ALGORYTMY I STRUKTURY DANYCH

W-4

Jan Sikora

WSEI, Lublin 2021

WYŻSZA SZKOŁA EKONOMII I INNOWACJI
W LUBLINIE

Źródło:

B. Pańczyk
E. Łukasik
J. Sikora
T. Guziak

Metody Numeryczne w przykładach

Wydawca: Politechnika Lubelska

Treść wykładu

1. Aproksymacja
2. Aproksymacja średniokwadratowa.
3. Całkowanie numeryczne (kwadratury interpolacyjne).

Aproksymacja

Aproksymacja (łac. approximare – przybliżać) – proces określania rozwiązań przybliżonych na podstawie rozwiązań znanych, które są bliskie rozwiązaniom dokładnym w ściśle sprecyzowanym sensie.

Zazwyczaj aproksymuje się byty (np. funkcje) skomplikowane bytami prostszymi. Często stosowana w przypadku szukania rozwiązań dla danych uzyskanych metodami empirycznymi, które mogą być obarczone błędami[

Źródło: Wikipedia

Aproksymacja

Zadanie aproksymacyjne może być sformułowane bardzo różnie. W klasycznym przypadku dla danej funkcji f spośród funkcji ustalonej klasy poszukuje się funkcji F (też ustalonej klasy), która w określonym sensie najlepiej przybliża f.

Innym zadaniem jest wyznaczenie, możliwie niskim kosztem, przybliżenia F funkcji f z zadaną dokładnością. Można również stawiać problem aproksymacji nie jednej, ale całej klasy funkcji, funkcjami innej klasy. Rozwiązania tak różnie postawionych zadań są oczywiście różne, nie istnieje więc jedna „optymalna" aproksymacja.

Funkcję $f(x)$, znaną lub określoną tablicą wartości, będziemy aproksymować (zastępować) inną funkcją $F(x)$, zwaną ***funkcją aproksymującą*** lub ***przybliżeniem*** funkcji $f(x)$. Oczywiście przybliżenie takie powoduje powstanie błędów aproksymacji.

Aproksymacja

Niech $f(x)$ będzie funkcją, którą chcemy aproksymować, X - pewną przestrzenią liniową unormowaną (tzn. określona jest w niej funkcja nazywana normą) zaś X_{m+1} – $(m+1)$-wymiarową podprzestrzenią liniową przestrzeni X.

Aproksymacja funkcji $f(x)$ polega na wyznaczeniu takich współczynników $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ funkcji:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x),$$

aby spełniała ona pewne warunki (np. minimalizowała normę różnicy $\|f(x) - F(x)\|$), przy czym $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ są funkcjami bazowymi $m+1$ wymiarowej podprzestrzeni liniowej X_{m+1}.

Wybór odpowiedniej podprzestrzeni X_m i związanej z nią bazy (funkcji bazowych $\varphi_k(x)$) jest zagadnieniem istotnym ze względu na numeryczny koszt rozwiązania i błędy zaokrągleń.

Aproksymacja

Często obieraną podprzestrzenią X_{m+1} jest:

- podprzestrzeń funkcji trygonometrycznych z bazą:
  1, sin x, cos x, sin $2x$, cos $2x$, ..., sin kx, cos kx,
  szczególnie przydatna, gdy aproksymowana funkcja $f(x)$ jest funkcją okresową;

podprzestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej m z bazą jednomianów: $1, x, x^2, x^3, \ldots, x^m$.

- Mimo prostoty działań na wielomianach, baza ta ma istotną wadę - wrażliwość na błędy zaokrągleń; kumulujące się błędy w przypadku działań na małych oraz na niewiele różniących się liczbach mogą całkowicie zniekształcić obliczenia.
- podprzestrzeń wielomianów stopnia co najwyżej m, określonych na przedziale <-1, 1> z bazą wielomianów Czebyszewa opisanych dalej wzorem (3.65):
  $T_0(x), T_1(x), T_2(x), \ldots, T_m(x)$,
- czy też z bazą wielomianów Legendre'a wzór (3.56):
  $L_0(x), L_1(x), L_2(x), \ldots, L_m(x)$.

Aproksymacja

Zagadnienie aproksymacji przy wybranych funkcjach bazowych $\varphi_k(x)$ sprowadza się do jednoznacznego wyznaczenia wartości współczynników a_k, zapewniających minimum normy $\|f(x) - F(x)\|$, czyli:

$$\|f(x) - \left(a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)\right)\| .$$

Norma jest tu rozumiana w sensie miary odległości między dwoma funkcjami. Najczęściej stosowane normy w aproksymacji to:

- norma jednostajna (Czebyszewa) (wzór 3.34),
- norma L_2 (wzór 3.35),
- norma średniokwadratowa (wzór 3.36).

Aproksymacja

Zagadnienie aproksymacji przy wybranych funkcjach bazowych $\varphi_k(x)$ sprowadza się do jednoznacznego wyznaczenia wartości współczynników a_k, zapewniających minimum normy $||f(x) - F(x)||$, czyli:

$$||f(x) - \left(a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)\right)|| .$$

Norma jest tu rozumiana w sensie miary odległości między dwoma funkcjami. Najczęściej stosowane normy w aproksymacji to:

- norma jednostajna (Czebyszewa) (wzór 3.34),
- norma L_2 (wzór 3.35),
- norma średniokwadratowa (wzór 3.36).

W zależności od stosowanej normy mówimy odpowiednio o aproksymacji jednostajnej (Czebyszewa), aproksymacji z normą L_2, **aproksymacji średniokwadratowej**.

Aproksymacja

Aproksymacja w przypadku normy L_2 z wagą

Dla funkcji $f(x)$ określonej i ciągłej na przedziale $<a, b>$ poszukujemy minimum całki:

$$\|F(x) - f(x)\| = \int_a^b w(x)[F(x) - f(x)]^2 dx, \tag{3.35}$$

gdzie $w(x)$ jest ciągłą nieujemną funkcją wagową, dodatnią poza zbiorem miary zero.

