ОСОБЕННОСТИ РЕАКЦИЙ РАЗЛИЧНЫХ СПЛОШНЫХ СРЕД НА ВОЗДЕЙСТВИЕ ДЕФОРМАЦИИ.

- **Деформациями** называются любые изменения формы, размеров и объема тела. Деформация определяет конечный результат движения частей тела друг относительно друга.
- **Упругими деформациями** называются деформации, полностью исчезающие после устранения внешних сил.
- **Пластическими деформациями** называются деформации, полностью или частично сохраняющиеся после прекращения действии внешних сил.

- **Соотношения вида** называются физическими соотношениями, они определяют специфику той или иной деформируемой среды в отношении оказания сопротивления деформированию.

При постановке вопроса об особенностях сопротивления деформированию той или иной среды различают понятия физического и механического поведения среды. Сущность и содержание этих понятий определяются следующим образом

- При действии на сплошную среду внешних сил (объемных F~ или поверхностных ~p) его индивидуальные частицы получают некоторое ускорение dv/dt (согласно уравнению (2)), приводящие к движению и появлению соответствующих полей скоростей ~v и перемещений ~u. В свою очередь, появление поля перемещений приводит к изменению расстояний между индивидуальными точками материального континуума и к возникновению поля тензора деформаций (ε) в соответствии с геометрическими соотношениями (5). И наконец, изменение расстояний между индивидуальными точками материального континуума влечет за собой появление в деформируемой среде внутренних сил, количественной характеристикой которых является тензор напряжений (σ). Рассмотрим последний процесс более подробно привлекая понятия инвариантов и шаровых тензоров деформаций и напряжений.

Инварианты тензора деформаций.

Тензор деформаций является математическим объектом, характеризующим деформированное состояние в данной точке материального континуума. Деформированное состояние объективно определяется изменением расстояний между индивидуальными точками сплошной среды и не зависит от субъективно выбираемой для его описания системы координат. Поэтому тензор деформаций инвариантен относительно преобразования системы координат, т.е. он остается неизменным математическим объектом в любой произвольной системе координат и преобразуются при переходе от одной системы к другой по определенному (в данном случае ковариантному) закону. Такая зависимость компонент тензора деформаций от произвольно выбираемой системы координат затрудняет анализ деформированного состояния и приводит к необходимости введения так называемых инвариантов тензора деформаций.

Инварианты тензора деформаций – это скалярные величины, составленные из компонент тензора деформаций, не зависящие от выбора системы координат и не изменяющиеся при переходе от одной системы координат к другой. Тензор деформаций имеет три основных инварианта: первый T1(E) – линейный; второй T2(E) – квадратичный; третий T3(E) – кубический. Первый основной инвариант в произвольной системе координат образуется как произведение ковариантных компонент EIJ тензора деформаций и контравариантных компонент G IJ фундаментального метрического тензора в этой же системе координат и определяется как сумма их произведений: T1(E) = EIJG IJ . Образуемая указанным образом скалярная величина действительно является инвариантом ввиду взаимно обратного характера преобразования ковариантных компонент тензора деформаций и контрвариантных компонент метрического тензора при переходе от одной системы координат к другой. Покажем это. Действительно, мы можем записать: (E) = EIJ (~RI)(~RJ) = (EIJ) 0 (~RI) 0 (~RJ) 0 , где штрихи относятся к новой системе координат

При условии, что векторы взаимного базиса преобразуются по контравариантному закону, т.е. ~ri = (~rk) 0 ∂xi ∂ξk 4 , компоненты eij должны преобразовываться по ковариантному закону eij = (ekl) 0 ∂ξk ∂xi ∂ξl ∂xj . В то же время для контравариантных компонент метрического тензора, согласно g ij = ~ri · ~rj = (~rk) 0 · (~rl) 0 ∂xi ∂ξk ∂xj ∂ξl = (g kl) 0 ∂xi ∂ξk ∂xj ∂ξl .

- Понятно, что два последних выражения при перемножении дают условие инвариантности T1(е). Кроме того, первый основной инвариант может быть также выражен и через компоненты тензора деформаций в декартовой прямоугольной системе координат, связанной с главными осями деформации, как T1(е) = е1 + е2 + е3. При этом главные оси деформаций вводятся аналогично главным осям напряжений. Второй основной инвариант в общем случае образуется как сумма произведений ковариантных и контравариантных компонент тензора деформаций: T2(е) = eije ij = eijeklg kig lj или T2(е) = е 2 1 + е 2 2 + е 2 3 в декартовой системе координат. Третий основной инвариант образуется с использованием смешанных компонент тензора деформаций и при выражении через главные значения тензора деформаций определяется суммой их кубов: T3(е) = e j i e k j e i k = eiaejbekg ajg bkg ⊓i = е 3 1 + е 3 2 + е 3 2 . Доказать инвариантность T2(е) и T3(е) относительно преобразования координат предлагаю слушателям самостоятельно. Более удобными для анализа деформированного состояния являются не основные инварианты T1(е), T2(е) и T3(е), а производные инварианты – средняя деформация е и интенсивность деформаций еi .

