Стандартные способы решения уравнений и неравенств (10-11 классы)

Шевкин Александр Владимирович,
Заслуженный учитель РФ, лауреат премии и грантов мэрии Москвы в области образования, к.п.н., с.н.с., стаж работы в школе 44 года, один из авторов учебников математики серии «МГУ-школе», С.М. Никольский и др., Просвещение.
avshevkin@mail.ru www.shevkin.ru

Уравнения, неравенства и их системы

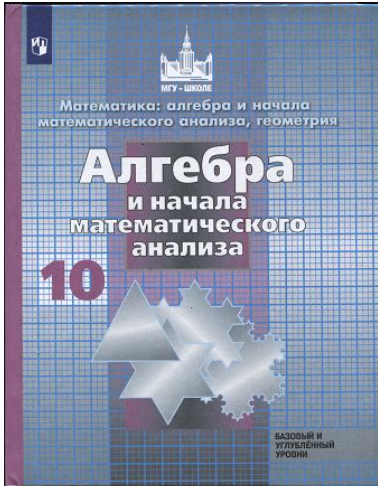
Уважаемые коллеги!

Речь пойдёт о способах решения уравнений, неравенств и их систем, которые осваивают в школе при обучении по любой программе обучения математике. Когда мы писали учебники «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов (С.М. Никольский и др.), то у нас был такой ориентир: 10 класс — обучаем уравнениям, неравенствам, системам на уровне, достаточном для поступления в инженерный вуз. А 11 класс (глава 2) — это уже более сложная и тонкая подготовка к поступлению в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке школьников. Сегодня говорим, ориентируясь на содержание наших учебников для 10 класса.

Рациональные уравнения

В начале 10 класса надо повторить квадратные и рациональные уравнения. Квадратное уравнение: формулы корней (черед D и $\frac{D}{4}$), теоремы Виета. Рациональные уравнения можно решать по-разному.

Мы не умножаем на функцию. Сначала узнаём, когда числитель дроби равен нулю, решаем уравнение-следствие, потом проверяем, не обращают ли найденные корни знаменатель дроби в нуль. При этом не ищем ОДЗ. Да и проверка на принадлежность корня уравнения-следствия ОДЗ исходного уравнения не является гарантией, что корни уравнения-следствия найдены верно.



С-3. Квадратное уравнение

Из этой самостоятельной работы С-3 рассмотрим только одно задание, оно «выстрелит» в задаче с параметром. Далее почти все примеры из ДМ-10.

3. Если квадратное уравнение $x^2 - 12x + 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то, не вычисляя их, найдите значение числового выражения $(x_1 - x_2)^2$.

С-3. Квадратное уравнение

Из этой самостоятельной работы С-3 рассмотрим только одно задание, оно «выстрелит» в задаче с параметром. Далее почти все примеры из ДМ-10.

3. Если квадратное уравнение $x^2 - 12x + 2 = 0$ имеет корни x_1 и x_2, то, не вычисляя их, найдите значение числового выражения $(x_1 - x_2)^2$.

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 144 - 8 = 136.$

Ответ. 136.

В других вариантах надо найти $x_1^2 + x_2^2$, $x_1^3x_2 + x_1x_2^3$, $x_1^3 + x_2^3$.

С-5. Рациональные уравнения

Решите уравнение:

1. а) $\frac{x^2-36}{x^3+4x^2+36}=0.$

Решаем уравнение-следствие $x^2-36=0$, получаем два его корня 6 и -6, делаем проверку.

6 не обращает в нуль знаменатель, это корень исходного уравнения;

$(-6)^3+4(-6)^2+36=36\cdot(-6+4+1)\neq 0;$ -6 — тоже корень исходного уравнения.

Ответ. -6 ; 6.

С-5. Рациональные уравнения

3. $\frac{x^2+3x}{x+6} - \frac{16}{x-5} + \frac{186}{x^2+x-30} = x - 2.$

После переноса слагаемых в левую часть уравнения получим уравнение вида «дробь равна нулю».

С-5. Рациональные уравнения

3. $\frac{x^2+3x}{x+6} - \frac{16}{x-5} + \frac{186}{x^2+x-30} = x - 2.$

После переноса слагаемых в левую часть уравнения получим уравнение вида «дробь равна нулю».

Приравняем числитель дроби к нулю и после равносильных преобразований получим уравнение

$x^2 - x - 30 = 0.$

Это уравнение имеет корни -5 и 6, они обращают в нуль знаменатели дробей в левой части уравнения. Это корни исходного уравнения.

Ответ. -5; 6.

Рациональные уравнения

Ещё один способ перейти к уравнению-следствию: замена нулём разности функций, определённых не при любом x.

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=-\frac{3}{2}.$$

Рациональные уравнения

Ещё один способ перейти к уравнению-следствию: замена нулём разности функций, определённых не при любом x.

$$\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}=-\frac{3}{2}.$$

Каждую из дробей представим в виде разности.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}=-\frac{3}{2},$$

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+3}=-\frac{3}{2}.$$

Полученное уравнение имеет корни -1 и -2, но эти корни уравнения-следствия обращают в нуль знаменатели дробей в левой части исходного уравнения, оно не имеет корней.

Ответ. Нет корней.

Рациональные уравнения

Мы только что сильно «сэкономили» на преобразованиях при решении уравнения. Ещё один пример «экономии».

$$x + \frac{1}{x} = 2.$$

Здесь $x > 0$, а мы знаем утверждение: если $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \geq 2$. Причём $x + \frac{1}{x} = 2$ лишь при $x = 1$. Уравнение имеет единственный корень 1.

Теперь решим уравнение

$$x^2 - 5x + 7 + \frac{1}{x^2 - 5x + 7} = 2.$$

Выполнив замену $y = x^2 - 5x + 7$, придём к уравнению

Рациональные уравнения

$$y + \frac{1}{y} = 2,$$

имеющему единственный корень 1.

Рациональные уравнения

$$y + \frac{1}{y} = 2,$$

имеющему единственный корень 1.

Решим уравнение

$$x^2 - 5x + 7 = 1.$$

Получим его корни 2 и 3, они не обращают в нуль знаменатель дроби в уравнении

$$x^2 - 5x + 7 + \frac{1}{x^2 - 5x + 7} = 2.$$

Следовательно, это корни исходного уравнения.

Ответ. 2; 3.

С-6*. Замена неизвестного при решении рациональных уравнений

Решите уравнение **(1-2)**:

1. а) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

б) $(x + 97)^2 + 34(x + 97) + 120 = 0$;

в) $(x^2 - 4x)^2 + 15(x^2 - 4x) + 36 = 0$;

г) $x(x + 2)(x + 3)(x + 5) = 72$.

Задания а)-в) понятные, для них есть аналогичные задания, решения, разобранные в первой части ДМ-10, в г) надо предварительно перемножить пары множителей:

$$(x^2+5x)(x^2+5x + 6) - 72 = 0.$$

С-6*. Замена неизвестного при решении рациональных уравнений

2. а) $x^2+6x-2-\frac{35}{x^2+6x}=0;$ б) $\frac{x^2-x+1}{x^2+3x+5}+\frac{x^2+3x+5}{x^2-x+1}=2.$

Замена в а) понятна, а в б) обозначим $y=\frac{x^2-x+1}{x^2+3x+5}$, получим знакомое уравнение $y+\frac{1}{y}=2$, имеющее единственный корень 1. Остаётся решить уравнение $x^2 - x + 1 = x^2 + 3x + 5$...