Natomiast dla funkcji $f(x_i)$, danej na dyskretnym zbiorze argumentów, poszukujemy minimum sumy (***metoda najmniejszych kwadratów***):

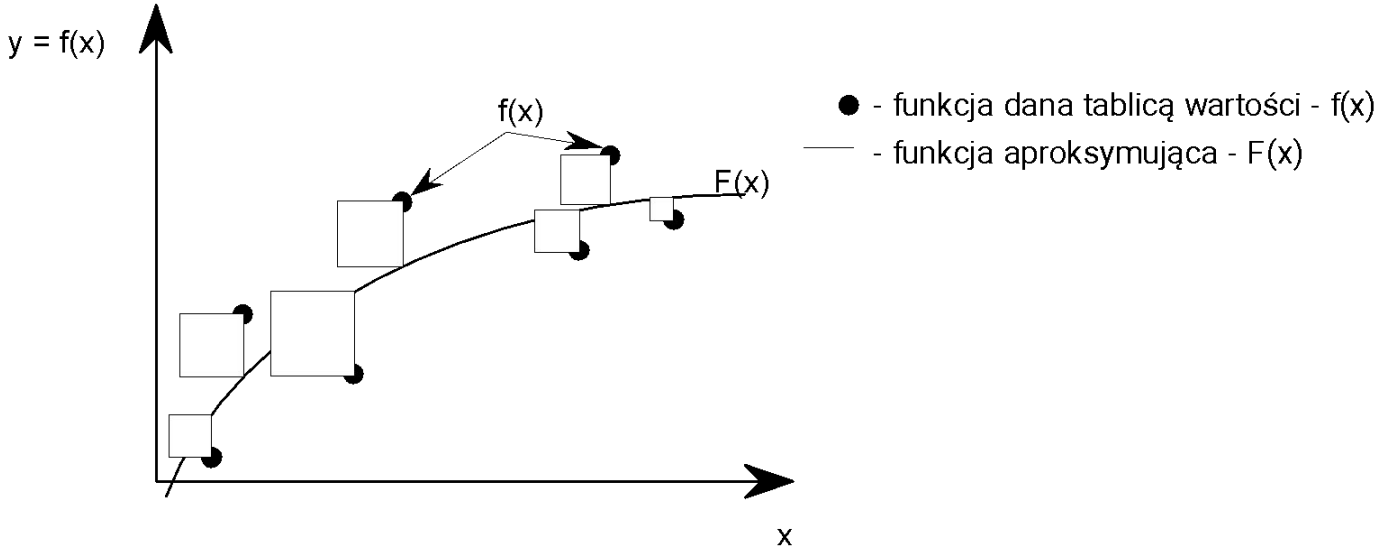
$$\|F(x) - f(x)\|^2 = \sum_{i=0}^{n} w(x_i)[F(x_i) - f(x_i)]^2, \tag{3.36}$$

przy czym $w(x_i)$ jest ***funkcją wagową*** taką, że $w(x_i) \geq 0$ dla $i = 0, 1, ..., n$.

Aproksymacja średniokwadratowa

Aproksymacja taka nazywa się ***aproksymacją średniokwadratową***. Polega ona na takim wyznaczeniu funkcji $F(x)$, aby suma kwadratów odległości jej wartości od wartości danej funkcji $f(x)$ była jak najmniejsza (rys. 3.5).

Aproksymacja średniokwadratowa znacznie lepiej od aproksymacji jednostajnej „eliminuje” duże błędy przypadkowe (np. wynikające z pomyłek przy pomiarach).



Rys. 3.5. Interpretacja graficzna aproksymacji średniokwadratowej

Aproksymacja średniokwadratowa

Niech będzie dana funkcja $y = f(x)$, która na pewnym zbiorze **X** punktów: $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ przyjmuje wartości $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Wartości te mogą być przybliżone, obarczone pewnymi błędami (np. błędami obserwacji pomiarowych). Należy znaleźć funkcję $F(x)$ mało odchylającą się od danej funkcji $f(x)$ zarówno między węzłami, jak i w węzłach $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, która przybliżałaby daną funkcję tak, aby ją wygładzić.

Niech $\varphi_j(x)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, m$, będzie układem funkcji bazowych podprzestrzeni X_m. Poszukujemy wielomianu uogólnionego postaci:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x) \tag{3.37}$$

lub:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i\varphi_i(x), \tag{3.38}$$

będącego najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym funkcji $f(x)$, przy czym współczynniki a_i są tak określone, aby wyrażenie (3.36) było minimalne.

Aproksymacja średniokwadratowa

Oznaczmy:

$$H(a_0, a_1, a_2, ..., a_m) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} w(x_j) \left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i(x_j) \right]^2 = \sum_{j=0}^{n} w(x_j) R_j^2, \qquad (3.39)$$

gdzie $w(x)$ jest ustaloną z góry funkcją wagową taką, że $w(x_i) \geq 0$ dla $i = 0, 1, 2, ..., n$, zaś R_i jest odchyleniem w punkcie x_i. Najczęściej przyjmuje się, że funkcja wagowa $w(x)$ ma stałą wartość, równą tożsamościowo jedności, można jednak dobrać inną funkcję wagową (np. jeżeli wartości funkcji $f(x)$ w pewnych punktach znane są z mniejszym błędem, to w celu otrzymania lepszego przybliżenia przyjmuje się w tych punktach większe wartości funkcji wagowej).

Aproksymacja średniokwadratowa

W celu znalezienia takich współczynników a_k, dla których funkcja H osiąga minimum, obliczamy pochodne cząstkowe względem zmiennych a_k i przyrównujemy je do zera:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = 0 \qquad k = 0,1,2,\ldots,m\,.$$

Otrzymujemy układ m+1 równań z m+1 niewiadomymi a_k, $k = 0, 1, 2, \ldots, m$:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{j=0}^{n} w\left(x_j\right)\left[f\left(x_j\right) - \sum_{i=0}^{m} a_i \varphi_i\left(x_j\right)\right]\varphi_k\left(x_j\right) = 0\,, \qquad (3.40)$$

zwany ***układem normalnym***. Ponieważ funkcje $\varphi_j(x)$ tworzą bazę przestrzeni X_m, zatem wyznacznik układu (3.40) jest różny od zera i jednoznaczne rozwiązanie tego układu zapewnia minimum funkcji H.

Aproksymacja średniokwadratowa

W zapisie macierzowym układ (3.40) przyjmuje postać:

$$\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{A}=\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{f}, \tag{3.41}$$

gdzie:

$$\mathbf{D}=\begin{bmatrix} \varphi_0(x_0) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \varphi_m(x_0) \\ \varphi_0(x_1) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \varphi_m(x_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_0(x_n) & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \varphi_m(x_n) \end{bmatrix},\ \mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix},\ \mathbf{f}=\begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix}.$$

Macierz współczynników układu jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, co zapewnia jednoznaczność rozwiązania.