- Средняя деформация является производным инвариантом первого основного инварианта: e = T1(e)/3 (8) Интенсивность деформации представляет собой производный инвариант первого и второго основных инвариантов тензора деформаций и определяется как ei = √ 2 3 q 3T2(e) − T 2 1 (e) (9) Можно показать, что в случае малых деформаций средняя деформация и первый основной инвариант тензора деформаций характеризуют изменение объема индивидуальных частиц сплошной среды.

- Физический смысл интенсивности деформаций заключается в том, что эта величина является обобщенной интегральной характеристикой сдвиговых деформаций в окрестности данной индивидуальной точки сплошной среды. Так как сдвиговые деформации определяются изменениями углов между координатными линиями сопутствующей системы координат и связаны только с изменением формы индивидуальных частиц, то интенсивность деформаций характеризует формоизменение индивидуальных частиц сплошной среды. В общем случае при деформировании может происходить изменение как объема индивидуальных частиц сплошной среды, так и их формы. Тогда, это позволяет представить тензор деформаций в виде суммы двух тензоров – шарового тензора деформаций (Se) и девиатора тензора деформаций (De): (e) = (Se) + (De).

- Компоненты шарового тензора деформаций можно определить на основе производного инварианта тензора деформаций в целом – средней деформации – с использованием компонент фундаментального метрического тензора системы координат: Seij = egij Совокупность девяти компонент шарового тензора деформаций образует диагональную матрицу, содержащую на главной диагонали величину средней деформации. Для того, чтобы убедиться, что шаровой тензор деформаций действительно характеризует изменение объёма, но не формы индивидуальных частиц, необходимо определить производные инварианты шарового тензора – среднее значение S и интенсивность Si по аналогии с (8) и (9). Действительно, первый и второй основные инварианты шарового тензора деформаций в соответствии с определением инвариантов и компонент шарового тензора равны: T1(Se) = Seijg ij = egijg ij = e(g11g 11 + g22g 22 + g33g 33) = 3e; T2(Se) = SeijS ij e = e 2 gijg ij = 3e 2

- При определении выражений для основных инвариантов имелось в виду, что сумма произведений ковариантных и контрвариантных компонент метрического тензора вследствие взаимно обратного характера преобразования указанных компонент является величиной, инвариантной относительно преобразования системы координат. Значит, эта величина может быть вычислена в любой ортогональной системе координат, где отличны от нуля лишь метрические коэффициенты с одинаковыми индексами, а метрические коэффициенты основного и взаимного базисов взаимно обратны. Из соотношений (8) и (9) следует, что среднее значение шарового тензора S совпадает со значением средней деформации е, а интенсивность шарового тензора Si = 0. Таким образом, шаровой тензор деформаций характеризует ту часть полных деформаций, которая определяет изменение объема индивидуальных частиц материального континуума и не связана с изменением их формы. Девиатор деформаций как бы показывает, насколько тензор деформаций в целом отклоняется от шарового (от латинского слова deviatio – отклонение). Компоненты девиатора деформаций – это разности компонент тензора деформаций в целом и компонент шарового тензора: Deij = eij – egij

Первый и второй основные инварианты девиатора деформаций определяются выражениями T1(De) = DeijG ij = (eij − egij)G ij = T1(e) − 3e = 0; T2(De) = DeijD ij e = (eij − egij)(e ij − egij) = eije ij − 3e 2 = T2(e) − 1 3 T 2 1 (e). Тогда среднее значение девиатора деформаций равно нулю, а его интенсивность с учетом (9) можно определить как Di = ei . Таким образом, девиатор тензора деформаций характеризует ту часть полных деформаций, которая определяет изменение формы индивидуальных частиц материального континуума и не связана с изменением их объема. 47 Необходимо отметить, что подобное разделение тензора деформаций на шаровой тензор и девиатор деформаций обусловлена тем, что различные деформируемые среды по-разному реагируют на изменение объема и формы их индивидуальных частиц. В общем случае каждый фактор (изменение объема индивидуальной частицы – (Se) 6= 0 или изменение ее формы – (De) 6= 0) вносит свой вклад в возникающее в этой частице напряженное состояние, что приводит к появлению шарового тензора напряжений (Sσ) 6= 0 и девиатора напряжений (Dσ) 6= 0, в то время как результирующее напряженное состояние в данной частице определяется суммой двух этих тензоров: (σ) = (Sσ) + (Dσ).

