

# **ЯВНАЯ РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ПОЛНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА**

**Аспиранты: Кононов Сергей Николаевич,  
Левунина Эльвира Сайфулловна**

**Руководитель: Баутин Сергей Петрович**

**г. Снежинск, 2018**

# Численный метод расчёта

---

Группой учёных под руководством Баутина С.П. в ряде работ предлагается математическое описание восходящих закрученных потоков, учитывающее максимально возможное количество влияющих факторов.

В [1]\* полная система уравнений Навье-Стокса (НСУНС) для вязкого теплопроводного газа представлена в цилиндрических координатах. В предложенном виде не представляется возможным рассчитать поведение газа при различных начальных и граничных условиях. Поведение воздушных масс согласно рассмотренной модели для конкретных случаев ведётся численными методами.

\* - Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси: монография / С.П.Баутин, С.Л.Дерябин, И.Ю.Крутова, А.Г.Обухов. – Екатеринбург: УрГУПС, 2017. – 335с.

# ПСУНС в цилиндрических координатах

$$\rho_t + \zeta \rho_r + \frac{\eta}{r} \rho_\varphi + w \rho_z + \rho \left( \zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) = 0,$$

уравнение неразрывности

$$\begin{aligned} \zeta_t + \zeta \zeta_r + \frac{\eta}{r} \zeta_\varphi - \frac{\eta^2}{r} + w \zeta_z + \frac{T}{\gamma \rho} \rho_r + \frac{1}{\gamma} T_r = a \eta - b \cos \varphi w + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \zeta_{rr} + \frac{3}{4r^2} \zeta_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \zeta_r - \frac{1}{r^2} \zeta + \frac{1}{4r} \eta_{r\varphi} - \frac{7}{4r^2} \eta_\varphi + \frac{3}{4} \zeta_{zz} + \frac{1}{4} w_{rz} \right), \end{aligned}$$

радиальная  
скорость

$$\begin{aligned} \eta_t + \zeta \eta_r + \frac{\zeta \eta}{r} + \frac{\eta}{r} \eta_\varphi + w \eta_z + \frac{T}{\gamma r \rho} \rho_\varphi + \frac{1}{\gamma r} T_\varphi = -a \zeta + b \sin \varphi w + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{1}{4r} \zeta_{r\varphi} + \frac{7}{4r^2} \zeta_\varphi + \frac{3}{4} \eta_{rr} + \frac{1}{r^2} \eta_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r} \eta_r - \frac{3}{4r^2} \eta + \frac{3}{4} \eta_{zz} + \frac{1}{4r} w_{\varphi z} \right), \end{aligned}$$

окружная  
скорость

$$\begin{aligned} w_t + \zeta w_r + \frac{\eta}{r} w_\varphi + w w_z + \frac{T}{\gamma \rho} \rho_z + \frac{1}{\gamma} T_z = b \cos \varphi \zeta - b \sin \varphi \eta - g + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left( \frac{1}{4} \zeta_{rz} + \frac{1}{4r} \zeta_z + \frac{1}{4r} \eta_{\varphi z} + \frac{3}{4} w_{rr} + \frac{3}{4r^2} w_{\varphi\varphi} + \frac{3}{4r} w_r + w_{zz} \right), \end{aligned}$$

вертикальная  
скорость

$$T_t + \zeta T_r + \frac{\eta}{r} T_\varphi + w T_z + (\gamma - 1) T \left( \zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) =$$

уравнение энергии

$$= \frac{\kappa_0}{\rho} \left( T_{rr} + \frac{1}{r^2} T_{\varphi\varphi} + T_{zz} + \frac{1}{r} T_r \right) +$$

$$+ \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ \left[ \cos 2\varphi \left( \zeta_r - \frac{1}{r} \eta_\varphi - \frac{1}{r} \zeta \right) - \sin 2\varphi \left( \eta_r + \frac{1}{r} \zeta_\varphi - \frac{1}{r} \eta \right) \right]^2 + \right.$$

$$+ \left[ \cos^2 \varphi \zeta_r - \cos \varphi \sin \varphi \eta_r - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \eta_\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \zeta + \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \eta - w_z \right]^2 +$$

$$+ \left[ \sin^2 \varphi \zeta_r + \cos \varphi \sin \varphi \eta_r + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \zeta_\varphi + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \eta_\varphi + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos^2 \varphi}{r} \zeta - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \eta - w_z \right]^2 +$$

$$+ \frac{3}{2} \left[ \sin 2\varphi \left( \zeta_r - \frac{1}{r} \eta_\varphi - \frac{1}{r} \zeta \right) + \cos 2\varphi \left( \eta_r + \frac{1}{r} \zeta_\varphi - \frac{1}{r} \eta \right) \right]^2 +$$

$$+ \frac{3}{2} \left[ \left( \zeta_z + w_r \right)^2 + \left( \eta_z + \frac{1}{r} w_\varphi \right)^2 \right] \}.$$

# Конечно-разностная схема

---

Регулярная сетка в цилиндрических координатах задаётся шагом по длине радиуса  $hr$ , высоте выбранного объёма  $hz$  и равными углами поворота плоскости  $\alpha$ , проходящей через ось симметрии. Плотность размещения узлов сетки растёт в направлении оси симметрии.