Układ (3.40) lub (3.41) powstaje z równania (3.37) po podstawieniu wartości punktów węzłowych x_i, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Otrzymujemy wówczas nadokreślony układ $n+1$ równań z $m+1$ niewiadomymi $\mathbf{DA} = \mathbf{f}$, z którego po pomnożeniu (lewostronnie) przez $\mathbf{D}^{\mathrm{T}}$ dochodzi się do (3.41).

Aproksymacja średniokwadratowa

Jeżeli za funkcje bazowe $\varphi_j(x)$ przyjmuje się ciąg jednomianów $1, x, x^2, x^3, ..., x^m$, to wzór (3.40) można zapisać w postaci:

$$\sum_{j=0}^{n}\left[f\left(x_j\right) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i \right] x_j^k = 0 \; k = 0,1,2,\ldots,m \,,$$

lub po przekształceniu:

$$\sum_{j=0}^{n} f(x_j) x_j^k = \sum_{i=0}^{m} a_i \left(\sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k} \right) \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ ...,\ m. \qquad (3.42)$$

Oznaczając:

$$g_{ik} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}, \; \varsigma_k = \sum_{j=0}^{n} f\left(x_j\right) x_j^k,$$

otrzymujemy układ normalny (3.40) postaci:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_{ik} = \varsigma_k \;\; k = 0,1,2,\ldots,m \qquad (3.43)$$

Aproksymacja średniokwadratowa

lub:

$$
\begin{array}{lllll}
a_0(n+1)+ & a_1\sum x_j + & \dots & +a_m\sum x_j^m & = & \sum f(x_j) \\
a_0\sum x_j + & a_1\sum x_j^2 + & \dots & +a_m\sum x_j^{m+1} & = & \sum f(x_j)x_j \\
a_0\sum x_j^2 + & a_1\sum x_j^3 + & \dots & +a_m\sum x_j^{m+2} & = & \sum f(x_j)x_j^2 \; . \\
\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots \\
a_0\sum x_j^m + & a_1\sum x_j^{m+1} + & \dots & +a_m\sum x_j^{2m} & = & \sum f(x_j)x_j^m
\end{array}
$$

gdzie wszystkie sumowania wykonywane są od j=0 do j=n.

Aproksymacja średniokwadratowa

Można wykazać, że jeżeli punkty $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ są różne i $m \leq n$, to wyznacznik układu (3.43) jest różny od zera, a więc układ ten ma jednoznaczne rozwiązanie. Jeżeli $m = n$, to wielomian aproksymacyjny $F(x)$ pokrywa się z wielomianem interpolacyjnym dla punktów $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$ i wówczas H=0. W praktyce stopień wielomianu m jest i powinien być znacznie niższy od liczby punktów n, wtedy bowiem korzystamy z dużej ilości informacji (np. wyników pomiarów) uzyskując równocześnie prostsze (niskiego stopnia) funkcje aproksymujące.

Wielomian aproksymujący daną funkcję $f(x)$ w sensie najmniejszych kwadratów powinien mieć stopień na tyle wysoki, aby dostatecznie przybliżać aproksymowaną funkcję, a jednocześnie stopień ten powinien być wystarczająco niski, aby wielomian ten wygładzał losowe błędy wynikające np. z pomiarów. W praktyce stopień wielomianu określamy a priori na podstawie analizy modelu fizycznego badanego zjawiska bądź też przeprowadzamy aproksymację kolejno wielomianami coraz to wyższych stopni i obliczamy odchylenia funkcji H.

Aproksymacja średniokwadratowa

Dla $m \geq 6$ układ (3.43) jest źle uwarunkowany, wskutek czego otrzymane wyniki obliczeń mogą być tak bardzo zaburzone, iż nie nadają się do praktycznego wykorzystania.

Niech x_i będą rozłożone w jednakowych odstępach w przedziale $< 0, 1 >$. Liczby g_{ik} występujące we wzorze (3.43) można dla dużych m przybliżyć następująco:

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{m} x_j^{i+k} \approx m\int_0^1 x^{i+k}dx = \frac{m}{i+k+1}, \; i, k = 0, 1, 2, \ldots, m.$$

Macierz współczynników układu (3.43) ma postać:

Aproksymacja średniokwadratowa

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{m+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{m+2} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \frac{1}{m+1} & \frac{1}{m+2} & \dots & \frac{1}{2m+1} \end{bmatrix}.$$

Elementy macierzy odwrotnej $\mathbf{G}^{-1}$ są rzędu $3 \cdot 10^{12}$, co powoduje błędy zaokrągleń tak duże, że wyniki praktycznie tracą sens. Zatem stosowanie aproksymacji z funkcjami bazowymi typu jednomianów x^i ma sens jedynie dla małych m ($m < 6$).

Aproksymacja średniokwadratowa

W celu aproksymacji danej funkcji wielomianami wyższych stopni należy:

- zastosować specjalną metodę rozwiązywania układów równań, których macierz współczynników ma wyznacznik bliski zeru;
- zwiększyć precyzję (dokładność) wykonywania obliczeń;
- zastąpić bazę jednomianów x^i bazą złożoną z wielomianów ortogonalnych.

Aproksymacja średniokwadratowa

Przykład 3.7.

W tabeli 3.5 dane są wyniki pewnych pomiarów. Metodą najmniejszych kwadratów znaleźć funkcję liniową, która najlepiej aproksymuje podane dane.

Tabela 3.5. Wyniki pomiarów do przykładu 3.7

j	0	1	2	3	4	5	6	7
x_j	1	3	4	6	8	9	11	14
$f(x_j)$	1	2	4	4	5	7	8	9

Aproksymacja średniokwadratowa

W celu znalezienia funkcji liniowej, aproksymującej dane z tabeli, należy wyznaczyć funkcję postaci (3.37):

$$F(x) = y(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) = a_0 + a_1 x = \sum_{i=0}^{1} a_i\varphi_i(x_j)$$

dla j=0,1,...,7 oraz $\varphi_0(x) = x^0$, $\varphi_1(x) = x^1$.