В учебнике есть **п. 2.7. Системы рациональных уравнений.**

По программе углублённого изучения математики есть важная работа **С-11. Деление многочленов. Корень многочлена.**

В учебнике и в первой части ДМ-10 есть вся необходимая теория и образцы её применения.

ЕГЭ. № 5. Рациональные уравнения

5.1. Решите уравнение $\frac{1}{9x+2} = \frac{1}{8x-4}$.

Здесь лучше соблюдать процедуру решения.

$$\frac{(8x\ -\ 4)-(9x\ +\ 2)}{(9x\ +\ 2)(8x\ -\ 4)} = 0.$$

1) $x = -6$,

2) $(9\cdot(-6)\ +\ 2)(8\cdot(-6)-\ 4)\neq 0.$

Ответ. -6.

Например, в уравнении $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x(3-x)}$ легко допустить ошибку, не исключив корень 0 уравнения $x(x\ -1) = x(3\ -\ x)$.

ЕГЭ. № 13. Решите уравнение

13.1. а) $\dfrac{9}{(x+1)^2}+\dfrac{(x+1)^2}{16}=3\cdot\left(\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x+1}{4}\right)-\dfrac{1}{2}$; б) $[0;2]$.

Напрашивается замена $t=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x+1}{4}$. Прибавим в обеих частях уравнения удвоенное произведение этих дробей $-\dfrac{3}{2}$:

$$\left(\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}\right)^2=3\cdot\left(\frac{3}{x+1}-\frac{x+1}{4}\right)-2.$$

Дальше замена $t=\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{x+1}{4}$, $\quad t^2-3t+2=0$;

$t=1$ или $t=2$…

Ответ. а) $-7,\ 1,\ -5-\sqrt{7},\ -5+\sqrt{7}$; б) $1,\ -5+\sqrt{7}$.

С-12. Рациональные неравенства

Решите неравенство:

1. а) $(x-2)(x+3)(x-4)>0;$ б) $\frac{(x-1)(x+2)}{(x-5)^2}\le 0.$

2. а) $\frac{2x-1}{x+3}\ge 1;$ б) $\frac{x}{x+3}-\frac{3}{x-1}+\frac{13}{x^2+2x-3}\le 0.$

3. а) $\begin{cases} x^2-x-12<0 \\ x^2-4x+3\ge 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+x-2\ge 0 \\ \frac{x+2}{x-4}\le 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} |x|\le 2 \\ x^2-x-6\ge 0. \end{cases}$

Почти все СР и КР избыточны при обучении по базовой программе. Учитель сам решает, какие СР проводить, какие задания в них включать, за что ставить какие отметки. Решение остальных заданий можно оценивать дополнительной отметкой.

С-13*. Замена неизвестного при решении рациональных неравенств

Решите неравенство **(1-3)**:

1. $(x^2 + 2x)^2 - (x + 1)^2 - 1 \leq 0.$

2. $(x + 2)(x + 4)^2(x + 6) \leq -3.$

3. $x^2 - x - 8 + \dfrac{12}{x^2 - x} \geq 0.$

Ничего особенно сложного, но замена очевидна лишь в задании **3**. В задании **1** надо догадаться возвести в квадрат вторую скобку, а в задании **2** — перемножить крайние скобки.

Иррациональные уравнения и неравенства в 10 классе остаются на уровне повторения, новые способы решения будут изучаться в 10 классе. Но приёмы решения, которые мы разберём, достаточны для решения многих заданий на ЕГЭ.

ЕГЭ. № 15. Рациональное уравнение

15.1. Решите неравенство $x^3 + 6x^2 + \dfrac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \le 2.$

Прежде чем пускаться в преобразования, заметим, что слева у нас есть число 2:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2 + 2x - 10}{x-5} \le 2.$$

Перепишем неравенство в виде:

$$x^3 + 6x^2 + \frac{28x^2}{x-5} \le 0,$$

$$x^2\left(x + 6 + \frac{28}{x-5}\right) \le 0,$$

$$\frac{x^2(x+2)(x-1)}{x-5} \le 0\ldots$$

Ответ. $(-\infty;\ -2];\ 0;\ [1;\ 5).$

С-14*. Замена неизвестного при решении иррациональных уравнений и неравенств

1. Решите уравнение:

а) $2\sqrt{x-3} = x - 6$; б) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \dfrac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}} = 2$;

в) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}} - 3\sqrt{\dfrac{x}{x+1}} - 2 = 0$.

Ответ. а) 12; б) 2,25; в) $\frac{1}{8}$.

2. Решите неравенство:

а) $\sqrt{2x-1} > 2x - 3$; б) $\dfrac{3x-2}{2x-3} - \sqrt{\dfrac{3x-2}{2x-3}} - 6 \geq 0$;

в) $\sqrt{\dfrac{3x-2}{x+1}} - 10\sqrt{\dfrac{x+1}{3x-2}} + 3 \geq 0$.

Ответ. а) $[0{,}5;\ 2{,}5)$; б) $\left[\frac{3}{2};\ \frac{5}{2}\right]$; в) $[-6;\ -1)$.

ЕГЭ. № 5. Простое уравнение

5.2. Решите уравнение $\sqrt{\frac{4x+25}{13}} = 5.$

Возводим в квадрат, получаем равносильное уравнение, так как обе части исходного уравнения неотрицательны:

$$\frac{4x+25}{13} = 25,$$

$$4x + 25 = 13 \cdot 25,$$

$$4x = 12 \cdot 25,$$

$$x = 3 \cdot 25,$$

$$x = 75.$$

Ответ. 75.

С-15*. Задачи с параметром

1. Найдите все значения a, при каждом из которых любое действительное число является решением неравенства

$$x^2 + (2a+1)x - \frac{a}{4} > 0.$$

Единственное условие: $D < 0$. Составляем неравенство

$$(2a+1)^2 + a < 0,$$

$$4a^2 + 5a + 1 < 0.$$

Ответ. $(-0{,}25; -1)$.

С-15*. Задачи с параметром

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+1)x + 9 = 0$ имеет два различных корня, больших 2.

1) Есть два различных корня: $D > 0$.

$$(a+1)^2 - 36 > 0,$$

$$(a+7)(a-5) > 0,$$

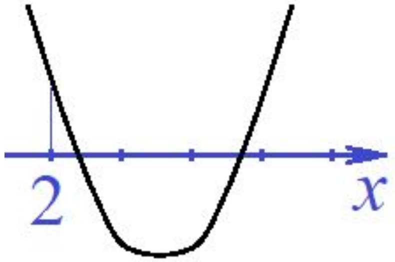
$$a < -7 \text{ или } a > 5.$$

С-15*. Задачи с параметром

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+1)x + 9 = 0$ имеет два различных корня, больших 2.

1) Есть два различных корня: $D > 0$.

$$(a+1)^2 - 36 > 0,$$
$$(a+7)(a-5) > 0,$$
$$a < -7 \text{ или } a > 5.$$

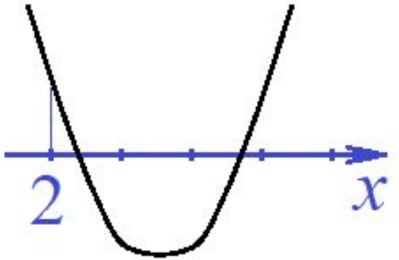


2) Условие $x_0 > 2$ приводит к неравенству $a < -5$.

