).



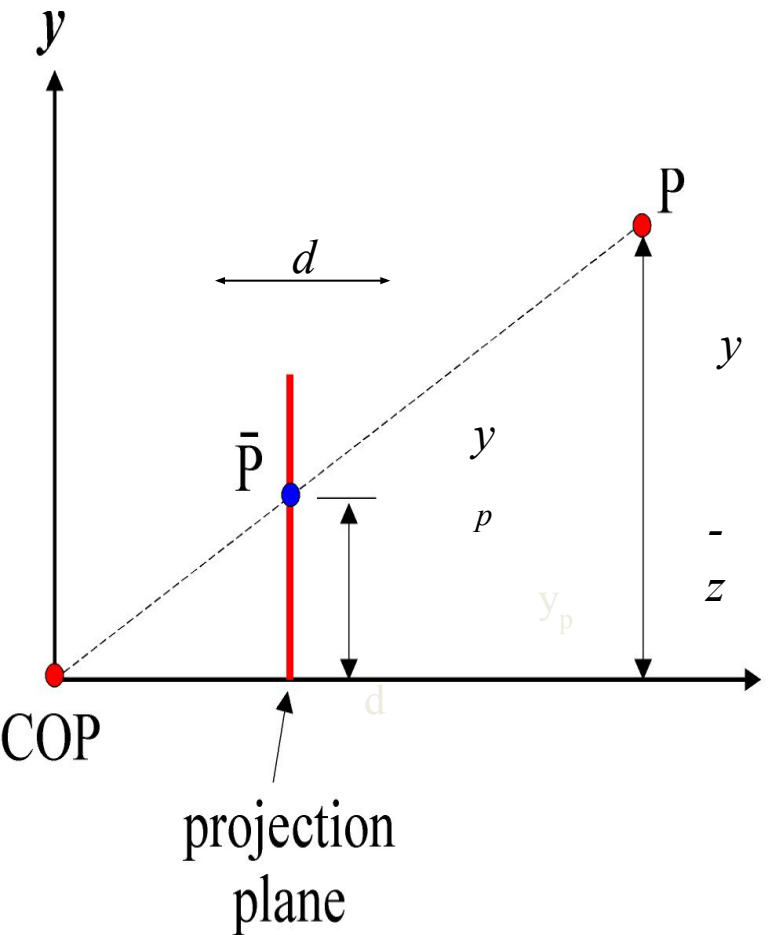
Параметры:

- центр проекции (centre of projection - COP);
- углы обзора (θ , ϕ);
- направление проецирования (нормаль к плоскости проекции);

Центральные проекции

Если поместить центр проекции в центр координат и направление взгляда ориентировать по положительному направлению оси $-z$, плоскость проекции разместить на оси z в точке с координатой $z = -d$, то:

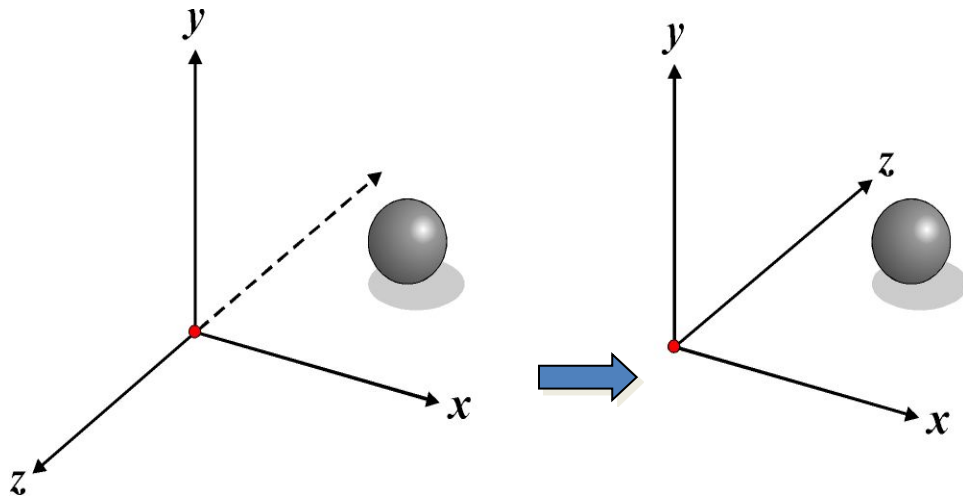
$$\frac{y}{z} = \frac{y_P}{d} \Rightarrow y_P = \frac{y}{z/d}$$