Określając funkcję H, zgodnie z (3.39), otrzymujemy:

$$H(a_0, a_1) = \sum_{j=0}^{7}\left[f(x_j) - F(x_j)\right]^2 = \sum_{j=0}^{7}\left[f(x_j) - a_0\,\varphi_0(x_j) - a_1\varphi_1(x_j)\right]^2 =$$

$$= \sum_{j=0}^{7}\left[f(x_j) - a_0 - a_1 x_j\right]^2$$

Aproksymacja średniokwadratowa

W celu wyznaczenia szukanych współczynników a_0, a_1 obliczamy pochodne cząstkowe funkcji H względem zmiennych a_k oraz przyrównujemy je (patrz wzór 3.40) do zera:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{j=0}^{7}\left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m=1} a_i \varphi_i(x_j)\right]\varphi_k(x_j) = 0$$

W ten sposób otrzymujemy układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial a_0} = -2\sum_{j=0}^{7}\left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m=1} a_i\, \varphi_i(x_j)\right]\varphi_0(x_j) = 0 \\ \dfrac{\partial H}{\partial a_1} = -2\sum_{j=0}^{7}\left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m=1} a_i\, \varphi_i(x_j)\right]\varphi_1(x_j) = 0 \end{cases}.$$

Aproksymacja średniokwadratowa

Podstawiając do powyższego układu $\varphi_0(x) = x^0 = 1$, $\varphi_1(x) = x$ oraz dzieląc obustronnie oba równania przez (-2) mamy:

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{7} \left[f(x_j) - a_0 - a_1 x_j \right] \cdot 1 = 0 \\ \sum_{j=0}^{7} \left[f(x_j) - a_0 - a_1 x_j \right] \cdot x_j = 0 \end{cases}.$$

Podstawiając następnie za x_j i $f(x_j)$, $j=0,\ldots,7$ wartości z tabeli 3.5 pierwsze równanie powyższego układu przyjmie postać:

$$(1 - a_0 - 1 \cdot a_1) + (2 - a_0 - 3 \cdot a_1) + (4 - a_0 - 4 \cdot a_1) + (4 - a_0 - 6 \cdot a_1) +$$
$$+ (5 - a_0 - 8 \cdot a_1) + (7 - a_0 - 9 \cdot a_1) + (8 - a_0 - 11 \cdot a_1) + (9 - a_0 - 14 \cdot a_1) = 0$$

Aproksymacja średniokwadratowa

a drugie:

$$(1-a_0-1\cdot a_1)\cdot 1+(2-a_0-3\cdot a_1)\cdot 3+(4-a_0-4\cdot a_1)\cdot 4+$$
$$+(4-a_0-6\cdot a_1)\cdot 6+(5-a_0-8\cdot a_1)\cdot 8+(7-a_0-9\cdot a_1)\cdot 9+$$
$$+(8-a_0-11\cdot a_1)\cdot 11+(9-a_0-14\cdot a_1)\cdot 14=0$$

Po dalszych uproszczeniach otrzymujemy:

$$\begin{cases} 40 \quad -8\ a_0-56\ \cdot a_1=0 \\ 364-56a_0-524\cdot a_1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8\ a_0+56\ \cdot a_1=40 \\ 56a_0+524\cdot a_1=364 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_0+7\ \cdot a_1=5 \\ 14a_0+131\cdot a_1=91 \end{cases}.$$

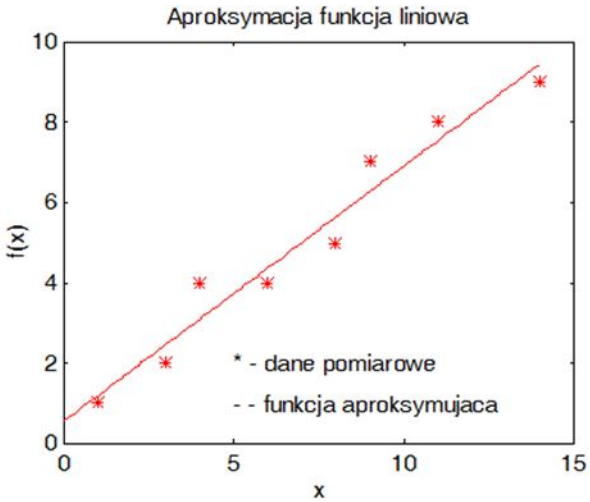
Aproksymacja średniokwadratowa

Rozwiązaniem układu jest:

$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{6}{11} \\ a_1 = \dfrac{7}{11} \end{cases}.$$

Poszukiwana funkcja *F(x)* ma wobec tego postać: $F(x) = \dfrac{6}{11} + \dfrac{7}{11}x$.

Graficzną reprezentację przykładu demonstruje rys. 3.6.



Zadania do samodzielnego rozwiązania

<u>Zadanie 3.5.</u>

Wyznaczyć funkcję liniową, która w sensie metody najmniejszych kwadratów aproksymuje dane z tabeli 3.14.

Tabela 3.14. Dane do zadania 3.5

x_i	1	2	3	6	9
f_i	-4	-6	-8	-14	-20

Odp. [illegible] = −2[illegible] − 2.

Całkowanie numeryczne (kwadratury interpolacyjne)

W niniejszym rozdziale podane zostaną metody numerycznego całkowania funkcji (tzw. kwadratury) [1, 4, 7, 8, 9, 10]. Będą to metody, które jako wynik dadzą przybliżoną wartość liczbową całki postaci:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \qquad (6.1)$$

Zakładamy, że jest to całka właściwa tzn. ma skończone granice całkowania oraz funkcja podcałkowa *f(x)* jest ciągła w przedziale całkowania. Obliczenie całki (6.1) nastąpi przy użyciu kwadratur postaci:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \sigma_{i=0}^{n} A_i f(x_i). \qquad (6.2)$$

Współczynniki kwadratury A_i oraz węzły x_i są niezależne od funkcji podcałkowej *f(x)*. Obliczenie wartości całki (6.1) będzie polegało na aproksymacji funkcji podcałkowej za pomocą łatwo całkowalnej funkcji. W rozdziale podane zostaną dwa rodzaje kwadratur:

Całkowanie numeryczne (kwadratury interpolacyjne)

- kwadratury Newtona-Cotesa, które oparte są na przybliżeniu funkcji podcałkowej wielomianami stopnia pierwszego (metoda trapezów) oraz stopnia drugiego (metoda Simpsona);
- kwadratury Gaussa, które polegają na wykorzystaniu wielomianów ortogonalnych i takim wyborze punktów x_i oraz współczynników A_i, aby kwadratura była dokładna dla wszystkich wielomianów możliwie najwyższego stopnia.