С-15*. Задачи с параметром

2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^2 + (a+1)x + 9 = 0$ имеет два различных корня, больших 2.

1) Есть два различных корня: $D > 0$.



$$(a+1)^2 - 36 > 0,$$
$$(a+7)(a-5) > 0,$$
$$a < -7 \text{ или } a > 5.$$

2) Условие $x_0 > 2$ приводит к неравенству $a < -5$.

3) Условие $f(2) > 0$ приводит к неравенству $a > -7{,}5$.

В пунктах 1)-3) имеем общие решения: $-7{,}5 < a < -7$.

Ответ. $(-7{,}5; -7)$.

С-15*. Задачи с параметром

3. Найдите все значения a, при каждом из которых **не имеет** решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2-(6a-4)x+9a^2-12a\geq 0 \\ |4x-5a|\leq 2. \end{cases}$$

С-15*. Задачи с параметром

3. Найдите все значения a, при каждом из которых **не имеет** решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (6a-4)x + 9a^2 - 12a \geq 0 \\ |4x - 5a| \leq 2. \end{cases}$$

1) Многочлен в первом неравенстве имеет корни $3a - 4$ и $3a$ при любом значении a. Решения неравенства левее первого корня и правее второго.

С-15*. Задачи с параметром

3. Найдите все значения a, при каждом из которых **не имеет** решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (6a-4)x + 9a^2 - 12a \geq 0 \\ |4x - 5a| \leq 2. \end{cases}$$

1) Многочлен в первом неравенстве имеет корни $3a - 4$ и $3a$ при любом значении a. Решения неравенства левее первого и правее второго корня.

2) Второе неравенство имеет множество решений $\left[\frac{5a-2}{4}; \frac{5a+2}{4}\right]$.

3) Система не имеет решений, когда второй промежуток оказывается между числами $3a - 4$ и $3a$.

С-15*. Задачи с параметром

3. Найдите все значения a, при каждом из которых **не имеет** решений система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (6a-4)x + 9a^2 - 12a \geq 0 \\ |4x - 5a| \leq 2. \end{cases}$$

Решим систему $\begin{cases} 3a - 4 < \frac{5a-2}{4} \\ \frac{5a+2}{4} < 3a. \end{cases}$

Все её решения составляют интервал $\left(\frac{2}{7}; 2\right)$.

Ответ. $\left(\frac{2}{7}; 2\right)$.

С-15*. Задачи с параметром

4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - a - 3 = 0$ положительный, а другой заключён между -2 и -1.

1) Дискриминант квадратного уравнения равен $(a - 4)^2$. Два корня уравнения различны, если $a \neq 4$.

С-15*. Задачи с параметром

4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - a - 3 = 0$ положительный, а другой заключён между -2 и -1.

1) Дискриминант квадратного уравнения равен $(a - 4)^2$. Два корня уравнения различны, если $a \neq 4$.

2) Знаки корней уравнения различны, если $2a^2 - a - 3 < 0$, т. е. если $-1 < a < 1{,}5$ (условие $a \neq 4$ выполнено).

С-15*. Задача с параметром

4. Найдите все значения a, при каждом из которых один из корней уравнения $x^2 - (3a - 2)x + 2a^2 - a - 3 = 0$ положительный, а другой заключён между -2 и -1.

1) Дискриминант квадратного уравнения равен $(a - 4)^2$. Два корня уравнения различны, если $a \neq 4$.

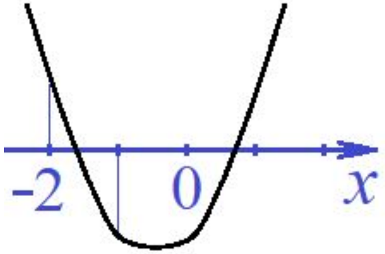
2) Знаки корней уравнения различны, если $2a^2 - a - 3 < 0$, т. е. если $-1 < a < 1{,}5$ (условие $a \neq 4$ выполнено).

3) Чтобы корень уравнения был заключён между -2 и -1, должны выполняться два неравенства:

$f(-2) > 0$ и $f(-1) < 0$. Решив систему, получим:

$0{,}5 < a < 1$ (условие $-1 < a < 1{,}5$ выполнено).

Ответ. $(0{,}5; 1)$.



ЕГЭ. № 18. Задача с параметром

18.1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $ax^2 + 2(a-2)x + (a+3) = 0$ имеет два корня, расстояние между которыми больше 3.

1) $a \neq 0$. Уравнение имеет два корня, если $\frac{D}{4} = 4 - 7a > 0$, т. е. если $a < \frac{4}{7}$. Перепишем уравнение в виде:

$$x^2 + \frac{2a-4}{a} \cdot x + \frac{a+3}{a} = 0.$$

$|x_1 - x_2| > 3$, если $(x_1 - x_2)^2 > 9$, т. е. если

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = \left(-\frac{2a-4}{a}\right)^2 - \frac{4a+12}{a} > 9.$$

ЕГЭ. № 18. Задача с параметром

2) Решаем неравенство

$$\left(\frac{2a-4}{a}\right)^2-\frac{4a+12}{a}>9,$$

$$\frac{(2a-4)^2-(4a^2+12a)-9a^2}{a^2}>0,\qquad \frac{9a^2+28a-16}{a^2}<0,$$

$$a_1=\frac{-14-2\sqrt{85}}{9},\ a_2=\frac{-14+2\sqrt{85}}{9}.$$

Учитывая, что $a<\frac{4}{7}$, имеем: $\left(\frac{-14-2\sqrt{85}}{9};\ 0\right);\ \left(0;\frac{-14+2\sqrt{85}}{9}\right).$

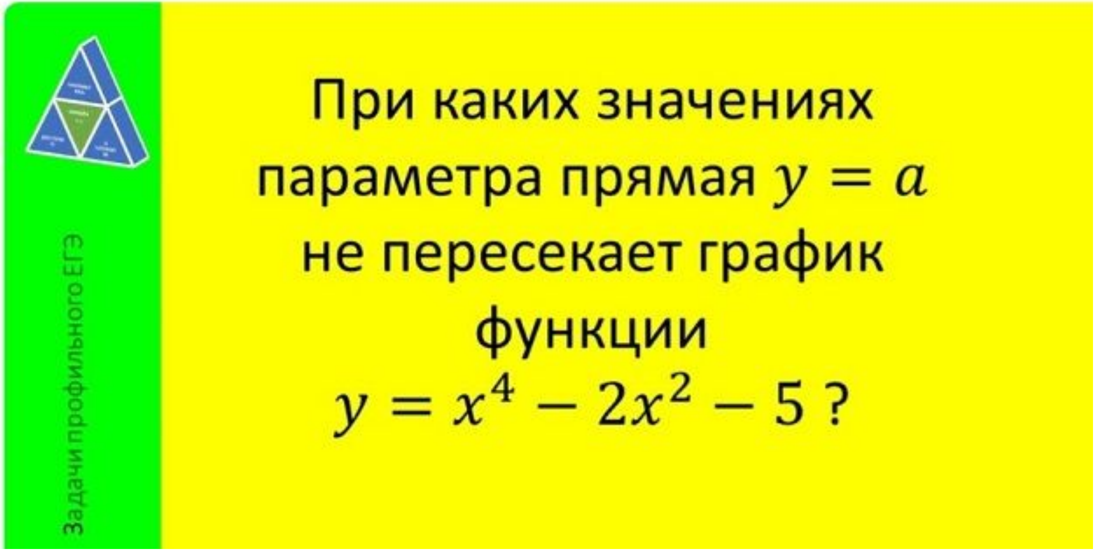
Ответ. $\left(\frac{-14-2\sqrt{85}}{9};\ 0\right);\ \left(0;\frac{-14+2\sqrt{85}}{9}\right)$. Ответ в сборнике дан с ошибкой: $\left(\frac{-14-2\sqrt{13}}{9};\ 0\right);\ \left(0;\frac{-14+2\sqrt{13}}{9}\right)$, так как $\frac{-14+2\sqrt{13}}{9}<0.$

Параметры

Давайте переведём дух. Рассмотрим решение задания для подготовки к ЕГЭ, которое было размещено в Интернете.