Аналогичное выражение имеет место и для $x_{P'}$ соответственно

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z/d \\ -d \\ 1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ z/d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Центральные проекции



$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{x}{z/d} \\ \frac{y}{z/d} \\ -d \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \\ z/d \end{bmatrix}$$

Проецирующая матрица

Перспектива

Отражение оси z для перехода в левую систему координат \Rightarrow увеличение z подразумевает увеличение расстояния до наблюдателя.

Центральные проекции

В зависимости от приложений могут использоваться различные механизмы для задания перспективных искажений:

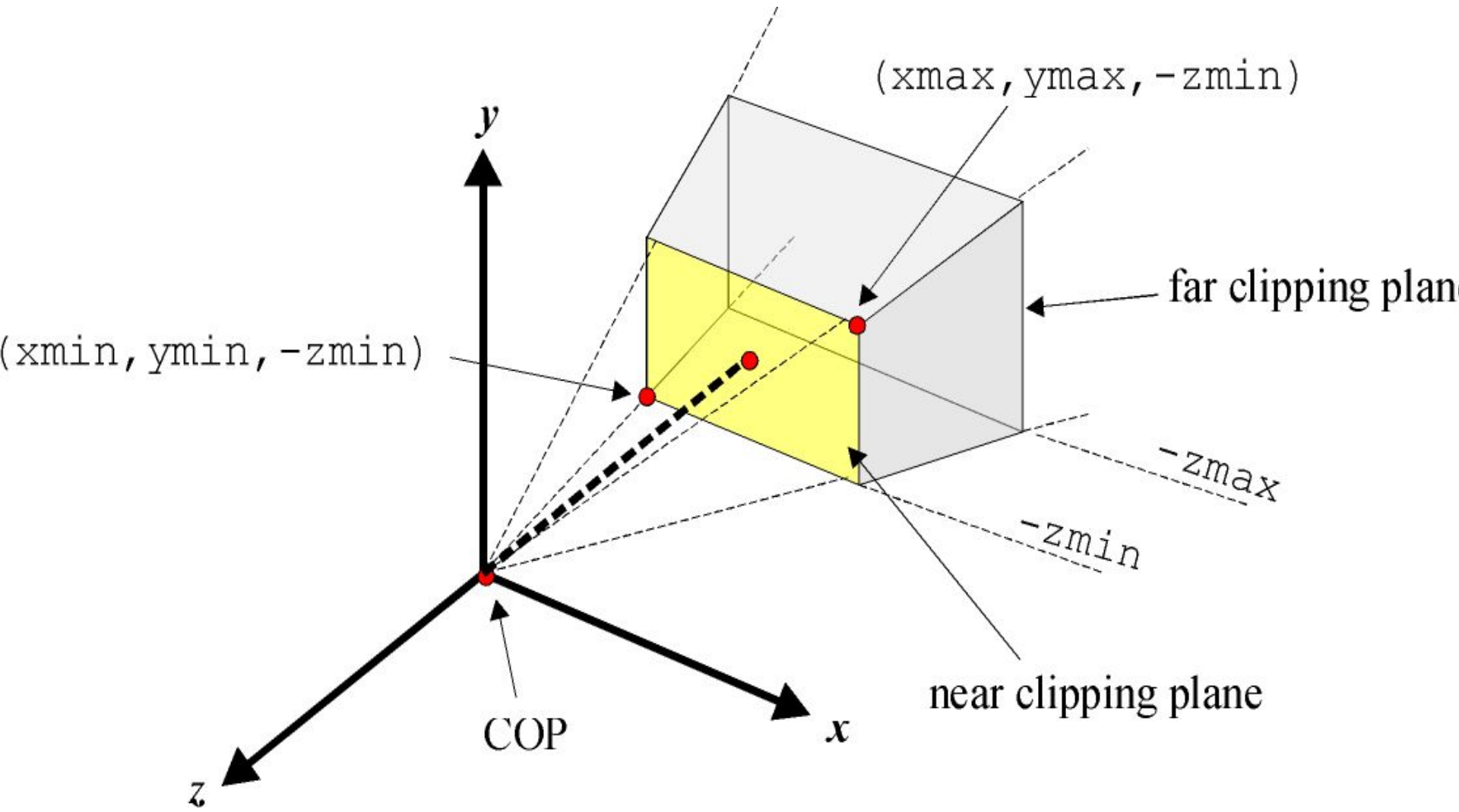
- углы обзора (*field of view*) могут быть получены из расстояния до плоскости проекции;
- направление обзора может быть получено, если точка сцены задаётся как точка наблюдения.