Wzór trapezów

Całkę (6.1) możemy przybliżać jako pole trapezu wyznaczonego przez granice całkowania. Dla przypadku przedstawionego na rys.6.1 kwadratura wyraża się wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + R(f) \qquad (6.5)$$

Dla dwóch węzłów $x_0=a$ i $x_1=b$ błąd takiej kwadratury jest dość duży. Dlatego dokonuje się podziału przedziału całkowania na n równej długości podprzedziałów $[x_i, x_{i+1}]$. Krok między węzłami wynosi wtedy:

$$h = \frac{b-a}{n}, \qquad (6.6)$$

natomiast węzły spełniają zależność:

$$x_i = a + ih = x_{i-1} + h \quad \text{dla } i = 0,1,\ldots,n \qquad (6.7)$$

W takim przypadku przybliżenie całki (6.1) jest sumą pól trapezów wyznaczonych przez kolejne podprzedziały:

Wzór trapezów

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{2}\left[f(x_i) + f(x_{i+1})\right] = \left[\frac{1}{2}f(x_0) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}f(x_n)\right]$$

Ostatecznie **wzór złożony trapezów** można zapisać w postaci:

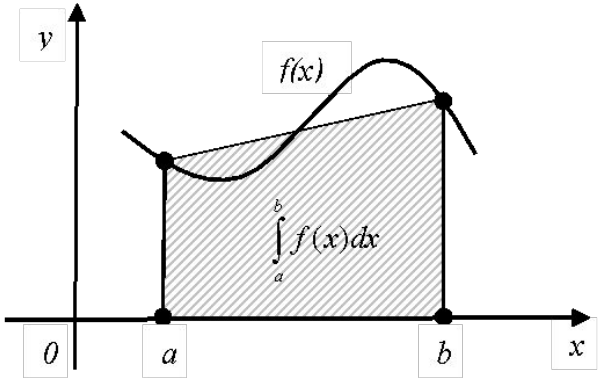
$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2}f(x_n)\right]. \qquad (6.8)$$

Błąd tej kwadratury jest rzędu $O(h^2)$ i wynosi dokładnie:

$$-\frac{(b-a)h^2}{12} f''(\xi), \quad \xi \in (a, b). \qquad (6.9)$$

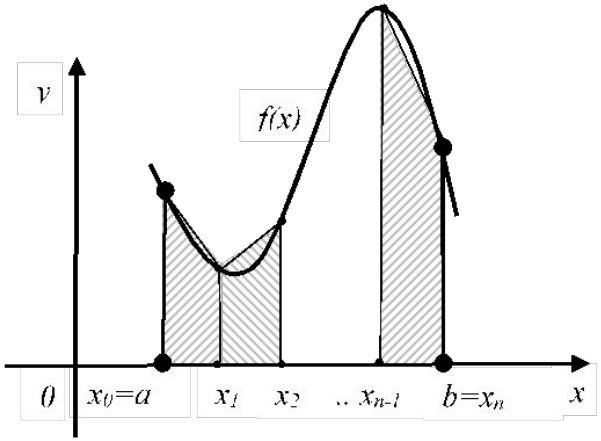
Wynika on z twierdzenia o reszcie w interpolacji wielomianowej.

Wzór trapezów



Rys. 6.1. Wzór trapezów dla n=1

Interpretację geometryczną złożonego wzoru trapezów przedstawia rys. 6.2.



Rys. 6.2. Wzór złożony trapezów

Wzór trapezów

<u>Przykład 6.1.</u>

Obliczyć wartość całki $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ stosując wzór złożony trapezów z krokiem h=1/3.

Wynik obliczony w sposób analityczny to I=1.21895. Liczba podprzedziałow wynosi:

$$n = \frac{b-a}{h} = \frac{1-0}{\frac{1}{3}} = 3,$$

a liczba węzłów jest równa (n+1) czyli w naszym przykładzie 4.

Węzły mają wartości:

$x_0 = 0$ – lewy przedział całkowania,

$x_1 = x_0 + h = 1/3$,

$x_2 = x_1 + h = 2/3$,

$x_3 = x_2 + h = 1$ – prawy przedział całkowania.

Wzór trapezów

Wzór na kwadraturę to:

$$I_3 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i) = \sum_{i=0}^{3} \sqrt{1 + x_i^2}.$$

Wykonując obliczenia dla naszego przypadku mamy:

$$I_3 = \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \frac{1}{2} f(x_3) \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\frac{1}{2} \sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + \frac{1}{3}} + \sqrt{1 + \frac{2}{3}} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + 1} \right] = 1.21760$$

Wartość błędu wynosi dla n=3 wynosi:

$$\delta = \left| \frac{I_3 - I}{I} \right| 100\% = \left| \frac{1.21760 - 1.21895}{1.21895} \right| 100\% = 11.08\%$$

Oczywiście dla mniejszego kroku, czyli większej liczby węzłów, wartość błędu też się zmniejszy i wynik będzie dokładniejszy.

Wzór złożony trapezów

```
clc
clear all;
close all;

format long
a=0.;
b=1.;
n=4000;
h=(b-a)/n;
# definicja funkcji podcalkowej
function [y]= my_func(x)
y=sqrt(1.+x);
end
# wzor zlozony trapezow
x(1)=a;
for i=2:n+1
  x(i)=x(i-1)+h;
  y(i)=my_func(x(i));
end
disp('przedzialy calkowania')
x
Ts=0.;
for i=2:n
  Ts=Ts+y(i);
end
# wzor zlozony trapezow
Tn=h*(0.5*y(1) + Ts + 0.5*y(n+1));

disp('wynik calkowania metoda trapezow')
Tn
```

Wzór Simpsona

Całkę $\int_a^b f(x)\,dx$ (6.1) możemy przybliżać również jako pole pod parabolą przechodzącą przez punkty $x_0=a$, $x_1=(a+b)/2$, $x_2=b$, czyli:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]. \qquad (6.10)$$

Przy podziale przedziału całkowania na $n/2$ równej długości podprzedziały $[x_i, x_{i+1}]$, przy założeniu parzystości liczby n, otrzymujemy wzór złożony.