Производится замена дифференциального уравнения на конечно-разностную аппроксимацию, позволяющую с заданной точностью находить значения параметров уравнения в узлах сетки на следующем временном слое в зависимости от предыдущего значения в исходном и соседних узлах.

# Конечно-разностная схема

Замена частных производных по координатам:

$i, j, k$  - номера шагов по  $r, \varphi, z$  соответственно,

$hr$  - шаг по  $r$ ,  $\alpha$  - шаг по  $\varphi$ ,  $hz$  - шаг по  $z$

$n$  - номер шага по времени,  $\tau$  - шаг по времени.

$$\frac{\partial f}{\partial r} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - f_{i-1,j,k}^n}{2 \cdot hr}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} \approx \frac{f_{i+1,j,k}^n - 2f_{i,j,k}^n + f_{i-1,j,k}^n}{hr^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \varphi} \approx \frac{f_{i+1,j+1,k}^n - f_{i-1,j+1,k}^n - f_{i+1,j-1,k}^n + f_{i-1,j-1,k}^n}{4hr \cdot \alpha}$$

# Уравнение неразрывности

$$\rho_t + \zeta \rho_r + \frac{\eta}{r} \rho_\varphi + w \rho_z + \rho \left( \zeta_r + \frac{\zeta}{r} + \frac{\eta_\varphi}{r} + w_z \right) = 0,$$

$i, j, k$  - номера шагов по  $r, \varphi, z$  соответственно,

$hr$  - шаг по  $r$ ,  $\alpha$  - шаг по  $\varphi$ ,  $hz$  - шаг по  $z$

$n$  - номер шага по времени,  $\tau$  - шаг по времени.

$$\begin{aligned} \rho_{i,j,k}^{n+1} = & \rho_{i,j,k}^n - \tau \zeta_{i,j,k}^n \cdot \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\tau \eta_{i,j,k}^n}{ihr} \cdot \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \\ & - \tau \omega_{i,j,k}^n \cdot \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \tau \rho_{i,j,k}^n \left( \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} + \right. \\ & \left. + \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2ihr\alpha} + \frac{\omega_{i,j,k+1}^n - \omega_{i,j,k-1}^n}{2hz} \right) \end{aligned}$$



# Радиальная скорость

$$\zeta_t + \zeta \zeta_r + \frac{\eta}{r} \zeta_\varphi - \frac{\eta^2}{r} + w \zeta_z + \frac{T}{\gamma \rho} \rho_r + \frac{1}{\gamma} T_r = a \eta - b \cos \varphi w +$$

$$+ \frac{\mu_0}{\rho} \left( \zeta_{rr} + \frac{3}{4r^2} \zeta_{\varphi\varphi} + \frac{1}{r} \zeta_r - \frac{1}{r^2} \zeta + \frac{1}{4r} \eta_{r\varphi} - \frac{7}{4r^2} \eta_\varphi + \frac{3}{4} \zeta_{zz} + \frac{1}{4} w_{rz} \right)$$

$$\frac{\zeta_{i,j,k}^{n+1} - \zeta_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \frac{(\eta_{i,j,k}^n)^2}{ihr} -$$

$$- \omega_{i,j,k}^n \frac{\zeta_{i,j,k+1}^n - \zeta_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i+1,j,k}^n - \rho_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2\gamma hr} + a \eta_{i,j,k}^n -$$

$$- b \cos(j\alpha) w_{i,j,k}^n + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left( \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i-1,j,k}^n}{hr^2} + \frac{3}{4(ihr)^2} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \right.$$

$$+ \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2ihr^2} - \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{(ihr)^2} + \frac{\eta_{i+1,j+1,k}^n - \eta_{i-1,j+1,k}^n - \eta_{i+1,j-1,k}^n + \eta_{i-1,j-1,k}^n}{16ih^2\alpha} -$$

$$- \frac{7}{4(ihr)^2} \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \frac{3(\zeta_{i,j,k+1}^n - 2\zeta_{i,j,k}^n + \zeta_{i,j,k-1}^n)}{4hz^2} +$$

$$\left. + \frac{w_{i+1,j,k+1}^n - w_{i-1,j,k+1}^n - w_{i+1,j,k-1}^n + w_{i-1,j,k-1}^n}{16hrhz} \right)$$