OpenGL предлагает несколько различных методов для задания перспективных проекций:

- `gluLookAt`,
- `glFrustum`,
- `gluPerspective`.

Центральные проекции

```
glFrustum(xmin, xmax, ymin, ymax, zmin, zmax);
```



glFrustum

Все точки на линии задаваемой z_{min} и координатами $(x_{\text{min}}, y_{\text{min}}, -z_{\text{min}})$ будут спроецированы в нижнюю левую точку устройства вывода.

Все точки на линии z_{max} (центр проекции) и $(x_{\text{max}}, y_{\text{max}}, -z_{\text{min}})$ будут соответствовать верхнему правому углу устройства вывода.

Направление наблюдения (viewing direction) всегда соответствует полуоси $-z$.

Отпадает необходимость строить симметричную пирамиду (раструб камеры):

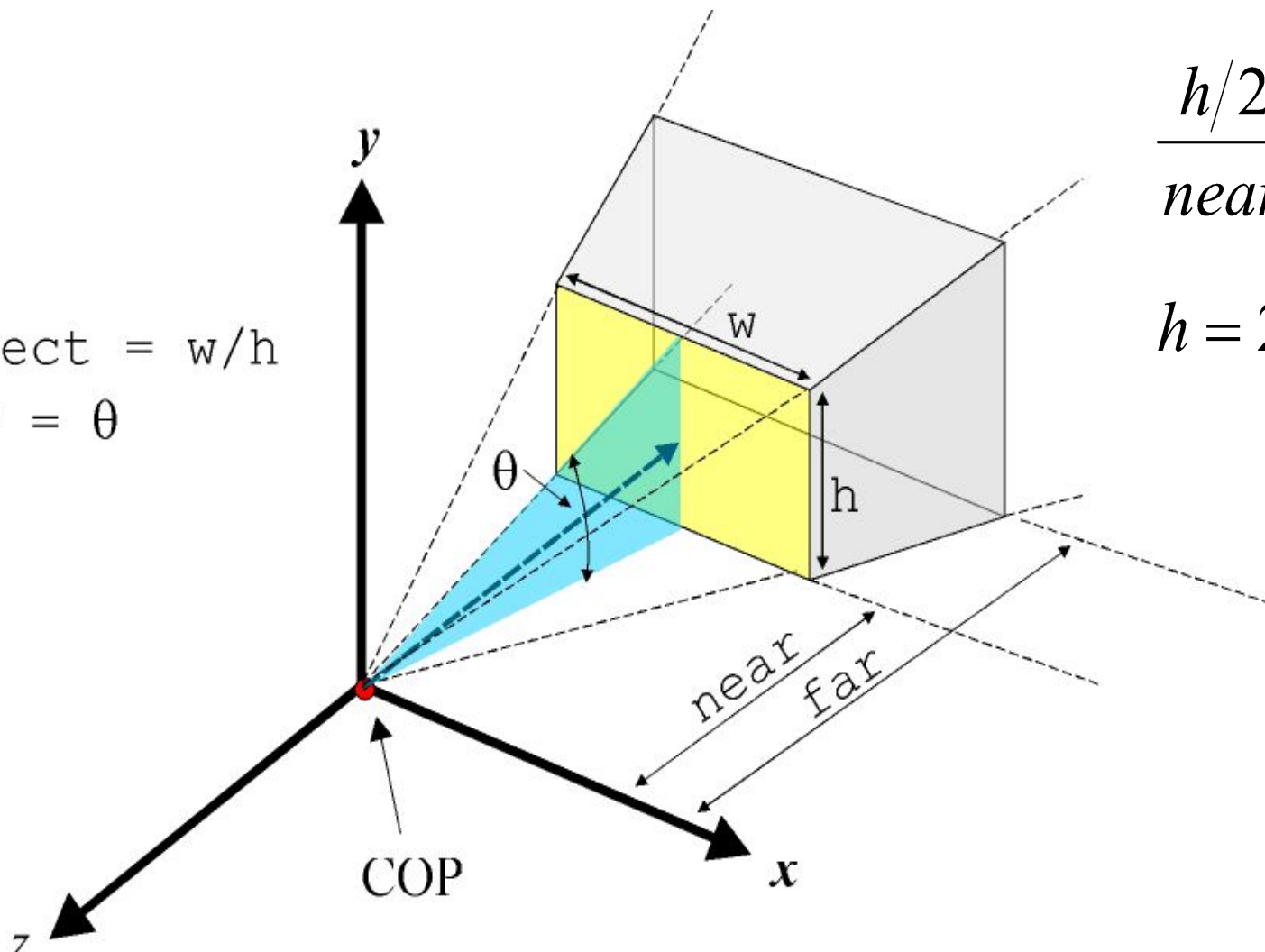
```
glFrustum(-1.0, 1.0, -1.0, 1.0, 5.0,  
50.0);
```