Wzór ten ma postać:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n/2-1} \frac{2h}{6}\left[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\right]$$

$$= \frac{h}{3}\left[f(x_0) + + 4f(x_1) + f(x_2)\right]$$
$$+ \left[f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4)\right]$$
$$+ \left[f(x_4) + + 4f(x_5) + + f(x_6)\right] + \ldots$$
$$+ \left[f(x_{n-2}) + 4f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

Wzór Simpsona

Ostatecznie wzór złożony Simsona to:

$$S = \frac{h}{3}\left(f(x_0) + 4\left(f(x_1) + f(x_3) + \ldots + f(x_{n-1})\right) + 2\left(f(x_2) + f(x_4) + \ldots + f(x_{n-2})\right) + f(x_n)\right) \qquad (6.11)$$

Błąd tej kwadratury jest rzędu $O(h^4)$ i wynosi dokładnie:

$$-\frac{(b-a)h^4}{180} f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (a, b).$$

<u>Przykład 6.2.</u>

Obliczyć wartość całki $\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ z przykładu 6.1 za pomocą wzoru złożonego Simpsona.

Wartość kroku w tej metodzie musi ulec zmianie – nie może wynosić h=1/3, bo wówczas n nie jest liczba parzystą. Weźmy h=1/4 i wtedy n=4. Węzły wynoszą odpowiednio: 0, ¼, ½, ¾, 1.

Wzór złożony Simpsona dla tego zadania ma postać:

Wzór Simpsona

$$\int_4 = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_3) + 2f(x_2) + f(x_4)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[f(0) + 4f\left(\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{3}{4}\right) + 2f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1)\right] =$$

$$= \frac{1}{12}\left[\xi\overline{1} + 4\left(\xi\overline{\frac{5}{4}} + \xi\overline{\frac{7}{4}}\right) + 2\left(\xi\overline{\frac{3}{2}} + \xi\overline{2}\right)\right] = 1.21895$$

Przy obliczeniach analitycznych, już dla 5 węzłów osiągamy dokładność wyniku 10^{-5}.

<u>Przykład 6.3.</u>

Stosując wzór złożony Simpsona obliczyć przybliżoną wartość ln(7).

W tym celu należy skorzystać z zależności:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{x}\,dx \qquad x > 1.$$

Wzór Simpsona

Przyjmijmy krok obliczeń h=0.2. Wtedy:

$$n = \frac{7-1}{0.2} = 30.$$

Węzły mają wartości:

$$x_0 = 1, \quad x_i = x_{i-1} + 0.2 \quad \text{dla } i = 1,2,\ldots,30.$$

Wzór złożony Simpsona przyjmuje w tym przykładzie postać:

$$I_{30} = \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4\sum_{i=0}^{14} f(x_{2i+1}) + 2\sum_{i=1}^{14} f(x_{2i}) + f(x_{30})\right].$$

Funkcja podcałkowa ma postać:

$$f(x_i) = \frac{1}{x_i}.$$

Wzór Simpsona

Węzły wyrażają się zależnościami:

$$x_{2k} = 1 + h\,k\,2k,$$

$$x_{2k+1} = 1 + h\,k\,(2k + 1).$$

Ostatecznie

$$I_{30} = \frac{0.2}{3}\left(1 + 4\sum_{k=0}^{14}\frac{1}{1.2+0.4k} + 2\sum_{k=1}^{14}\frac{1}{1+0.4k} + \frac{1}{7}\right) = 1.94596.$$

Wynik dokładny to 1.94591.

Ostateczna postać wzoru złożonego Simpsona przybliżającego ln(7) dla dowolnego parzystego *n* to:

$$I_n = \frac{h}{3}\left(1 + 4\sum_{k=0}^{n/2}\frac{1}{1+h\,k\,(2k+1)} + 2\sum_{k=1}^{n/2}\frac{1}{1+h\,k\,2k} + \frac{1}{7}\right)$$

Wzór Simpsona - przykład

```
clc
clear all;
close all;

format long
a=7.;
b=1.;
n=30;       # liczba przedzialow calkowania
h=(a-b)/n; # dlugosc podprzedzialu calkowania
x(1)=b;
disp('wezly calkowania')
for i=2:n+1 # n+1 liczba wezlow
  x(i)=x(i-1)+h;
end

# definicja funkcji podcalkowej
function [y]= my_func(x)
y=1./x;
end
for i=1:n+1
  y(i)=my_func(x(i));
end
# zlozony wzor Simpsona
Spa=0.;  # parzysty skladnik sumy
for i=2:2:n
  Spa=Spa+y(i);
end
Snp=0.;  # nieparzysty składnik sumy
for i=3:2:n-1
  Snp=Snp+y(i));
end
Sn=(h/3)*(y(1) + 4*Spa + 2*Snp + y(n+1));
disp('wynik calkowania metoda Simpsona dla dowolnego n')
Sn
```

Wzór Simpsona

Zagęszczanie węzłów daje następujące wyniki:

- dla n=40 wynik S_{40}=1.94593;
- dla n=50 wynik S_{50}=1.94592;
- dla n=60 wynik S_{60}=1.94591 (wartość jak dla wyniku dokładnego).

Kwadratury Gaussa

Kwadratura Gaussa oparta na *n+1* punktach ma być dokładna dla wielomianów: $1, x, x^2, \ldots, x^{2n+1}$. Powstaje układ *2(n+1)* równań nieliniowych z *2(n+1)* niewiadomymi. Okazuje się, że pierwiastki tego układu są miejscami zerowymi odpowiednich wielomianów ortogonalnych. Dzięki temu układ, który należy rozwiązać, redukuje się do *n+1* równań liniowych, z którego wyznacza się współczynniki kwadratury.

Rozważmy teraz całkę I_p określoną wzorem:

$$I_p = \int_a^b \omega(x) f(x)\, dx, \qquad (6.13)$$

gdzie funkcja wagowa ω jest dodatnia na [a,b].

Wielomiany ortogonalne – wielomiany wzajemnie do siebie ortogonalne w sensie pewnego iloczynu skalarnego. Korzysta się z nich między innymi przy rozwijaniu funkcji w szereg Fouriera i interpolacji wielomianowej.