# Окружная скорость

$$\begin{aligned}
 & \frac{\eta_{i,j,k}^{n+1} - \eta_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n \zeta_{i,j,k}^n}{ihr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n \eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{ihr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n \eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} \\
 & - \omega_{i,j,k}^n \frac{\eta_{i,j,k+1}^n - \eta_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma i h r \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i,j+1,k}^n - \rho_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2i h r \gamma \alpha} - a \zeta_{i,j,k}^n + \\
 & + b \sin(j\alpha) w_{i,j,k}^n + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left( \frac{\zeta_{i+1,j+1,k}^n - \zeta_{i-1,j+1,k}^n - \zeta_{i+1,j-1,k}^n + \zeta_{i-1,j-1,k}^n}{16i h r^2 \alpha} + \right. \\
 & \left. + \frac{7}{4(i h r)^2} \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} + \frac{3}{4} \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - 2\eta_{i,j,k}^n + \eta_{i-1,j,k}^n}{h r^2} + \frac{1}{(i h r)^2} \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - 2\eta_{i,j,k}^n + \eta_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{3}{4} \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2i h r^2} - \frac{3}{4} \frac{\eta_{i,j,k}^n}{(i h r)^2} + \frac{3(\eta_{i,j,k+1}^n - 2\eta_{i,j,k}^n + \eta_{i,j,k-1}^n)}{4h z^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{w_{i,j+1,k+1}^n - w_{i,j+1,k-1}^n - w_{i,j-1,k+1}^n + w_{i,j-1,k-1}^n}{16i h r \alpha h z} \right)
 \end{aligned}$$



# Вертикальная скорость

$$\begin{aligned}
 & \frac{\omega_{i,j,k}^{n+1} - \omega_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{\omega_{i+1,j,k}^n - \omega_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \frac{\omega_{i,j+1,k}^n - \omega_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \\
 & - \omega_{i,j,k}^n \frac{\omega_{i,j,k+1}^n - \omega_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k}^n}{\gamma ihr \rho_{i,j,k}^n} \frac{\rho_{i,j,k+1}^n - \rho_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2hz\gamma} + \\
 & + b \cos(j\alpha) \zeta_{i,j,k}^n - b \sin(j\alpha) \eta_{i,j,k}^n - g + \frac{\mu_0}{\rho_{i,j,k}^n} \cdot \\
 & \cdot \left( \frac{\zeta_{i+1,j,k+1}^n - \zeta_{i-1,j,k+1}^n - \zeta_{i+1,j,k-1}^n + \zeta_{i-1,j,k-1}^n}{16hrhz} + \frac{1}{4ihr} \frac{\zeta_{i,j,k+1}^n - \zeta_{i,j,k-1}^n}{2hz} + \right. \\
 & + \frac{\eta_{i,j+1,k+1}^n - \eta_{i,j+1,k-1}^n - \eta_{i,j-1,k+1}^n + \eta_{i,j-1,k-1}^n}{16ihr\alpha z} + \frac{3}{4} \frac{\omega_{i+1,j,k}^n - 2\omega_{i,j,k}^n + \omega_{i-1,j,k}^n}{hr^2} + \\
 & \left. + \frac{3}{4(ihr)^2} \frac{\omega_{i,j+1,k}^n - 2\omega_{i,j,k}^n + \omega_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \frac{3}{4ihr} \frac{\omega_{i+1,j,k}^n - \omega_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{(\omega_{i,j,k+1}^n - 2\omega_{i,j,k}^n + \omega_{i,j,k-1}^n)}{hz^2} \right)
 \end{aligned}$$