z_{min} и z_{max} определяются как **положительные** расстояния вдоль полуоси $-z$.

Центральные проекции

`gluPerspective(fov, aspect, near, far);`

`aspect = w/h`
`fov = θ`



$$\frac{h/2}{near} = \tan \frac{\theta}{2} \Rightarrow$$

$$h = 2near \tan \frac{\theta}{2}$$

gluPerspective

Предназначение функции упростить определение перспективных проекций.

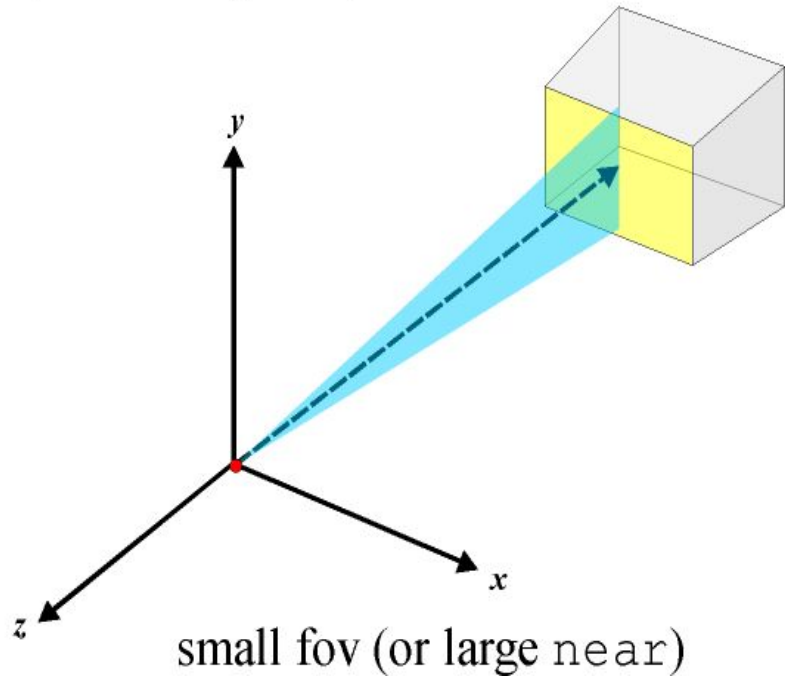
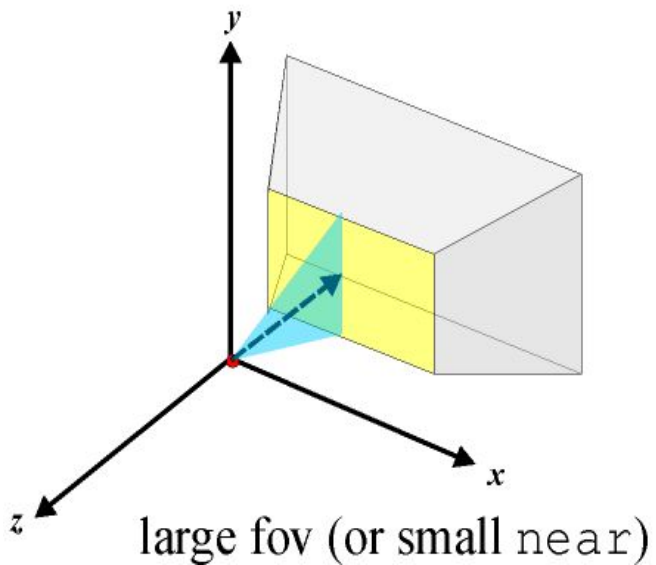
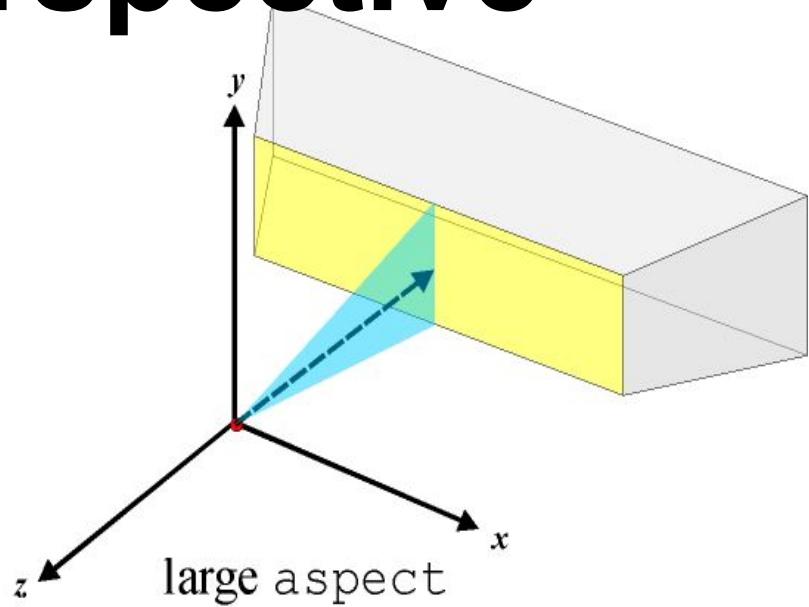
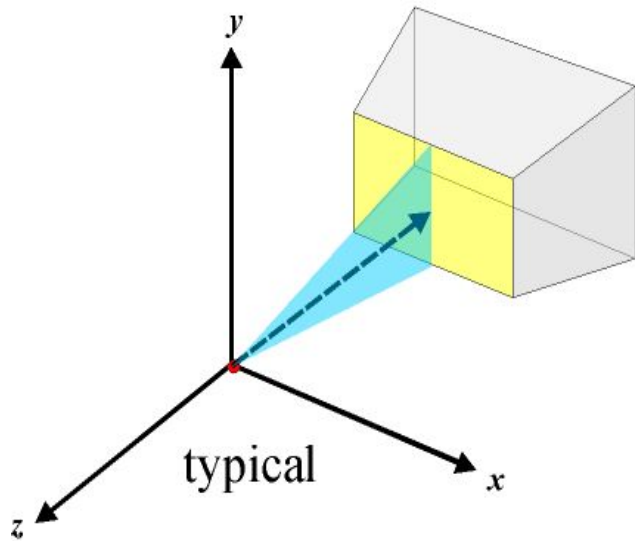
Позволяет создавать симметричные раструбы камеры (*symmetric frustrums*).