Короткое решение задания с параметром

Математика онлайн. Доступно о сложном



Параметры

Давайте переведём дух. Рассмотрим решение задания для подготовки к ЕГЭ, которое было размещено в Интернете.

Автор публикации исследует функцию при помощи производной. Находит её наименьшее значение -6. Получает ответ: $a < -6$.

Я привёл комментарий:

$$y = x^4 - 2x^2 - 5 = (x^2 - 1)^2 - 6 \geq 0.$$

$$a \in (-\infty;\ -6).$$

Короткое решение задания с параметром

24 октября 124 дочитывания 1 мин.

Математика онлайн. Доступно о сложном

Задачи профильного ЕГЭ

При каких значениях параметра прямая $y = a$ не пересекает график функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$?

Параметры

Назавтра публикация была снята. Это тот случай, когда знания многих сложных способов решения задач мешают взрослому решателю увидеть «детское» решение.

«Многие знания — многие печали», — говорили древние мудрецы.

Это, кажется, как раз тот случай.

При каких значениях параметра прямая $y = a$ не пересекает график функции $y = x^4 - 2x^2 - 5$?

Александр Шевкин 1 м

Можно короче:

$y = x^4 - 2x^2 - 5 = (x^2 - 1)^2 - 6 \geq -6.$

$a \in (-\infty; -6),$

Старайтесь на задачи смотреть глазами детей.

https://zen.yandex.ru/media/shevkin/sokratim-korotkoe-reshenie-5f99df749037085821054e21

Степень с рациональным показателем. Логарифм

Далее в наших учебниках идёт степень с рациональным показателем и другие интересные вопросы. Мы подошли к логарифмам. А там логарифмические и показательные уравнения и неравенства. В 10 классе применяются стандартные способы: решаем простейшие показательные и логарифмические уравнения и неравенства, уравнения и неравенства, сводящиеся к ним при помощи замены неизвестного. Это уровень задания 5 из ЕГЭ.

С-21. Показательные и логарифмические уравнения

Решите уравнение **(1-3)**:

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$; б) $2^{2x-7} = 8$;

в) $\log_2 x = 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = -2$.

Возможны разные обоснования решений, только не надо «отбрасывать» основания степени или логарифмы, что иногда делают блогеры, чтобы быть «ближе к народу». Хотелось бы, чтобы народ понимал не только как получить результат, но и почему он верный. Хорошо бы объяснять так. Функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^t$ убывает на $\boldsymbol{R}$, каждое своё значение принимает только один раз. Если $\left(\frac{1}{3}\right)^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, то $x = -2$.

С-21. Показательные и логарифмические уравнения

Решите уравнение **(1-3)**:

1. а) $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 9$; б) $2^{2x-7} = 8$;

в) $\log_2 x = 3$; г) $\log_{\frac{1}{2}}(3x+1) = -2$.

Мы решили простейшее показательное уравнение а).

Задание б) сводится к простейшему показательному уравнению заменой $y = 2x - 7$. Или говорим про возрастающую на ***R*** функцию $y = 2^t$.

Аналогично решаем простейшее логарифмическое уравнение в) и сводящееся к простейшему логарифмическому уравнению уравнение г).

С-21. Показательные и логарифмические уравнения

2. а) $3^{x+1} - 3^{x} = 18$; б) $\log_2 x + \log_4 x = 6$;

в) $\log_{\frac{1}{3}}(\log_3 x) = -1$.

3. а) $(\lg x)^2 - \lg x = 2$; б) $3^{2x-3} - 8 \cdot 3^{x-2} = 3$;

в) $\log_2 x + \log_x 4 = 3$; г) $\log_2(5x-1) - \frac{3}{\log_2(5x-1)-1} = -1$;

д) $5^{x} - 6 \cdot 5^{-x} = 3{,}8$.

Применяем свойства степени и свойства логарифма (№ 2). Приводим уравнение к квадратному или рациональному при помощи замены неизвестного (№ 3). И мы уже близки к заданиям уровня ЕГЭ.

ЕГЭ. № 5. Показательные и логарифмические уравнения

5.3. Решите уравнение

$$2^{\log_4(9x+9)} = 6.$$

Возведём обе части уравнения (они положительные) в квадрат.

$$\left(2^{\log_4(9x+9)}\right)^2 = 36,$$
$$(2^2)^{\log_4(9x+9)} = 36,$$
$$4^{\log_4(9x+9)} = 36,$$
$$9x + 9 = 36,$$
$$x = 3.$$

Ответ. 3.

Рассматриваем не самые простые задания 5.

ЕГЭ. № 5. Показательные и логарифмические уравнения

5.4. Решите уравнение $\log_2(10-5x) = 3\log_2 5$.

Применим свойство логарифма:

$$\log_2(10-5x) = \log_2 5^3.$$

Логарифмы двух положительных чисел равны тогда и только тогда, когда равны эти числа (свойство возрастающей функции $y = \log_2 t$).

$$10 - 5x = 5^3,$$
$$2 - x = 25,$$
$$x = -23.$$

Ответ. -23.

С-22. Показательные и логарифмические неравенства

Решите неравенство **(1-3)**:

1. а) $2^x < \frac{1}{8}$; б) $(0,2)^x \le -0,2$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-5} \ge 4$;

г) $\log_2 x > 2$; д) $\log_{0,2}(x+2) \ge -1$; е) $4^{x+2} - 13 \cdot 4^x > 12$.

Решаем простейшее показательные и логарифмические неравенства и неравенства, сводящиеся к ним заменой неизвестного.

Ответы и советы. а) $x < 3$; б) нет решений; в) решаем неравенство $3x - 5 \le 2$; г) $x > 4$; д) решаем двойное неравенство $0 < x + 2 \le 5$ (или систему); е) решаем неравенство $3 \cdot 4^x > 12$.

С-22. Показательные и логарифмические неравенства

2. а) $\left(\frac{1}{9}\right)^x - 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^x > -9$; б) $3\cdot 9^x - 10\cdot 3^x + 3 \geq 0$;
в) $\lg^2 x - \lg x - 2 < 0$; г) $\log^2_{0,5} x + 2\log_{0,5} x - 3 > 0$.

Ответы и советы. а) Неравенство $\left(\left(\frac{1}{3}\right)^x - 3\right)^2 > 0$ справедливо для любого значения $x \neq -1$; б) $t = 3^x$, решаем неравенство $3t^2 - 10t + 3 \geq 0$, учитывая, что $t > 0$; получаем: $0 < t \leq \frac{1}{3}$ или $t \geq 3$; объединяем решения неравенств $3^x \leq \frac{1}{3}$ и $3^x \geq 3$;
в) $t = \lg x$, решаем неравенство $t^2 - t - 2 < 0$; $-1 < t < 2$,…
$x \in (0{,}1;\ 100)$; г) $0 < x < 0{,}5$; $x > 8$.