Kwadratury Gaussa

Twierdzenie 6.1

Kwadraturą Gaussa postaci $\int_a^b f(x)\,\omega(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k f(x_k)$, (6.12) opartą na $n+1$ węzłach o maksymalnym rzędzie, równym $2n+1$, jest kwadratura interpolacyjna, której węzłami są pierwiastki $(n+1)$-go wielomianu ortogonalnego na $[a,b]$ z wagą ω.

Dla kwadratur Gaussa węzły kwadratury są zatem pierwiastkami odpowiedniego wielomianu ortogonalnego.

Twierdzenie 6.2

Współczynniki kwadratury Gaussa wyrażają się wzorami:

$$A_k = \frac{a_{n+1}}{a_n} \frac{\int_a^b \omega(x)\,dx}{p'_{n+1}(x_k)\,p_n(x_k)}, \quad k = 0,1,\ldots,n, \tag{6.14}$$

gdzie a_k jest współczynnikiem przy najwyższej potędze k-tego wielomianu ortogonalnego p_k, a $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są pierwiastkami $(n+1)$-ego wielomianu ortogonalnego.

Kwadratury Gaussa

Twierdzenie 6.3

Jeśli $\omega(x) \in C^{2n+2}[a, b]$, to reszta kwadratury Gaussa wyraża się wzorem:

$$R_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!\,a_{n+1}^2} \int_a^b \omega(x) P_{n+1}^2(x)\,dx \qquad (6.15)$$

W szczególnym przypadku, dla funkcji wagowej $\omega(x) = 1$, współczynniki kwadratury A_i i węzły x_i dobiera się tak, aby kwadratura była dokładna dla wszystkich wielomianów $w(x)$ stopnia nie większego niż $2n+2$. Wtedy kwadratura (6.2) jest kwadraturą Gaussa przybliżającą całkę:

$$\int_{-1}^{1} [illegible] \qquad (6.16)$$

Jest to osiągnięte, gdy spełniony jest układ:

$$\sum_{i=0} [illegible] = \int_{-1}^{1} [illegible] \quad [illegible] = 0, 1, \ldots, 2[illegible] + 1, \qquad (6.17)$$

w którym za funkcję podcałkową przyjmuje się wielomiany bazowe.

Kwadratury Gaussa

Po wyliczeniu prawych stron układ (6.17) można zapisac krócej:

$$\sigma_{k=0} \quad = \frac{1}{k+1}\left(1 - (-1)^{k+1}\right) \quad k = 0,1,\ldots,2n+1. \qquad (6.18)$$

Do obliczenia całki w dowolnym przedziale [*a*, *b*] dokonujemy liniowego przekształcenia przedziału [*a*, *b*] na przedział [-1, 1]. Wtedy:

$$x = \frac{b-a}{2}t + \frac{b+a}{2}. \qquad (6.19)$$

a całka po przekształceniu ma postać:

$$\int_a^b \quad = \frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} \quad \left(\frac{b-a}{2}t + \frac{b+2}{2}\right) \qquad (6.20)$$

Kwadratury Gaussa

Zalety kwadratur Gaussa:

1. Możemy przy ich użyciu obliczać przybliżone wartości całek osobliwych bardzo często występujące np. w fizyce.
2. Mają one dużo wyższą dokładność.
3. Dla $(n+1)$ punktów kwadratura Gaussa jest dokładna dla wielomianów stopnia $2n+1$, gdy kwadratury Newtona-Cotesa są dokładne tylko dla wielomianów n-tego stopnia.

Kwadratury Gaussa

<u>Przykład 6.4.</u>

Obliczyć współczynniki i węzły kwadratury Gaussa dla przedziału [-1,1] z funkcją wagową $w(x) = 1$ opartej na dwóch węzłach.

Przyjmując $n=1$, mamy kwadraturę rzędu 4. Należy rozwiązać układ równań dla k od 0 do $2n+1=3$ zgodnie ze wzorem (6.17):

$k = 0$: $A_0 x_0^0 + A_1 x_1^0 = 2$,

$k = 1$: $A_0 x_0^1 + A_1 x_1^1 = 0$,

$k = 2$: $A_0 x_0^2 + A_1 x_1^2 = \frac{2}{3}$,

$k = 3$: $A_0 x_0^3 + A_1 x_1^3 = 0$.

Kwadratury Gaussa

Rozwiązaniem są liczby:

$A_0 = A_1 = 1$

oraz

$$x_0 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Kwadratura dwupunktowa Gaussa dla przedziału [-1,1] i wagi $w(x) = 1$ ma postać:

$$Q_1(f) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

i przybliża ona całkę:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx.$$

Kwadratury Gaussa

<u>Przykład 6.5.</u>

Obliczyć wspólczynniki i węzły kwadratury Gaussa dla przedziału [-1,1] z funkcją wagową $w(x) = 1$ opartej na trzech węzłach. Dla *n=2* będzie to kwadratura rzędu 5.

Należy rozwiązać układ równań dla *k* od *0* do *5* zgodnie ze wzorem (6.16). Rozwiązaniem są liczby:

$A_0 = A_2 = 5/9, \quad A_1 = 8/9$.

oraz

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_1 = 0 \quad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Kwadratury Gaussa

Kwadratura trzypunktowa Gaussa dla przedziału [-1,1] i wagi:
$\omega(x) = 1$ ma postać:

$$Q_2(f) = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right).$$

i przybliża ona całkę:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

<u>Przykład 6.6.</u>

Sprawdzić, czy kwadratura postaci:

$$Q(f) = \frac{b-a}{3} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f\left(\frac{2a+b}{3}\right) + f\left(\frac{a+2b}{3}\right)$$

jest kwadraturą Gaussa przybliżającą wartość całki $\int_a^b f(x)\,dx$

Kwadratury Gaussa

K jest kwadraturą o trzech węzłach czyli n=2. Trzeba sprawdzić czy zachodzi wzór (6.15) dla:

$$A_0 = A_1 = A_2 = \frac{b-a}{3}$$

i węzłów:

$$x_0 = a, \quad x_1 = \frac{2a+b}{3}, \quad x_2 = \frac{a+2b}{3}.$$

Sprawdzamy, dla k = 0, czy zachodzi równość:

$$\sigma_{i=0}^{2} A_i f(x_i)^0 = \int_a^b f(x)^0 dx \quad .$$

Licząc stronami otrzymujemy:

$$L = \sigma_{i=0}^{2} A_i f(x_i)^0 = \sigma_{i=0}^{2} A_i \cdot 1 = A_0 + A_1 + A_2 = 3 \cdot \frac{b-a}{3} = b - a.$$

$$P = \int_a^b f(x)^0 dx = b - a.$$

Dla k = 0 zachodzi równość (L=P).