# Уравнение энергии

$$\begin{aligned}
 & \frac{T_{i,j,k}^{n+1} - T_{i,j,k}^n}{\tau} = -\zeta_{i,j,k}^n \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \frac{T_{i,j+1,k}^n - T_{i,j-1,k}^n}{2\alpha} - \omega_{i,j,k}^n \frac{T_{i,j,k+1}^n - T_{i,j,k-1}^n}{2hz} - \\
 & - (\gamma - 1) T_{i,j,k}^n \left( \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} + \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} + \frac{\omega_{i,j,k+1}^n - \omega_{i,j,k-1}^n}{2hz} \right) + \\
 & + \frac{\varkappa_0}{\rho_{i,j,k}^n} \left( \frac{T_{i+1,j,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i-1,j,k}^n}{hr^2} + \frac{1}{i^2 hr^2} \frac{T_{i,j+1,k}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j-1,k}^n}{\alpha^2} + \frac{T_{i,j,k+1}^n - 2T_{i,j,k}^n + T_{i,j,k-1}^n}{hz^2} + \frac{T_{i+1,j,k}^n - T_{i-1,j,k}^n}{2ihr^2} \right) + \\
 & + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho_{i,j,k}^n} \left\{ \left[ \cos 2j\alpha \left( \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} - \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) - \right. \right. \\
 & - \left. \left. \sin 2j\alpha \left( \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i hr} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) \right]^2 + \right. \\
 & + \left[ \cos^2 j\alpha \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} - \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i h} + \right. \\
 & + \left. \sin^2 j\alpha \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i h} + \sin^2 j\alpha \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} + \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} - \frac{\omega_{i,j,k+1}^n - \omega_{i,j,k-1}^n}{2hz} \right]^2 + \\
 & + \left[ \sin^2 j\alpha \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i h} + \right. \\
 & + \left. \cos^2 j\alpha \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i h} + \cos^2 j\alpha \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} - \cos j\alpha \sin j\alpha \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ih} - \frac{\omega_{i,j,k+1}^n - \omega_{i,j,k-1}^n}{2h} \right]^2 + \\
 & + \frac{3}{2} \left[ \sin 2j\alpha \left( \frac{\zeta_{i+1,j,k}^n - \zeta_{i-1,j,k}^n}{2h} - \frac{\eta_{i,j+1,k}^n - \eta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i h} - \frac{\zeta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) + \right. \\
 & + \left. \cos 2j\alpha \left( \frac{\eta_{i+1,j,k}^n - \eta_{i-1,j,k}^n}{2hr} + \frac{\zeta_{i,j+1,k}^n - \zeta_{i,j-1,k}^n}{2\alpha i h} - \frac{\eta_{i,j,k}^n}{ihr} \right) \right]^2 + \\
 & + \left. \frac{3}{2} \left[ \left( \frac{\zeta_{i,j,k+1}^n - \zeta_{i,j,k-1}^n}{2hz} + \frac{\omega_{i+1,j,k}^n - \omega_{i-1,j,k}^n}{2hr} \right)^2 + \left( \frac{\eta_{i,j,k+1}^n - \eta_{i,j,k-1}^n}{2hz} + \frac{\omega_{i,j+1,k}^n - \omega_{i,j-1,k}^n}{2ih^2} \right)^2 \right] \right\}
 \end{aligned}$$

# Выводы

---

1. Решение полученной системы алгебраических уравнений описывает поведение воздушных масс в поле силы тяжести с учётом силы Кориолиса.
2. Получена явная схема вычислений. Она допускает распараллеливание вычислительных процессов

# Список использованной литературы

---

1. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси: монография / С.П.Баутин, С.Л.Дерябин, И.Ю.Крутова, А.Г.Обухов. – Екатеринбург: УрГУПС, 2017. – 335с.
2. В.М.Ковеня, Д.В.Чирков. Методы конечных разностей и конечных объемов для решения задач математической физики. Электронное учебное пособие. — Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2013. — 87 с.