С-22. Показательные и логарифмические неравенства

3. а) $\dfrac{\log_3 4{,}5}{3-\log_3 x} \geq 1$; б) $9^x - 2\cdot 3^x + \dfrac{1}{9^x - 2\cdot 3^x + 2} > 0$;

в) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{2x} - 4\cdot\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x + 1 \leq 0.$

Ответы и советы. а) $[6;\,27)$; б) прибавим справа и слева по 2: получим неравенство $t+\frac{1}{t} > 2$, где $t = (3^x-1)^2+1$; т. к. $t \geq 1$, то надо исключить случай $t = 1$, т. е. $x = 0$; получаем: $x < 0$ или $x > 0$; в) перепишем неравенство в виде $t^2 - 4t + 1 \leq 0$, где $t = \left(2-\sqrt{3}\right)^x$; $2-\sqrt{3} \leq t \leq 2+\sqrt{3}$; решаем неравенство

$\left(2-\sqrt{3}\right)^1 \leq \left(2-\sqrt{3}\right)^x \leq \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$; $x \in [-1;\,1]$.

ЕГЭ. № 15. «На лицо ужасное, доброе внутри…»

15.2. Решите неравенство $(0,5)^{-\frac{x-2}{2x+4}}\cdot 10^{x}\cdot x^{-2}\ge \frac{32^{-\frac{x-2}{2x+4}}\cdot 40^{x}}{16x^{2}}$.

При условии $x\neq -2, x\neq 0$ умножаем (делим) на положительные при любом x функции (это у нас в 11 классе):

$$(0,5)^{-\frac{x-2}{2x+4}}\ge \frac{32^{-\frac{x-2}{2x+4}}\cdot 4^{x}}{16},$$

$$2^{\frac{x-2}{2x+4}}\ge 32^{-\frac{x-2}{2x+4}}\cdot 4^{x-2},$$

$$64^{\frac{x-2}{2x+4}}\ge 4^{x-2},$$

$$8^{\frac{x-2}{x+2}}\ge 4^{x-2},$$

$$2^{\frac{3x-6}{x+2}}\ge 2^{2x-4},$$

ЕГЭ. № 15. «На лицо ужасное, доброе внутри…»

15.2. Решите неравенство $(0{,}5)^{-\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 10^x \cdot x^{-2} \geq \dfrac{32^{-\frac{x-2}{2x+4}} \cdot 40^x}{16x^2}$.

При условии $x \neq -2, x \neq 0$ умножаем (делим) на положительные при любом x функции (это у нас в 11 классе):

$$2^{\frac{3x-6}{x+2}} \geq 2^{2x-4},$$

$$\frac{3x-6}{x+2} \geq 2x-4,$$

$$\frac{(x-2)(x+0{,}5)}{x+2} \leq 0,$$

Учитываем ограничения.

Ответ: $(-\infty; -2)$; $[-0{,}5; 0)$; $(0; 2]$.

ЕГЭ. № 15. Коварное неравенство

15.3. Решите неравенство

$$\log^2_{|x+1|}(x+1)^4 + \log_2(x+1)^2 \le 22.$$

При условии $x \ne -1, x \ne 0, x \ne -2$ первое слагаемое равно 16.

$$\log_2(x+1)^2 \le \log_2 2^6,$$

$$(x+1)^2 - 8^2 \le 0,$$

$$(x+1-8)(x+1+8) \le 0,$$

$$(x-7)(x+9) \le 0,$$

$$-9 \le x \le 7.$$

Учитываем ограничения.

Ответ: $[-9; -2); (-2; -1); (-1; 0); (0; 7]$.

Ещё коварнее… (Решение неравенств на множестве, 11 класс)

Решите неравенство

$$\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}(1+3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right).$$

На множестве x, таких, что $x < 0$, $x \neq -1{,}5$, $x \neq -1$, $x \neq -0{,}5$ неравенство равносильно неравенству

$$\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9}+\frac{5}{9}\cdot 3^x + 3^{x-1} + 3^{2x-1}\right).$$

1) Если $|2x+2| > 1$, т. е. если $x < -1{,}5$ или $x > -0{,}5$, то

$$1-9^x < \frac{5}{9}+\frac{5}{9}\cdot 3^x + 3^{x-1} + 3^{2x-1},\ldots$$

$$x > -1, \text{ то есть } -0{,}5 < x < 0.$$

Ещё коварнее… (Решение неравенств на множестве, 11 класс)

Решите неравенство

$$\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}(1+3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9}+3^{x-1}\right).$$

2) Если $0 < |2x+2| < 1$, т. е. если $-1{,}5 < x < -0{,}5$, то

$$1-9^x > \frac{5}{9}+\frac{5}{9}\cdot 3^x + 3^{x-1} + 3^{2x-1},\ldots$$

$$x < -1, \text{ то есть } -1{,}5 < x < -1.$$

Объединяем найденные решения.

Ответ: $(-1{,}5; -1); (-0{,}5; 0)$.

Это задача из книги Зив В.Г., Гольдич В.А. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа. 2015.

С-23*. «Однородные» показательные уравнения и неравенства

Решите уравнение:

1. а) $27 \cdot 2^x - 8 \cdot 3^x = 0$;   б) $2^{x+1} - 2^{x-1} = 3^{2-x}$;

в) $9 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 4 \cdot 9^x = 0$.

Ответы и советы. а) Делим на $8 \cdot 2^x$; $x = 3$; б) перепишем: $3 \cdot 2^{x-1} = 3 \cdot 3^{1-x}$; $2^{x-1} = 3^{1-x}$; слева возрастающая функция, справа убывающая… $x = 1$; в) делим на 9^x:

$9 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x - 13 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 = 0$. Далее замена неизвестного $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x$, $9t^2 - 13t + 4 = 0$, $t = 1$ или $t = \frac{4}{9}$. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$ или $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{4}{9}$; $x = 0$; $x = 2$.

С-23*. «Однородные» показательные уравнения и неравенства

Решите неравенство **(1-2)**:

2. а) $5^{x-1} < 5 \cdot 3^{x-2}$;   б) $3^{x+3} - 2 \cdot 3^{x+2} > 5^{x+2}$;

в) $4 \cdot 16^x - 7 \cdot 12^x + 3 \cdot 9^x > 0$.

Ответы и советы. а) Делим на $5 \cdot 3^{x-2}$; $\left(\frac{5}{3}\right)^{x-2} < 1$; $x < 2$;

б) перепишем: $3^{x+2} > 5^{x+2}$; делим на 3^{x+2}; $x < -2$;

в) делим на 9^x: $4 \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^x + 3 > 0$. Далее замена неизвестного $t = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, $4t^2 - 7t + 3 > 0$, $t < \frac{3}{4}$ или $t > 1$.

$\left(\frac{4}{3}\right)^x < \frac{3}{4}$ или $\left(\frac{4}{3}\right)^x > 1$; $x < -1$; $x > 0$.

С-39. Тригонометрические уравнения

Решите уравнение **(1-2)**:

1. а) $\sin x = 1$; б) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\sin x = \frac{1}{2}$; г) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

2. а) $\operatorname{tg} x = -1$; б) $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$; в) $\operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Здесь нужны стандартные решения с опорой на знание единичной окружности и изображения точек, соответствующих x, на ней. Это основа всех дальнейшей работы по тригонометрии.