Kwadratury Gaussa

Podobne sprawdzenie należy zatem przeprowadzić dla k=1,2,…,5.

Dla k = 1 otrzymujemy:

$$\sigma_{i=0}^{2} \square_{\square}\square\square_{\square}\square^{1} = \square_{\square}^{\square}\square^{1}\square\square\square\square \quad .$$

Licząc stronami mamy:

$$L = \sigma_{i=0}^{2} A_i \square x_i \square^{1} = A_0 \square x_0 + A_1 \square x_1 + A_2 \square x_2 = \frac{b-a}{3}\square\square a + \frac{2a+b}{3} +$$

$$+ \frac{a+2b}{3}\square = \frac{b-a}{3}\square\frac{6a+3b}{3} = \frac{b-a}{3}\square\square 2a + b\square$$

$$\square\square = \square_{\square}^{\square}\square^{1}\square\square\square\square = \frac{1}{2}(\square\square^{2} - \square\square^{2}).$$

Wobec powyższego L≠P dla k=1 - zatem kwadratura ta nie jest kwadraturą przybliżającą podaną całkę, gdyż nie jest dokładna. Dla kolejnych k nie ma już potrzeby sprawdzania.

Kwadratury Gaussa

Z przykładu 6.6. wynika, iż węzły i wagi nie mogą być dowolnie wybrane w danym przedziale całkowania. Stąd cały proces wyboru tych danych w kwadraturach Gaussa ma istotne uzasadnienie.

W praktyce nie znajduje się jednak punktów i wag Gaussa z układu (6.15), tylko wykorzystuje się wielomiany ortogonalne. Wartości współczynników A_i oraz węzłów x_i dla poszczególnych wartości n oraz odpowiednich wielomianów ortogonalnych są stablicowane, ogólnie dostępne i nie oblicza się ich każdorazowo od nowa, gdyż generowałoby to bardzo duży koszt.

W kolejnych rozdziałach przedstawimy cztery najczęściej używane rodzaje wielomianów ortogonalnych i odpowiadające im kwadratury Gaussa.

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Wielomiany ortogonalne Legendre'a:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = 1,$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x). \qquad (6.26)$$

Funkcja wagowa dla tych wielomianów to:

$$w(x) = 1,$$

przedział całkowania [-1,1]. Zatem całkę (6.27) możemy przybliżać kwadraturami Gaussa- Legendre'a

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i), \qquad (6.27)$$

w której węzły x_i są pierwiastkami wielomianu ortogonalnego Legendre'a stopnia (n+1) a wartości A_i odpowiadającymi im współczynnikami. W tabeli 6.3 przedstawiono wartości tych współczynników dla wielomianów stopnia od 1 do 5.

Kwadratury Gaussa-Legendre'a

Tabela 6.3. Wartości węzłów i wag kwadratur Gaussa-Legendre'a

n	i	x_i	A_i
1	0	-0.577350	1
	1	0.577350	1
2	0	-0.774597	5/9
	1	0	8/9
	2	0.774597	5/9
3	0	-0.861136	0.347855
	1	-0.339981	0.652145
	2	0.339981	0.652145
	3	0.861136	0.347855
4	0	-0.906180	0.236927
	1	-0.538469	0.478629
	2	0	0.568889
	3	0.538469	0.478629
	4	0.906180	0.236927

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 6.1.

Obliczyć przybliżoną wartość całki

$$\int_0^3 - x^4 + 2.01x^2 + 1\,dx,$$

stosując wzór złożony trapezów oraz wzór złożony Simpsona dla liczby węzłów równej:

a) 7;
b) 10;
c) 13;
d) 25;
e) 31.

Odp. Wartość całki ze wzoru analitycznego wynosi: -27.51

Zadania do samodzielnego rozwiązania

<u>Zadanie 6 2.</u>

Obliczyć przybliżoną wartość całki:

$$\int_0^1 \quad + \quad (\quad)$$

stosując wzór złożony trapezów oraz wzór złożony Simpsona dla liczby węzłów równej:

a) 7;
b) 21.

Odp.

a) $T_6 = 0.937954$ $S_6 = 0.933279$;

b) $\underline{T_6 = 0.933709 \quad S_6 = 0.933289.}$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 6.3.

Obliczyć wzorem złożonym Simpsona z dokładnością do 10^{-3} pole pod jednym łukiem:

a) sinusoidy;
b) cosinusoidy.

Odp.

a) $S_6 = 2.00086$;
b) $S_6 = 2.00086$.

Zadanie 6.4.

Obliczyć dwupunktową kwadraturą Gaussa przybliżoną wartość całki:

$$\int_{-\xi\sqrt{3}+1}^{\xi\sqrt{3}+1} \left(\frac{x}{2}\sin(x) - 1\right)dx$$

Odp. $I_1 = -2.1591$.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 6.5.

Obliczyć trzypunktową kwadraturą Gaussa przybliżoną wartość całki:

$$\int_{-\xi\sqrt{5+\xi\sqrt{3}}}^{\xi\sqrt{5+\xi\sqrt{3}}} 4x^4 - 2x^2 \, dx.$$

Odp. $K_2 = 745.356$.

Zadanie 6.6.

Obliczyć dwupunktową oraz trzypunktową kwadraturą Gaussa przybliżone wartości całek:

a) $\int_1^3 \frac{1}{x} \, dx$;

b) $\int_0^1 x^2 e^{x} \, dx$;

c) $\int_0^{2x} \cos(x) \, dx$;

d) $\int_0^1 \sin x \, dx$.

Odp.

a) $K_1 = 1.09091$, $K_2 = 1.09804$

b) $K_1 = 0.711942$, $K_2 = 0.718252$

c) $K_1 = 1.97996$, $K_2 = 1.89115$

d) $K_1 = 0.616191$, $K_2 = 0.637062$.

Dziękuję za uwagę

WSEI LUBLIN

WYŻSZA SZKOŁA EKONOMII I INNOWACJI
W LUBLINIE