

Тема:

Интегрирование заменой переменной

Цель обучения:

находить интеграл, используя метод замены
переменной

Критерии оценивания:

- знает алгоритм метода замены переменной для нахождения неопределенного интеграла;
- умеет применять метод замены переменной (метод подстановки) для нахождения неопределенного интеграла.

Правила интегрирования

$$1. \int dx = x + c$$

$$2. \int k dx = k \int dx = kx + c$$

$$3. \int (u \pm v) dx = \int u dx \pm \int v dx + c$$

$$4. \int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$$

$$5. \int (ax + b)^n dx = \frac{ax^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

Интегрирование заменой переменной

Пусть $x-1=t$, тогда $x = t+1$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx \quad \text{отсюда } dx = dt$$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C$$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$1) \int x\sqrt{3x^2 - 1} dx = \frac{1}{6} \int t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{6} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9} (3x^2 - 1)\sqrt{3x^2 - 1} + C.$$

$$\left(\text{если } 3x^2 - 1 = t, \quad 6x dx = dt, \quad \text{тогда } x dx = \frac{1}{6} dt \right).$$

$$2) \int x\sqrt{2x-1} dx = \int \frac{t^2+1}{2} t \cdot t dt = \frac{1}{2} \int (t^4 + t^2) dt = \frac{1}{10} t^5 + \frac{1}{6} t^3 + C =$$

$$= \frac{1}{10} (2x-1)^2 \sqrt{2x-1} + \frac{1}{6} (2x-1)\sqrt{2x-1} + C.$$

$$\left(\text{если } \sqrt{2x-1} = t, \text{ тогда } x = \frac{t^2+1}{2}, \quad dx = t dt \right).$$

Работа в группе

Найдите интеграл:

$$1) \int \frac{2x dx}{x^4 + 3}$$

Решение:

$x^2 = t$ отсюда $2 x dx = dt$

Вычисляем интеграл относительно новой переменной, затем возвращаемся к замене

$$\int \frac{2x dx}{x^4 + 3} = \int \frac{dt}{t^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C.$$

3 пара

Найдите интеграл:

$$6.13. \int \frac{2xdx}{3x^2 - 7}.$$

$$6.14. \int \frac{2xdx}{\sqrt{2x^2 + 5}}.$$

$$6.15. \int \frac{xdx}{\sqrt{7 - 3x^2}}.$$

$$6.16. \int \frac{xdx}{2x^2 + 9}.$$

$$6.17. \int \frac{5xdx}{\sqrt{3 - 5x^2}}.$$

$$6.18. \int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2 + 8}}.$$

$$6.19. \int \frac{5xdx}{\sqrt{5x^2 + 3}}.$$

$$6.20. \int \frac{xdx}{3x^2 - 6}.$$

$$6.21. \int \frac{xdx}{5x^2 + 1}.$$

4 пара

Найдите интеграл:

$$10.1. \int \sin^4 2x \cos 2x dx.$$

$$10.2. \int \frac{\cos 2x}{\sin^3 2x} dx.$$

$$10.3. \int \frac{\sin 3x}{\cos^4 3x} dx.$$

$$10.4. \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos x}} dx.$$

$$10.5. \int \frac{\sin x}{\cos^5 x} dx.$$

$$10.6. \int \cos^7 2x \sin 2x dx$$

$$10.7. \int \frac{\cos x dx}{\sin x + 2}.$$

$$10.8. \int \frac{\cos x dx}{3 - \sin x}.$$

Самостоятельная работа

Найдите интеграл:

$$\int \frac{\sin 3x}{3 - \cos 3x} dx.$$

$$\int \frac{3x^3}{1 - x^4} dx.$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1 + 3 \cos 2x} dx.$$

$$\int \frac{\sin 2x}{\cos^2 x - 4} dx.$$



Домашняя работа

Найдите интегралы:

$$3.1. \int \frac{dx}{3-x} \quad 3.2. \int \frac{dx}{3x+9} \quad 3.3. \int \frac{dx}{2-3x}$$

$$3.4. \int \frac{dx}{1-4x} \quad 3.5. \int \frac{dx}{2+3x} \quad 3.6. \int \frac{dx}{2-5x}$$

$$3.7. \int \frac{dx}{3x-2} \quad 3.8. \int \frac{dx}{2x+3} \quad 3.9. \int \frac{dx}{3x-4}$$

Рефлексия