С-40. Замена неизвестного при решении тригонометрических уравнений

Решите уравнение **(1-5)**:

1. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0.$

2. $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0.$

3. $\sin^2 x + 3\sin x - 4 = 0.$

4. $\operatorname{tg} x + \frac{5}{\operatorname{tg} x} - 6 = 0.$

5. $\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2\operatorname{ctg} x + 2 = 0.$

Использование замены подсказывает заголовок работы. Дальше стандартный набор приёмов — приведение к квадратному уравнению, рациональному, разложение на множители.

ЕГЭ. № 5. Тригонометрическое уравнение

5.5. Найдите наименьший положительный корень уравнения

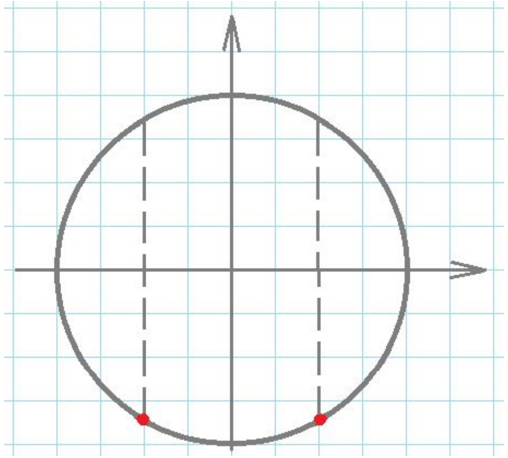
$$\sin\frac{\pi x}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Считаем от нуля в порядке возрастания до первого положительного корня уравнения

$$\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}.$$

$x = 4.$

Ответ: 4.



ЕГЭ. № 13. Тригонометрическое уравнение

13.2. а) Решите уравнение: $\left(36^{\sin x}\right)^{\cos x} = 6^{\sqrt{3}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

а) Перепишем уравнение:

$$6^{2\sin x\cos x} = 6^{\sqrt{3}\cos x},$$

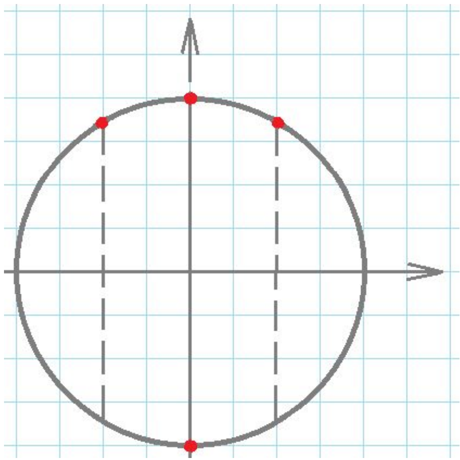
$$2\sin x\cos x = \sqrt{3}\cos x,$$

$$2\cos x\left(\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0,$$

$$\cos x = 0 \text{ или } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$



ЕГЭ. № 13. Тригонометрическое уравнение

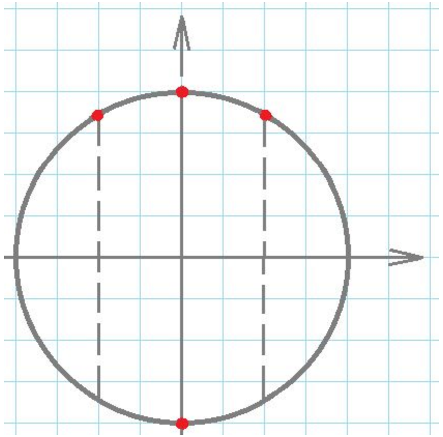
13.2. а) Решите уравнение: $\left(36^{\sin x}\right)^{\cos x} = 6^{\sqrt{3}\cos x}$.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $[2\pi; 3\pi]$.

б) На единичной окружности отмечены 4 точки, изображающие все решения исходного уравнения. Три из них в промежутке $[2\pi; 3\pi]$. Это $2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{3}$, $2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$ и $2\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$.

Ответ. а) $\frac{\pi}{2} + \pi n$, $\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$; б) $\frac{7\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{2}$, $\frac{8\pi}{3}$.

Тот же результат можно получить, решив три двойных неравенства.



С-41. Применение тригонометрических формул при решении уравнений

Решите уравнение **(1-5)**:

1. $2\cos^2 x - 5\sin x + 1 = 0.$

2. $\sin 4x \cos 2x = \sin 2x \cos 4x.$

3. $\cos 2x - \sin x = 0.$

4. $\cos(0{,}5\pi - 2x) + \sin x = 0.$

5. $\cos^4 x - \cos 2x = 1.$

Это уже ближе к заданиям ЕГЭ, но пока ничего сложного. А вот и задание на эту тему из сборника для подготовки ЕГЭ.

ЕГЭ. № 13. Тригонометрическое уравнение

13.3. а) Решите уравнение: $\operatorname{tg}(\pi - x)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin\dfrac{5\pi}{6}$.

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

а) $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$, $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - 2x\right) = -\sin 2x$, $\sin\dfrac{5\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$.

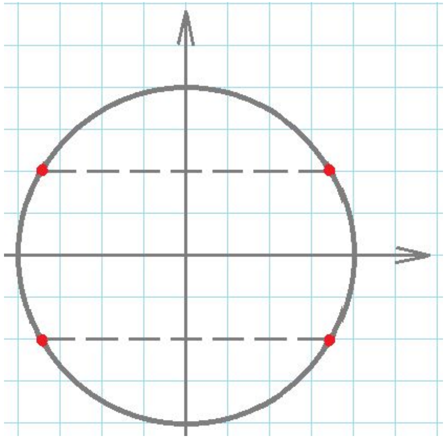
Перепишем уравнение:

$$\operatorname{tg} x \sin 2x = \frac{1}{2}.$$

Так как $\cos x \neq 0$, то

$$2\sin^2 x = \frac{1}{2}, \qquad \sin x = \pm\frac{1}{2}.$$

$x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.



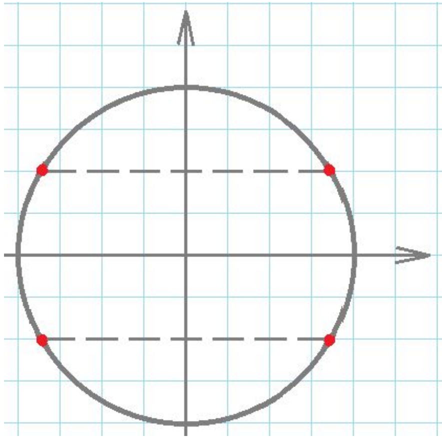
ЕГЭ. № 13. Тригонометрическое уравнение

13.3. а) Решите уравнение: $\operatorname{tg}(\pi - x)\cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2x\right) = \sin\frac{5\pi}{6}$.

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.

б) На единичной окружности отмечены 4 точки, изображающие все решения исходного уравнения. Три из них в промежутке $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$. Перечисляем их в порядке убывания:

$-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{12\pi}{6}$.



Ответ. а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

б) $-\frac{11\pi}{6}$, $-\frac{7\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$.

ЕГЭ. № 13. Тригонометрическое уравнение

13.4. а) Решите уравнение: $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

а) Перепишем уравнение:

$$6\cos^2 x - 7\cos x + 1 = 0,$$

$$\cos x = 1 \text{ или } \cos x = \frac{1}{6};$$

$$x = 2\pi n,\ x = \pm\arccos\frac{1}{6} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

Заметим, что $\frac{\pi}{3} < \arccos\frac{1}{6} < \frac{\pi}{2}$.