Точка наблюдения – в начале координат
направление взгляда – вдоль *-z* полуоси.

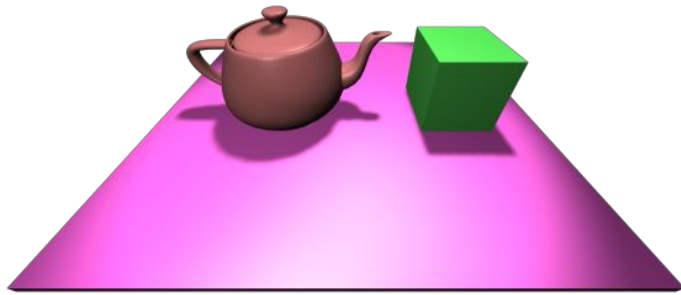
Угол обзора (*field of view*), *fov*, должен быть в пределах [0..180].

aspect позволяет создавать объём видимости (*view frustum*), который подгоняется под соотношение сторон (*aspect ratio*) устройства вывода, чтобы ликвидировать искажения.

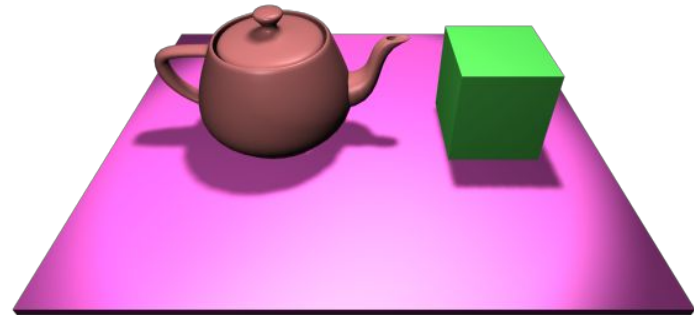
gluPerspective



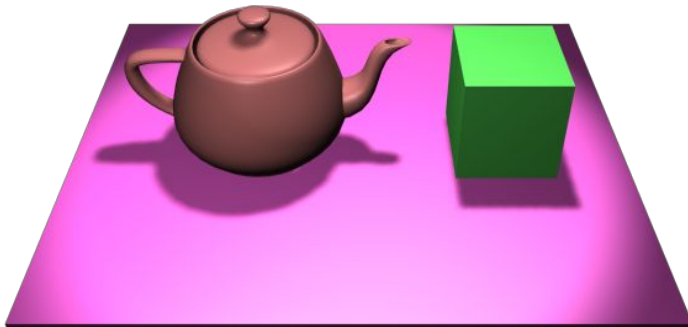
Примеры центральных проекций (Lens Configurations)



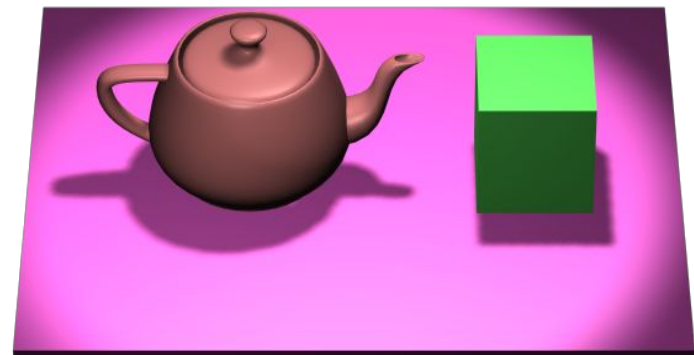
10mm Lens (fov = 122°)



20mm Lens (fov = 84°)



35mm Lens (fov = 54°)



200mm Lens (fov = 10°)