Именно с особенностями сопротивления сплошной среды двум отмеченным факторам деформирования связаны понятия физического и механического поведения деформируемых сред. Физическое поведение деформируемых сред определяется их способностью оказывать сопротивление изменению объема индивидуальных частиц и характеризуется присущей каждой среде взаимосвязью шаровых тензоров напряжений и деформаций: $(S_\sigma) = f_1(S_\varepsilon)$. (10) Механическое поведение деформируемых сред определяется их способностью реагировать на формоизменение и характеризуется присущей каждой среде взаимосвязью девиаторов напряжений и деформаций: $(D_\sigma) = f_2(D_\varepsilon)$. (11) Тензорные уравнения (10) и (11) называются определяющими уравнениями. Именно они характеризуют индивидуальность каждой деформируемой среды в отношении сопротивления деформированию, именно из них следует конкретный вид физических соотношений (7) для той или иной модели сплошной среды.

Физическое поведение сплошных сред. Уравнение состояния.

Тензорному уравнению (10) соответствует скалярное (в силу одинаковой структуры шаровых тензоров напряжений и деформаций) уравнение вида $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ между производными инвариантами тензоров напряжений и деформаций – средним напряжением σ и средней деформацией ε. Это уравнение определяет физическое поведение деформируемой среды. В более общем случае скалярное уравнение, определяющее физическое поведение деформируемой среды, учитывает влияние температуры и имеет вид $\sigma = \sigma(\varepsilon, T)$. Поскольку среднее напряжение с точностью до знака равно давлению, возникающему в данной индивидуальной частице материального континуума ($\sigma = -p$), а средняя деформация характеризует изменение объема индивидуальной частицы и взаимосвязана с текущим и начальным значениями плотности деформируемой среды как $\rho = \rho_0/(1 + 3\varepsilon)$ (в случае малых деформаций), скалярное уравнение, определяющее физическое поведение среды, может быть представлено в виде $p = p(\rho, T)$, И называется уравнением состояния деформируемой среды. Уравнение состояния характеризует фундаментальное свойство реальных деформируемых сред – их сжимаемость. Сжимаемость - это способность деформируемых сред к изменению или сохранению объема (или плотности) их индивидуальных частиц вследствие действующего в них давления. Как правила информация о сжимаемости реальных сред получается из опыта (из термодинамики!). Форма (12) представления уравнения состояния называется термической (давление зависит от температуры) и не является единственно возможной. Достаточно часто используются уравнения состояния в калорической форме $p = p(p, E)$ когда давление зависит от плотности и удельной внутренней энергии, или в энтропийной форме $p = p(p, S)$, когда давление зависит от плотности и энтропии.

Механическое поведение деформируемых сред

- Механическое поведение деформируемых сред связано со способностью индивидуальных частиц реагировать на изменение формы посредством возникновения в них соответствующих напряжений и характеризуется тензорным определяющим уравнением (11) взаимосвязи девиаторов напряжений и деформаций. На основании имеющегося однозначного соответствия между девиаторами и интенсивностями деформаций и напряжений механическое поведение деформируемой среды может быть охарактеризовано скалярным определяющим уравнением, в общем виде которое может быть записано как $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i , \dot{\varepsilon}_i , T)$. (13) Определяющие механическое поведение уравнения (11) или (13) также устанавливаются на основе опытных данных. Так, для многих реальных газов и жидкостей, деформируемых при относительно небольших скоростях деформаций, зависимость (13) имеет тривиальный вид $\sigma_i = 0$. Такие среды не реагируют на формоизменение $((D_\sigma) = 0)$, сколь бы существенным ни было изменение формы их индивидуальных частиц $((D_\varepsilon)$ 6= 0). Такое механическое поведение соответствует модели идеальной среды. В большинстве же случаев реальные деформируемые среды оказывают сопротивление формоизменению и зависимость (13) не является столь простой. В частности, это характерно для реальных сред, проявляющих основные механические свойства – свойства упругости, пластичности и вязкости. Упругость – это способность материала среды возвращаться к исходному состоянию после снятия приложенных нагрузок; пластичность – это способность материала после снятия нагрузок сохранять полученные в результате нагружения деформации полностью или частично; вязкость – это способность деформируемой среды оказывать сопротивление наличию относительной скорости движения ее частиц.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