ЕГЭ. № 13. Тригонометрическое уравнение

13.4. а) Решите уравнение: $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

б) Решим двойные неравенства для каждой серии корней.

1) $-3\pi \le 2\pi n \le -\pi,$

$-3 \le 2n \le -1,$

$n = -1, \quad x = -2\pi.$

2) $-3\pi \le \arccos\frac{1}{6} + 2\pi n \le -\pi,$

$-3\pi - \arccos\frac{1}{6} \le 2\pi n \le -\pi - \arccos\frac{1}{6},$

$n = -1, \quad x = \arccos\frac{1}{6} - 2\pi;$

ЕГЭ. № 13. Тригонометрическое уравнение

13.4. а) Решите уравнение: $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$.

б) Укажите его корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$.

б) Решим двойные неравенства для каждой серии корней.

3) $-3\pi \le -\arccos\frac{1}{6} + 2\pi n \le -\pi$,

$$-3\pi + \arccos\frac{1}{6} \le 2\pi n \le -\pi + \arccos\frac{1}{6},$$

$$n = -1, \quad x = -\arccos\frac{1}{6} - 2\pi.$$

Ответ. а) $-2\pi n$, $\pm\arccos\frac{1}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

б) -2π, $\arccos\frac{1}{6} - 2\pi$, $-\arccos\frac{1}{6} - 2\pi$.

С-42. Однородные уравнения

Решите уравнение **(1-4)**:

1. $\sin x + 5\cos x = 0.$

$\cos x \neq 0$, т. к. в противном случае равенство неверно, делим обе части уравнения на $\cos x$, получаем уравнение $\operatorname{tg} x = -5$.

$x = \operatorname{arctg}(-5) + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

2. $\sin 2x - \sqrt{3}\cos 2x = 0.$

$\cos 2x \neq 0 \ldots \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3};$

$2x = \frac{\pi}{3} + \pi n;\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$, где $n \in \mathbf{Z}$.

С-42. Однородные уравнения

3. $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$

$\cos x \neq 0$, т. к. в противном случае равенство неверно, делим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получаем: $t^2 - 2t - 3 = 0$, где $t = \operatorname{tg} x$;

$\operatorname{tg} x = -1$ или $\operatorname{tg} x = 3$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \operatorname{arctg} 3 + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

4. $6\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 1.$

Приводим уравнение к виду $t^2 - 4t - 5 = 0$, где $t = \operatorname{tg} x$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \operatorname{arctg} 5 + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

С-42. Однородные уравнения

5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $\sin^2 x + 6\sin x \cos x + a\cos^2 x = 0$ не имеет решения.

$\cos x \neq 0$, т. к. в противном случае равенство неверно, делим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получаем квадратное уравнение относительно $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 + 6t + a = 0.$$

Оно не имеет решения, если $\frac{D}{4} = 9 - a < 0$, т. е. если $a > 9$.

С-43.* Тригонометрические неравенства

Решите неравенство **(1-2)**:

1. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$;   б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;   в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

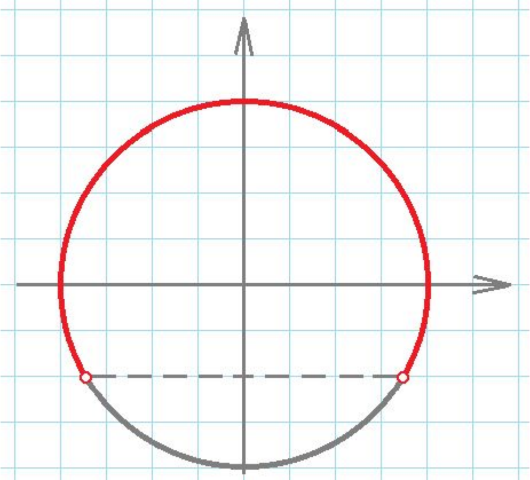
Здесь пригодится большая работа, которую мы провели в учебниках и в ДМ-10 по обучению школьников чтению углов на единичной окружности.

С-43.* Тригонометрические неравенства

Решите неравенство **(1-2)**:

1. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;



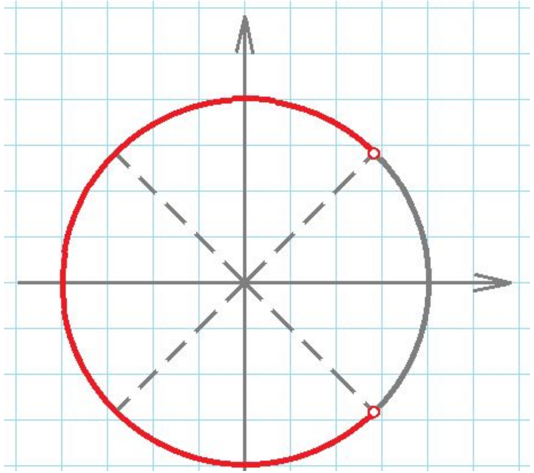
С-43.* Тригонометрические неравенства

Решите неравенство **(1-2)**:

1. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;



С-43.* Тригонометрические неравенства

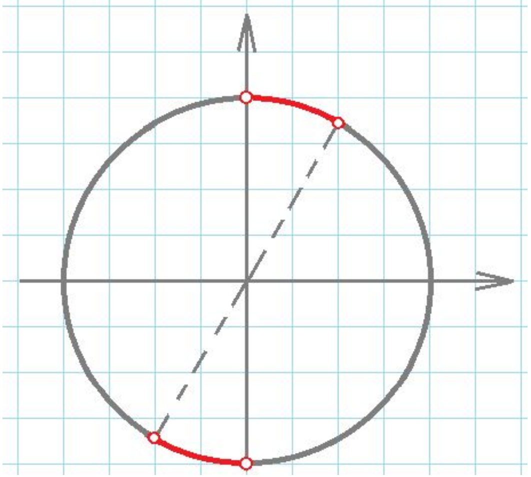
Решите неравенство **(1-2)**:

1. а) $\sin x > -\frac{1}{2}$; б) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x > \sqrt{3}$.

а) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

б) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < x < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

в) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.



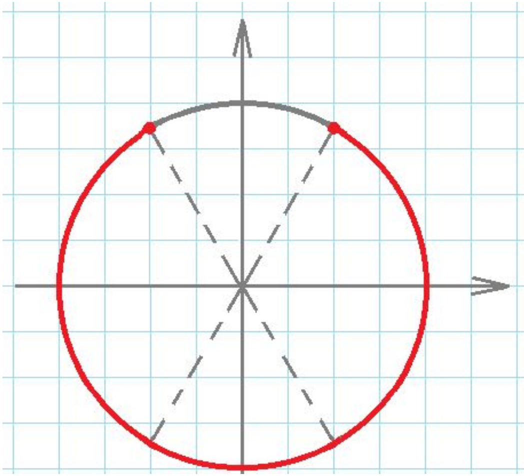
С-43.* Тригонометрические неравенства

Решите неравенство **(1-2)**:

2. а) $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) \le \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(3x-\frac{2\pi}{3}\right) \ge -\frac{1}{2}$.