---

**Спасибо за  
внимание!**

---

# Сила Кориолиса и ее проявления

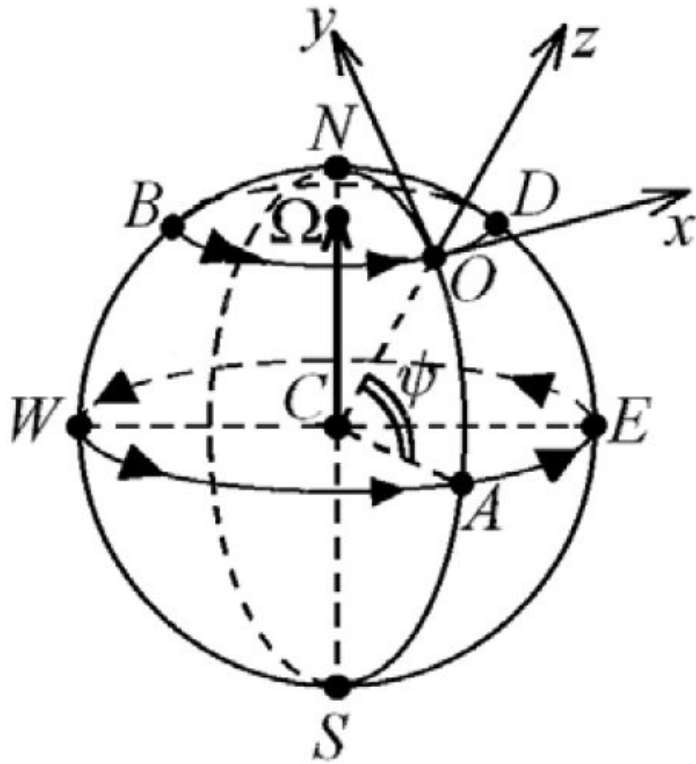


Рисунок 3 – Декартова система координат, вращающаяся вместе с Землёй

В работах группы учёных [Баутин С.П., Крутова И.Ю., Обухов А.Г., Баутин К.В. Разрушительные атмосферные вихри: теоремы, расчёты, эксперименты, 2013 и др.] основной причиной, приводящей к закручиванию восходящих потоков, является вращение Земли вокруг своей оси, которое проявляется через силу Кориолиса (СК).

Будем полагать Землю шаром, у которого ось вращения совпадает с земной осью юг-север.

- Описание происходящих в воздухе явлений происходит с привязкой к точке  $O$ .
- Система  $x, y, z$  образует правую тройку векторов.
- Скорость вращения Земли описывается вектором угловой скорости  $\Omega$ .

$$\Omega = (0, \Omega_2, \Omega_3)$$

$$\Omega_2 = \Omega \cos \psi, \Omega_3 = \Omega \sin \psi,$$

$$\text{модуль } \Omega = \frac{2\pi}{24} \frac{1}{\text{ч}} = 0.26180 \frac{1}{\text{ч}}$$

# Полная система уравнений Навье-Стокса

...Запишем полную систему уравнений Навье-Стокса в размерных переменных, учитывающую законы сохранения, вязкость и теплопроводность реального воздуха в поле действия сил тяжести и с учётом силы Кориолиса [Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. - Екатеринбург: УрГУПС - 2017].

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\rho}_t + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} = 0, \\ \tilde{\mathbf{V}}_t + (\tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla) \tilde{\mathbf{V}} + R \frac{\tilde{T}}{\tilde{\rho}} \nabla \tilde{\rho} + R \nabla \tilde{T} = \tilde{\mathbf{g}} - 2\tilde{\boldsymbol{\Omega}} \times \tilde{\mathbf{V}} + \\ + \frac{\tilde{\mu}}{\tilde{\rho}} \left[ \frac{1}{3} \nabla (\operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}}) + \Delta \tilde{\mathbf{V}} \right], \\ \tilde{T}_t + \tilde{\mathbf{V}} \cdot \nabla \tilde{T} + \frac{R}{\tilde{c}_v} \tilde{T} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{V}} = \frac{\tilde{\kappa}}{\tilde{\rho}} \Delta \tilde{T} + \\ + \frac{2\tilde{\mu}}{3\tilde{c}_v \tilde{\rho}} \left\{ [(\tilde{u}_x - \tilde{v}_y)^2 + (\tilde{u}_x - \tilde{\omega}_z)^2 + (\tilde{v}_y - \tilde{\omega}_z)^2] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} [(\tilde{u}_y + \tilde{v}_x)^2 + (\tilde{u}_z + \tilde{\omega}_x)^2 + (\tilde{v}_z + \tilde{\omega}_y)^2] \right\}. \end{array} \right. \quad (1)$$



# Полная система уравнений Навье-Стокса

...С учётом формул (6) соотношения (5) переходят в следующую систему уравнений Навье-Стокса в безразмерных переменных в поле действия сил тяжести и с учётом силы Кориолиса [Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. - Екатеринбург: УрГУПС - 2017].

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_t + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \\ \mathbf{V}_t + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{T}{\gamma \rho} \nabla \rho + \frac{1}{\gamma} \nabla T = \mathbf{g} - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \\ + \frac{\mu_0}{\rho} \left[ \frac{1}{4} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{V}) + \frac{3}{4} \Delta \mathbf{V} \right], \\ T_t + \mathbf{V} \cdot \nabla T + (\gamma - 1) T \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\kappa_0}{\rho} \Delta T + \\ + \frac{\mu_0 \gamma (\gamma - 1)}{2\rho} \left\{ [(u_x - v_y)^2 + (u_x - \omega_z)^2 + (v_y - \omega_z)^2] + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} [(u_y + v_x)^2 + (u_z + \omega_x)^2 + (v_z + \omega_y)^2] \right\}. \end{array} \right. \quad (7)$$