а) $-\frac{4\pi}{3}+2\pi n \le x+\frac{\pi}{3} \le \frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

$-\frac{5\pi}{3}+2\pi n \le x \le 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;



С-43.* Тригонометрические неравенства

Решите неравенство **(1-2)**:

2. а) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos\left(3x - \frac{2\pi}{3}\right) \geq -\frac{1}{2}$.

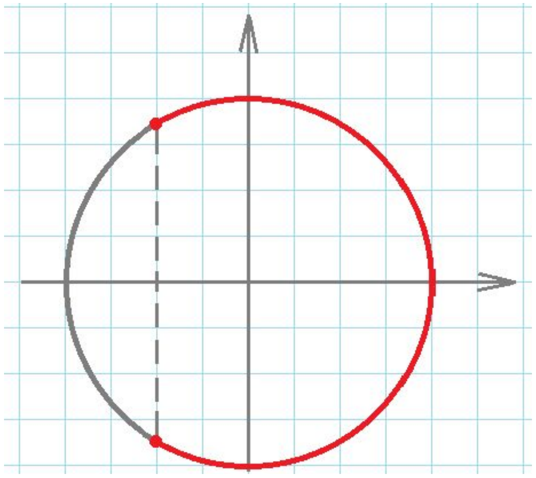
а) $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n \leq x + \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + 2\pi n,$

$-\frac{5\pi}{3} + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$;

б) $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 3x - \frac{2\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$

$2\pi n \leq 3x \leq \frac{4\pi}{3} + 2\pi n,$

$\frac{2\pi n}{3} \leq x \leq \frac{4\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, где $n \in \mathbf{Z}$.



С-44.* Введение вспомогательного угла. Замена $t = \sin x + \cos x$

Решите уравнение **(1-2)**:

1. $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -1.$

Делим обе части уравнения на $\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = 2$, получаем:

$\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = -\frac{1}{2};$ $\quad\quad$ $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2};$

$x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ или $x - \frac{\pi}{3} = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n;$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n;$ $\quad\quad$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}.$

Ответ. $\frac{\pi}{6} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}.$

С-44.* Введение вспомогательного угла. Замена $t = \sin x + \cos x$

2. $\sin x + 4\sin x\cos x + \cos x = 1;$

Делаем замену: $t = \sin x + \cos x$, $t^2 = 1 + 2\sin x\cos x$;

уравнение имеет вид: $2t^2 + t - 3 = 0$; $t = -1{,}5$ или $t = 1$.

Уравнение $\sin x + \cos x = -1{,}5$ не имеет решений.

Решаем уравнение $\sin x + \cos x = 1$;

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Получаем: $x = 2\pi n$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $2\pi n$; $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

С-44.* Введение вспомогательного угла. Замена $t = \sin x + \cos x$

Решите неравенство **(3-4)** :

3. $2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x > 1$

Перепишем неравенство в виде

$$\sin^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x < 0.$$

$\cos x \neq 0$, т. к. в противном случае неравенство неверно, делим обе части уравнения на $\cos^2 x$ ($\cos^2 x > 0$), получаем квадратное неравенство относительно $t = \operatorname{tg} x$:

$$t^2 - 2\sqrt{3}t - 1 < 0; \qquad \sqrt{3} - 2 < \operatorname{tg} x < \sqrt{3} + 2.$$

$$\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} - 2\right) + \pi n < x < \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} + 2\right) + \pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $\left(\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} - 2\right) + \pi n; \operatorname{arctg}\left(\sqrt{3} + 2\right) + \pi n\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

С-44.* Введение вспомогательного угла. Замена $t = \sin x + \cos x$

4. $3\sin x - 3\cos x + 2\sin x\cos x > 3.$

Делаем замену: $t = \sin x - \cos x$, $t^2 = 1 - 2\sin x\cos x$; неравенство имеет вид: $t^2 - 3t + 2 < 0$; $1 < t < 2$. Решаем систему неравенств: $\sin x + \cos x > 1$; $\sin x + \cos x < 2$ (второе неравенство выполняется для любого x).

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi n \le x - \frac{\pi}{4} \le \frac{3\pi}{4} + 2\pi n,$$

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \pi + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ. $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \pi + 2\pi n\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$.

С-44.* Введение вспомогательного угла. Замена $t = \sin x + \cos x$

5. Определите все a, при каждом из которых уравнение $5\sin x - 12\cos x = a + 1$ имеет хотя бы одно решение.

Делим обе части уравнения на $\sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$, получаем:

$$\frac{5}{13}\sin x - \frac{12}{13}\cos x = \frac{a+1}{13};$$

$$\sin(x - \alpha) = \frac{a+1}{13}, \qquad (*)$$

где $\alpha = \arcsin\frac{12}{13} = \arccos\frac{5}{13} = \operatorname{arctg} 2{,}4$ (в других задачах это потребуется). Уравнение (*) имеет хотя бы одно решение, если $-1 \le \frac{a+1}{13} \le 1$, т. е. если $-14 \le a \le 12$.

Ответ. $-14 \le a \le 12$.

С-45.* Замена неизвестных при решении систем уравнений

Решите систему уравнений **(1-4)**:

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3^x + 2^{\frac{2x-5}{3} - y} = 28. \end{cases}$

Из первого уравнения выразим y через x: $y = \dfrac{2x-5}{3}$.

Подставляем во второе уравнение, получаем: $x = 3$, тогда $y = \dfrac{1}{3}$.

Ответ. $\left(3; \dfrac{1}{3}\right)$.

С-45.* Замена неизвестных при решении систем уравнений

2. $\begin{cases} \dfrac{3x}{2x+y} + 6x + 3y = 9 \\ 12 \cdot 13^{2x+y} + 13 = 13^{4x+2y}. \end{cases}$

Решив второе уравнение относительно $t = 13^{2x+y}$, получим: $2x + y = 1$, тогда $x = 2$, $y = -3$.

Ответ. $(2; -3)$.

С-45.* Замена неизвестных при решении систем уравнений

3. $\begin{cases} 3\cos x + \sin y = 0{,}5 \\ 2\cos x - \sin y = 2. \end{cases}$

Сложив уравнения системы, получим:

$5\cos x = 2{,}5; \quad \cos x = 0{,}5; \quad x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

Тогда $\sin y = -1, y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbf{Z}$.

Ответ. $\left(\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, где $n \in \mathbf{Z}$, $k \in \mathbf{Z}$.

Замечание. Здесь для x и y буквы n и k различны, так как каждому значению x соответствует не единственное значение y.

С-45.* Замена неизвестных при решении систем уравнений

4. $\begin{cases} \dfrac{5}{\sqrt{x-3}} + \dfrac{2}{\sqrt{y+1}} = 6 \\ \dfrac{3}{\sqrt{x-3}} - \dfrac{2}{\sqrt{y+1}} = 2. \end{cases}$

Сложив уравнения системы, получим: $\dfrac{8}{\sqrt{x-3}} = 8$, откуда $x = 4$. Тогда $y = 3$.

Ответ. $(4; 3)$.

Пройдя описанную выше подготовку, учащиеся могут решить большую часть заданий 5, 13, 15, решение которых не связано с применением нестандартных приёмов, о которых мы поговорим в следующий раз.

Спасибо за внимание

Тему разговора не закрываем. Можно продолжить следующий раз на более сложном материале 10-11 классов, ЕГЭ.

Электронная почта:
Шевкин Александр Владимирович
avshevkin@mail.ru.
сайт www.shevkin.ru
Канал **НАБЛЮДАТЕЛЬ**
на **Яндекс Дзен**